Gilles Chatelet

Le potentiel démoniaque. Le retour de la Monade. Quelques réflexions sur calcul différentiel et mécanique quantique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1981, fascicule 1
« Aspects philosophiques et physiques de la théorie des jauges », , p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1981___1_A1_0>

Le potentiel démoniaque
Le retour de la Monade
Quelques réflexions sur Calcul Différentiel
et Mécanique Quantique

La grandeur et la supériortié de la science de la nature aux XVIe et XVIIe siècles résident en ceci, que tous les chercheurs d'alors étaient philosophes : ils comprenaient qu'il n'y a pas de purs faits, mais qu'un fait n'est ce qu'il est qu'à la lumière du concept qui le fonde et selon l'ampleur d'une telle fondation. En revanche, la caractéristique du positivisme dans lequel nous nous trouvons depuis plusieurs décades et aujourd'hui plus que jamais, est qu'il prétend se tirer d'affaires avec des faits, ou d'autres faits nouveaux, tandis que les concepts seraient de simples expédients dont on a besoin à l'occasion, mais avec lesquels on ne doit pas s'engager trop loin, car ce serait de la philosophie. Le comique, ou plus exactement le tragique de la situation présente de la science est d'abord que l'on croit pouvoir vaincre le positivisme par le positivisme. Certes cette attitude ne règne que là ou s'effectue un travail moyen et subsidiaire. Là où s'effectue la recherche authentique et instauratrice, la situation n'est pas différente de ce qu'elle était il y a trois siècles. Cette époque-là aussi avait sa stupidité de même qu'inversement les têtes actuelles de la physique atomique, Niels Bohr et Heisenberg, pensent d'un bout à l'autre en philosophes grâce à quoi seulement ils instaurent de nouvelles manières d'interroger et se tiennent avant tout dans le questionnement.

Martin Heidegger
Qu'est-ce qu'une chose ?
Editions Gallimard

<u>I - Fibrés</u>

Cent ans après la parution des Principes de la Philosophie Naturelle de Newton, l'Espace comme forme a priori consacre la victoire philosophique de l'espace homogène, isotrope, aux joints simplement individués par un Repère universel. Il légitime pour plus d'un siècle le coup de force qui installe la Physique Mathématique classique et tout particulièrement la Mécanique Céleste. En effet, la Physique Mathématique <u>en tant que telle</u> est toujours un contrat issu de la rencontre entre Matière et Géométrie. La déroute de la Matière est cette fois-ci complète :

Ceci a supposé la liquidation de la Physique d'Aristote, celle des corps qui se mouvaient conformément à une Nature intrinsèque, celle des lieux qui en abritaient la virulence. Un mouvement pouvait être "parfait" : le mouvement circulaire l'était sans requérir une quelconque attraction externe ! Déchu par Newton dans la hiérarchie des mouvements, de fondement qu'il était, il appelle maintenant une raison fondatrice dont le siège lui est tout à fait étranger. La matière n'est plus le principe interne d'où résulte le mouvement du corps, mais simplement la pesanteur, l'inertie qu'opposent les "masses" aux efforts qui tentent de les déplacer.

Dans l'Espace Absolu, se meuvent des points "matériels" qui, éventuellement groupés en solides, se laissent docilement appréhendés comme ensembles de positions-vitesses, autrement dit collection ordonnée de "valeurs" numériques obtenues par projection sur les axes d'un repère de Galilée-Descartes.

Quelques francs-tireurs avaient pourtant résisté. Un des derniers, le père Boscovitch avait tenté une individuation plus autonome des points matériels. Ceux-ci baignaient dans un espace newtonien, mais dans leur voisinage, des forces répulsives d'expression mathématique, compliquée, étaient censées restaurer une certaine turbulence. L'existence d'un tel bouclier, construit manifestement pour contester "quand même" l'hégémonie de l'espace de Newton, ne pouvait empêcher l'engloutissement de leurs intéractions dans ce dernier.

Trente ans avant lui, Leibnitz avait refusé pourtant ce compromis boîteux. Il avait posé le problème de la cohérence d'un Monde de "points métaphysiques", de substances simples (sans parties) : Les Monades. Elles ne sont pas plongées <u>dans</u> l'Espace. Tout au contraire l'Espace est la coexistence même de ces entités choisies par la Grâce Divine dans le vivier des Possibles. Deux postulats fondamentaux leur interdisent d'ailleurs toute immersion dans un espace externe :

- Elles possèdent en elles-mêmes le principe de leur différenciation (spontanéïté).
- L'intéraction n'est ni symétrique, ni matérielle. La monade la plus parfaite se subordonne les autres par une influence idéale. Ce qui se trouve en elle sert à rendre raison a priori de ce qui se passe dans l'autre.

Les Monades, que Leibnitz voyait comme "productions naissant pour ainsi dire, par des fulgurations continuelles de la Divinité" devront attendre la fin du XXe siècle et le développement de la théorie des Particules Elémentaires pour entrer dans une Physique Mathématique qui prétend décrire le procès même de constitution de l'Espace. Comment la Géométrie Analytique l'avait-elle donc si bien saisi ?

Par repère cartésien, c'est-à-dire par capture à distance par le quadrillage d'un "système de coordonnées". Une "origine" étant choisie, on peut associer à chaque événement un quadruplet (x, y, z, t) de déterminations numériques.

Il est difficile d'exagérer l'extraordinaire brutalité qui installe la Physique Mathématique classique (le Principe d'Inertie n'est d'ailleurs que l'affirmation du fait que la Matière "mime" la Géométrie dans l'Espace Absolu : une masse seule, livrée à elle-même, y décrit des droites).

La réduction de la chose plongée dans l'Espace à une collection de projections, réside précisément dans l'invention du "produit cartésien". On dit que $E = B \times F$ s'il existe pour chaque élément de E une scission canonique en couples d'éléments de B et F. Ecrire $e = (b,f)$, c'est vérifier d'un coup d'oeil la réversibilité de la décomposition qui épuise complètement E en ses aspects (fig. 1). Rien n'échappe à la description de E en termes "d'ensembles abstraits". E n'existe pas par soi, comme agencement de parties mais comme simple présentation de couples.

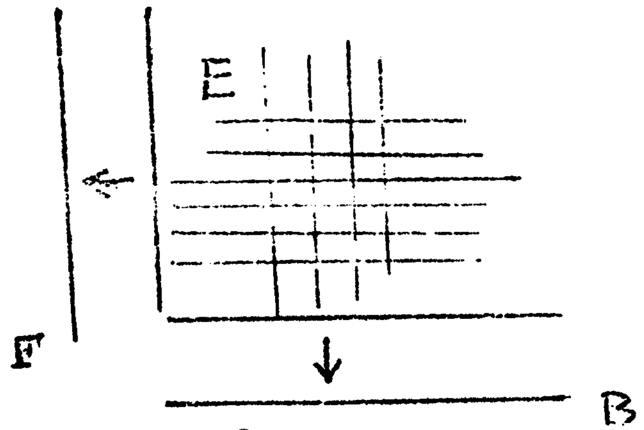


fig 1

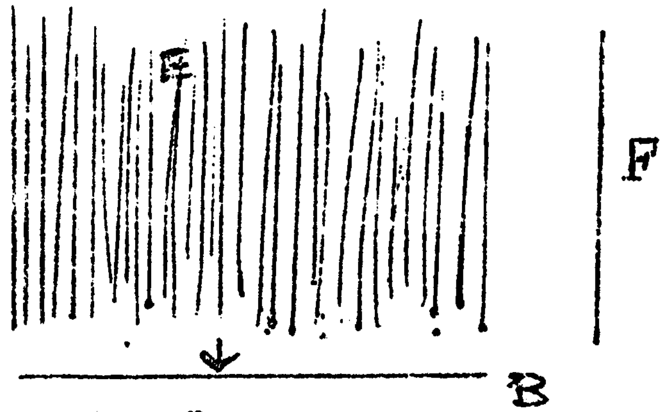


fig 2

Si maintenant E ne peut être saisi que par l'un de ses aspects (existence d'une seule projection (fig.2)), cet ensemble peut être conçu comme un univers B hérissé de copies de l'ensemble F. Chaque copie, "prise en soi, n'est que F", mais elle existe maintenant comme partie de E, elle hérite son individuation de son environnement dans l'espace E.

Il en résulte immédiatement que E n'est plus décrit par un formalisme externe qui prétendrait le capter en termes de projections et d'ensembles abstraits en négligeant l'agencement particulier des fibres qui le constitue. Pointer un élément de E, ce n'est plus simplement présenter un couples d'éléments de B et F, c'est bien plutôt comprendre l'analyse-synthèse adaptée à ce point-ci et qui permettra ensuite de le concevoir comme couple. Ce type de saisie par décomposition variable est irréductible à la scission canonique globale induite par le produit cartésien.

Construire un objet tel que E (un "fibré"), c'est donc greffer un objet F sur chaque élément de l'univers-base B. C'est une manière de le "compliquer", d'enrichir sa structure pas à pas. La connaissance complète de E exige d'expliciter la technique de greffe pour chaque point. Dans le cas du fibré cartésien, l'existence de E et sa description étaient simplement données par l'axiome relatif à l'ensemble des couples de deux ensembles B et F.

Un cas particulièrement important est celui où F admet une structure de groupe ou d'espace vectoriel. Un ensemble sous-jacent amorphe peut en effet incarner de plusieurs manières une même structure abstraite. Ainsi, imprimer une structure d'espace vectoriel peut se faire au moyen du choix d'un repère. Un groupe "abstrait" peut de déployer dans un substrat de plusieurs façons.

Construire un fibré en groupes ou en espaces vectoriels sur une base B, c'est choisir, pour chaque élément de B, une manière d'incarner une même structure dans un substrat. C'est une collection de variations, de déformations d'une même structure paramétrés continûment par la base.

En dehors de la contrainte de continuité, il n'existe aucune relation entre ces différentes incarnations. Prenons l'ensemble des fibres greffées sur un arc de l'univers-base B (fig.3).

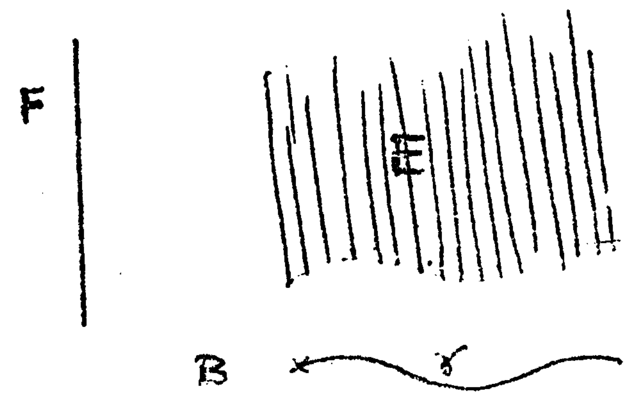


fig.3

Cette situation est celle de la trajectoire d'une monade-fibre. Elle ne perçoit qu'un défilé capricieux de copies d'une même structure abstraite, sans liaison entre elles. Dans le cas du fibré cartésien, nous saisissions à distance toutes les images par décomposition globale (*). Par contre, dans le cas d'un fibré, nous sommes en général obligés d'effectuer un bilan pointilleux fibre par fibre de chaque mode de concrétisation. Dilemne peu encourageant ! Nous sommes coincés entre l'infinie complexité de E ou sa trivialité comlète ! Ou bien chaque fibre voit se hérisser autour d'elle d'autres

(*) celle-ci apparaît clairement maintenant comme synthèse.

fibres, certes identiques à elle comme copie abstraite, mais qui affirment furieusement leur hétérogénéïté (comme nous venons de l'indiquer, un simple arc dessiné dans B peut paramétrer un film incohérent de structures !) ou alors... elle se résigne à subir le joug du quadrillage cartésien !

Une première solution serait d'exiger simplement une "synthèse locale" en limitant le domaine de la réduction cartésienne à l'environnement de chaque point : E peut alors être pensé comme le rassemblement d'une multitude de petits égos qui parviennent à quadriller leur voisinage par saisie à distance. Il s'agit de véritables puzzles à reconstruire (fibré localement trivial). Ceux-ci permettent des espaces globalement plus audacieux (tordus, troués...) mais l'homogénéité triomphe autour de chaque fibre (fig.4).

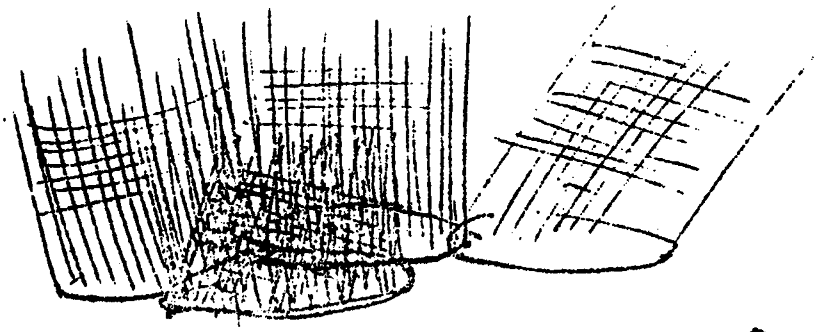


fig 4

Oublions cette possibilité de réduction locale et tentons de concevoir un rassemblement de fibres où chacune serait véritablement affectée par l'extériorité indomptée des autres. Pour éviter l'incohérence d'une séquence de structures qui pourrait être associée à chaque trajectoire de monde-fibre, nous supposerons désormais donnée l'existence d'un certain type de liaison entre les copies "concrètes" de F (incarnations de la même structure) qui défilent lors du parcours. Il existe ainsi une manière d'appréhender le faisceau des fibres greffées sur un arc sans expliciter la structure précise choisie pour chacun de ses points. Chaque monade expérimentant un chemin dans l'univers B établit une espèce de synthèse associée à chaque chemin.

D'une manière plus précise, soient x et y deux points de B (fig.5) et γ un chemin reliant x à y. On suppose donnée pour ce chemin, une correspondance de structures ("isomorphisme") qui applique

Fy sur Fx, soit T_γ . Grâce à cette dernière, chaque fibre reçoit des copies concrètes des structures incarnées dans les autres. A chaque "expérience" (chaque chemin dans B), correspond une application qui fournit des "informations" quant à la manière selon laquelle la structure abstraite commune s'empare des fibres. T_γ est le "transport parallèle" (⊗) qui applique Fy sur Fx en respectant leurs structures concrètes respectives. Constituer E, c'est rassembler les monades-fibres par transport parallèle, c'est-à-dire se donner la collection des isomorphismes associés à chaque chemin ou encore se donner l'ensemble des synthèses effectuées lors du parcours des différentes trajectoires.

Convenons donc d'appeler fibré à connexion un tel objet qui semble exprimer mathématiquement la notion de constitution d'un Espace de monades générales. Dans le cas du fibré cartésien, une connexion s'impose aussitôt (fig.6). E peut être pensé comme un simple empilement d'étendues identiques à B. La synthèse reste "la même" pour tous les chemins tracés sur une de ces étendues et nous retrouvons la décomposition canonique globale en couples.

Prenons un point X dans une fibre Fo (fig.9) le transport de structure

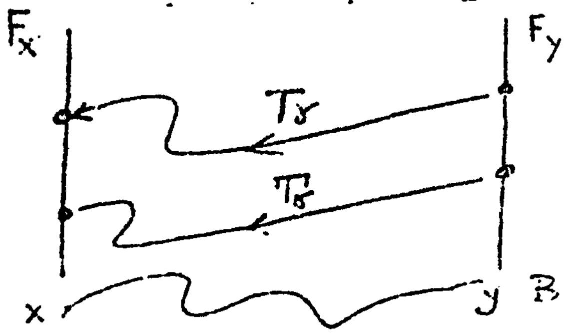


fig 5

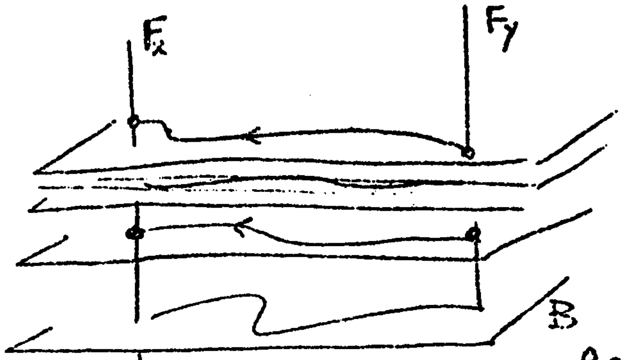


fig 6

(⊗) NOTE Le parallélisme
transport d'homologie tangente.

C'est le parallélisme de trois droites qui permet de transporter les proportions des segments découpés par celles-ci sur deux autres droites (cf.fig.7). Il permet généralement de dire que A est à B dans telle structure ce que A' est à B' dans telle autre structure. Elle résout mathématiquement le problème du transport du Même et de la Relation... La détermination des termes transportés importe peu. Le parallélisme peut donc "véhiculer" des quantités infinitésimales. C'est pour cela qu'il put jouer un rôle fondamental dans la compréhension des dérivées, des tangentes et plus généralement du Calcul Différentiel. Ceci justifie la terminologie de Levi-Civita -transport parallèle- pour qualifier le concept qui permet l'appréciation des différences dans les multiplicités.

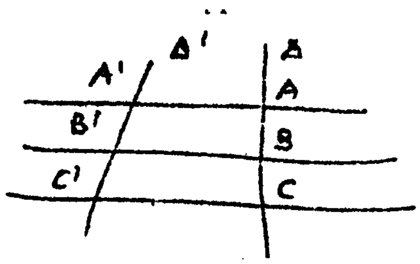


fig 7

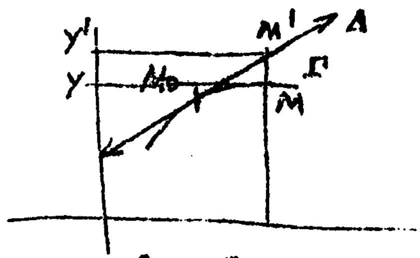


fig 8 sur Γ

"A la limite" (quand M tend vers Mo sur la courbe F) M est à Mo sur Γ ce que M' est à Mo sur la tangente Δ .

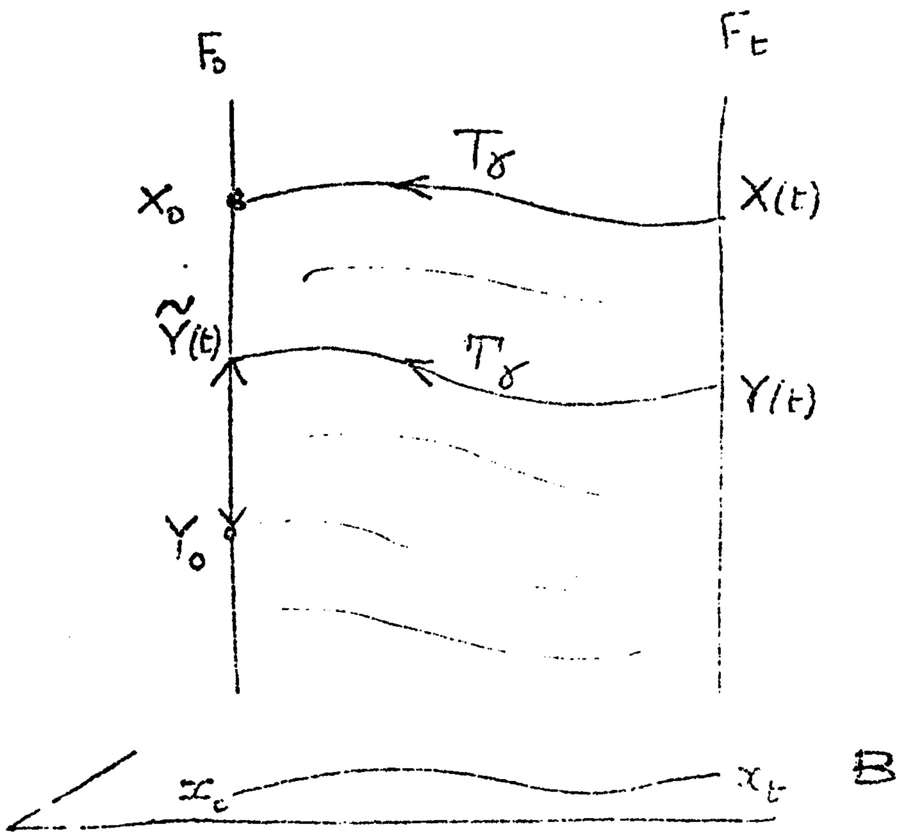


Fig 9

associé à chaque chemin, induit une notion de "même point" induite par le parallélisme. Un point X(t) d'une fibre F_t est "le même que Xo dans Fo" si le rappel de X(t) suivant T_γ est Xo . Le "point mobile" X(t) est perçu fixe dans Fo. On dit que X(t) se transporte "horizontalement" au-dessus du chemin γ . La connexion induit ainsi les transports de l'Identique associés à chaque trajectoire.

Elle induit aussi une manière d'apprécier les différences et les variations. Pour la monade fibre Fo, le point variable Y(t) est perçu comme le point variable $\tilde{Y}(t)$. L'écart détecté dans Fo est celui qui sépare Yo de $\tilde{Y}(t)$. S'il existe un Calcul Différentiel associé aux multiplicités B et F, soit une technique d'appréciation des différences "infinitésimales", il existera donc un Calcul Différentiel Intrinsèque à chaque fibre c'est-à-dire une manière d'apprécier ces différences dans chaque fibre.

On peut montrer que ce Calcul Différentiel ne fait intervenir que la tangente U du chemin le long duquel s'accomplit le transport. Seules importent donc certaines données différentielles concentrées au point Xo. Ceci est fondamental : pour préciser les dérivations spécifiques à chaque fibre, il suffit d'en choisir les directions et non d'expliciter des parcours effectifs. Ce Calcul Différentiel est donc associé aux seules virtualités de déplacements ("déplacements infinitésimaux") du point et non à la multitude des trajectoires "réelles" issues de xo .

Pour chaque point xo , la dérivation intrinsèque selon la direction U se note ∇_υ^{xo} . En écrivant $\nabla_\upsilon^{xo} = \partial_\upsilon^{xo} + A_\upsilon^{xo}$, on fait apparaître l'écart A_υ^{xo} entre le Calcul Différentiel de B et celui de la fibre Fo (*). L'opérateur ("connection infinitésimale") marque la manière spécifique de dériver dans la fibre lorsqu'on se déplace virtuellement dans la direction U.

Rappelons (cf. début de ce paragraphe) qu'un mobile X(t) se transporte horizontalement si son image par transport parallèle demeure fixe dans chaque fibre. Ainsi, un point Xo de E et un chemin γ de B étant donnés, il existe un chemin unique Γo se projetant

(*) ∂_υ^{xo} est la dérivation habituelle dans la direction υ .

sur γ , passant par Xo et dont les points se transportent horizontalement (cf.fig.10). Γo est le relèvement horizontal de γ issu de Xo . Lorsque rayonnent autour de xo tous les chemins possibles, les tangentes de leurs relèvements horizontaux balayent un plan ("plan horizontal") qui décalque le plan tangeant à la multiplicité B en xo . Ce système de plans horizontaux prescrit les déplacements virtuels de l'Identique d'un E. Il décrit complètement la décomposition instantanée ("Analyse-synthèse infinitésimale ?") qui caractérise le fibré en chaque point.

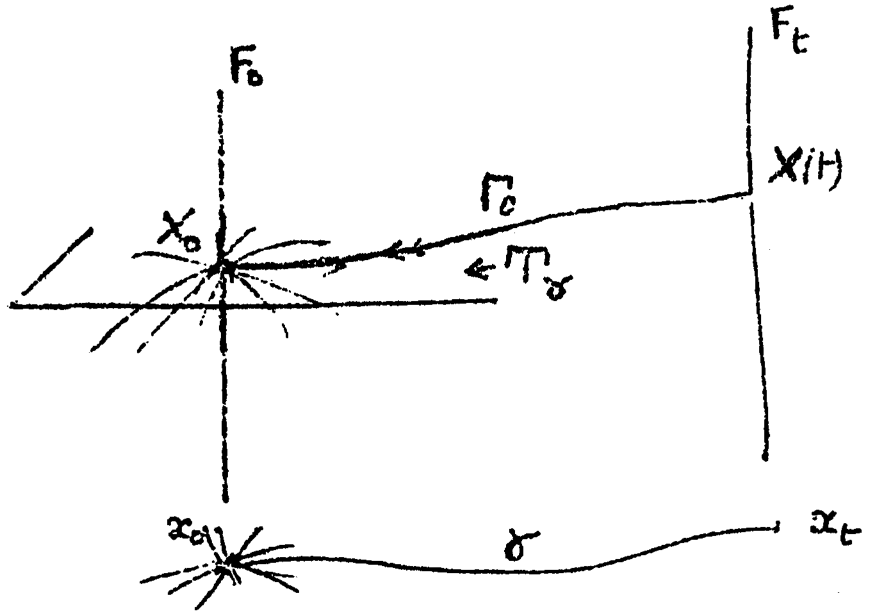


fig 10

On peut d'ailleurs démontrer que, sous certaines conditions peu restrictives, la donnée d'une connection par transport parallèle (collection des synthèses associées à chaque chemin effectivement parcouru) est équivalente à la donnée de la connection infinitésimale fournie par un système de plans horizontaux. Autrement dit, la collection des synthèses accomplie pour chaque chemin est connue dès que les déplacements indéfinitésimaux de l'étalon identitaire sont déterminés.

Le système des plans horizontaux renonce à la saisie effective triviale de l'Espace opérée par le quadrillage cartésien. Il prétend seulement à un quadrillage virtuel de l'environnement de chaque point, à une intention de capture qui laisse pourtant intacte la virulence de l'Espace. Cette intention n'implique par l'existence d'un système de coordonnées "réelles" (*) et peut se préciser par

(*) Dans le cas du quadrillage cartésien, des plans "réels" peuvent se substituer immédiatement aux plans "virtuels". Dans le cas général, les plans horizontaux, "virtuels", n'enveloppent aucune famille de multiplicité. Il est facile de voir en effet qu'une telle famille fournirait un système de coordonnées.

une direction de déplacement sans exiger de la monade-fibre l'expérience du parcours effectif d'un chemin.

Par le biais d'une connection infinitésimale, chaque monade-fibre reçoit les images des structures incarnées dans les fibres environnantes. Mais, comment peut-elle expérimenter l'hétérogénéité de l'Espace ? tester le flux d'extériorité qui l'assaille dans chaque direction ? Comment précisément s'apercevoir du caractère singulier de chaque direction ?

Dans le cas d'un Espace homogène, il est bien connu que la composition de deux dérivations ∂_U et ∂_V selon deux directions U et V, ne dépend pas de l'ordre choisi :

$$\partial_U \partial_V = \partial_V \partial_U$$

Si nous formons maintenant les produits $\nabla_U^{xo}\,\nabla_V^{xo}$ et $\nabla_V^{xo}\,\nabla_U^{xo}$ (xo est un point de B), l'écart Ω_{UV}^{xo} entre ceux-ci, exprime la non-équivalence entre les couples (U,V) et (V,U) selon lesquelles s'effectuent les compositions de dérivation intrinsèque correspondantes. L'opérateur Ω_{UV}^{xo} appelé Courbure, apparaît bien comme le concept adequat à l'expérience de l'hétérogénéïté de l'Espace au voisinage du point xo . Elle est calculable en fonction de seules données différentielles relatives à ce point (*).

On peut d'ailleurs montrer que si la courbure est nulle, il existe une famille de surfaces tangentes aux plans horizontaux de la connection infinitésimale (cf. Note de la page précédente).

Cette famille constitue alors un système de coordonnées permettant une saisie cartésienne de tout un domaine de l'Espace. Autrement dit, la courbure est nulle si et seulement si à la saisie virtuelle prescrite par les plans horizontaux peut se substituer une saisie réelle triviale.

Par l'existence d'une courbure, la monade expérimente la rebellion de l'Espace à toute capture par quadrillage cartésien.

(*) Caractère "tensoriel" de la courbure.

Est-alors interdite toute décomposition globale qui prétendrait assumer la complexité de toutes les décompositions instantanées induites par la connection infinitésimale. La courbure permet d'apprécier en quelque sorte le flux d'extériorité qui irrigue chaque monade.

Nous sommes ainsi tentés d'apprécier positivement la connection comme fondement du Spatial, comme aptitude à rassembler les différentes incarnations d'une même structure. Chaque monade "tient l'Espace" en esquissant simplement autour d'elle un système de coordonnées. La courbure, concept dérivé, fait obstacle à l'aboutissement d'un tel projet. Elle introduit une espèce de négativité en Géométrie (* *)

(**) NOTE La Courbure

Rappelons que la courbure d'une trajectoire est le rapport $\frac{d\phi}{ds}$ de deux distances infinitésimales : celle ds mesurée sur la courbe (cf.fig.11) et celle $d\phi$ induite sur le cercle unité par les normales correspondantes. Elle apparaît clairement comme l'écart entre la proximité intrinsèque à la courbe et celle induite par la représentation sur les tangentes.

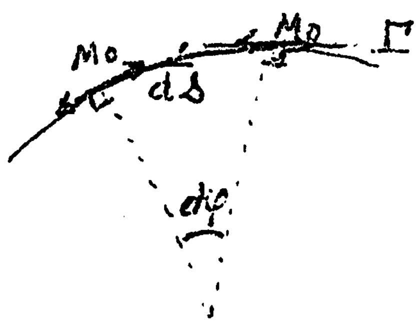


fig 11

Dans cette définition, elle est appréciée négativement comme défaut de la courbe comparée à la ligne droite.

C'est la notion de connection infinitésimale qui restaurera la positivité des concepts de la Géométrie Différentielle comme puissance de rassemblement permettant ainsi la définition la plus générale de la courbure.

Trois théories demeureront marginales dans la Science du XIXe siècle : celle de Galois (Théorie des Groupes), celle de Riemann (Théorie des Multiplicités munies de proximités), celle de Marwell (Théorie de l'Electromagnétisme). Elles ne révèleront leur importance cruciale que dans les deux dernières décennies. Elles introduisent pourtant les notions de problématique en Algèbre, de négativité en Géométrie et enfin d'ondes, de champ et d'informations en Physique.

En particulier, la courbure en introduisant des Espaces dont l'audace laissait craindre qu'ils requissent des axiomatiques exotiques, se situe parmi des descendants du Calcul Différentiel du XVIIIe Siècle à l'extrême opposé de la Théorie des Equilibres et des Externes qui hantent la Thermodynamique et les Théories économiques de Pareto-Walras.

II - Collisions de particules

Lors des phénomènes de réactions et de collisions de particules, le physicien observe les fréquences d'apparition de certains états finaux issus de données initiales dont il a nourri le système.

La Théorie Quantique des Champs se propose donc de former le tableau des réponses probables du système physique aux états initiaux préparés par l'expérimentateur. Sans entrer dans les détails, précisons que ce tableau s'obtient par l'introduction de champs $\phi_\alpha(x)$ $\phi_\beta(x)$ ... $\phi_\lambda(x)$, opérateurs fonctions de la variable x d'espace-temps du laboratoire, lorsque entrent en jeu des particules de type α, β ... λ . Ces champs ont en général plusieurs composantes $\phi_\varepsilon = (\phi_\varepsilon^1 , \phi_\varepsilon^2 , \dots , \phi_\varepsilon^n)$ et s'interprètent comme créant ou détruisant des particules de type ε au point x. Une expression algébrique $\mathcal{L}$ de ces champs (le lagrangien) et de leurs dérivées partielles(*) permet en principe, par certains calculs, de construire ce tableau.

(*)dérivées partielles de l'espace homogène habituel

$\mathcal{L}$ se décompose en deux termes $\mathcal{L}_o$ et $\mathcal{L}_{int}$ de rôle complémentaire : $\mathcal{L}_o$, le lagrangien libre s'obtient par des considérations mathématiques a priori. Il permettrait de dresser le tableau fictif associé à des particules sans interaction : c'est le lagrangien qu'aurait le système pensé comme juxtaposition abstraite des particules (particules "libres" ou "nues" comme disent les physiciens). Le tableau correspondant serait trivial : "il ne se serait rien passé !" puisque toute physique "réelle" est court-circuité. Ce lagrangien peut aussi se concevoir comme la simple présentation des acteurs-particules bien avant (ou bien après) que l'événement de réaction ou de collision ait lieu (ou ait eu lieu).

Le terme $\mathcal{L}_{int}$ (lagrangien interaction) est une expression algébrique beaucoup plus compliquée que $\mathcal{L}_o$ (en particulier ses termes sont des combinaisons des champs de différents types alors que dans le cas de $\mathcal{L}_o$, chaque champ intervient de manière séparée) et s'obtenait en général par des procédés heuristiques. C'est précisément le mérite de la Théorie de Jauge de fournir un moyen de le construire dans certains cas à partir de termes du type $\mathcal{L}_o$ et non comme procédé ad hoc. $\mathcal{L}_{int}$ introduit les forces qui assurent les transitions de certains états initiaux vers certains états finaux différents et quelquefois inattendus ! $\mathcal{L}_{int}$ fait donc qu'il se passe "quelque chose". Il peut se comprendre comme le terme perturbant le lagrangien libre afin "d'habiller" (* *) les champs initialement présentés abstraitement, faisant ainsi surgir l'événement physique. Il induit un tableau généralement non trivial qui peut suggérer l'apparition de particules absentes au début de l'expérience.

Un théorème remarquable (le théorème de Noether), associe aux opérations mathématiques qui laissent invariant un lagrangien donné, des paramètres de nature physique conservés au cours du temps. Ainsi, toute symétrie imposée au système par la forme du lagrangien, induit une "réponse" physique : le degré de régularité mathématique implique une complexité physique amoindrie. Le théorème de Noether peut être vu comme un théorème d'équivalence d'une information "purement" mathématique et d'une information "purement" physique.

(* *) cette terminologie étrange est celle des physiciens !

Ces opérations peuvent être celles d'un groupe de symétrie de l'espace du laboratoire (agissant donc sur la variable x) mais aussi se déployant dans l'espace des variable ϕ_ε (qui rappelons-le ont en général plusieurs composantes considérées comme variables "abstraites" (leur dépendance à l'égard de x étant ignorée). Dans ce dernier cas, on les qualifie de symétrie interne des particules. Suivant le théorème de Noether, ces symétries internes impliquent la détection expérimentale d'un "quelque chose" qui manifeste de manière coriace le mode d'être de la particule en résistant à la collision ou à la désintégration. Des groupes de symétrie du lagrangien, naissant donc des contraintes a priori utilisées souvent comme cribles de sélection pour les réactions possibles.

Donnons quelques exemples de symétrie interne :

- le lagrangien de Dirac de l'électron est invariant par changement de phase de l'opérateur électronique ψ c'est-à-dire par le remplacement de ψ par $e^{i\alpha}$ ψ où α est un nombre réel indépendant de x . C'est une symétrie interne qui implique la conservation de la charge.

- le lagrangien du nucléon (proton ou neutron) est invariant par les opérations internes issues d'un certain groupe de matrices à trois paramètres réels. Ceci implique la conservation d'une quantité : le spin isotopique. Ainsi, les réactions qui mettent en jeu les nucléons sont telles que le spin isotopique de l'état initial est égal à celui de l'état final.

L'observation suivante, fait à propos du premier exemple, suscita l'idée de la Théorie de Jauge. Si on exige du lagrangien électronique une invariance par rapport à des transformations du type $e^{i\alpha(x)}$ (le coefficient α dépend donc cette fois-ci de la variable x d'espace-temps), il faut introduire un coefficient correcteur A(x) produisant ainsi une nouvelle expression algébrique. Celle ci se révèle être le lagrangien libre de l'électron auquel on a adjoint le lagrangien d'interaction de l'électron et du photon : A(x) s'interprète alors aisément comme le potentiel-vecteur électromagnétique qui est l'opérateur de création-destruction des photons. Ainsi l'exigence "purement géométrique" d'invariance par rapport à une symétrie "concrète", ne se manifeste pas comme contrainte, comme facteur de simplification de la physique du système mais au contraire fait surgir l'interaction des électrons et des photons par le biais du potentiel vecteur qui est interprété en physique comme le <u>véhicule</u> de la force électromagnétique. Il <u>crée en effet les quantas du champ de force échangés</u> au cours de l'expérience (*).

Dans ce cas, nous avons exhibé une méthode particulièrement élégante d'obtention du lagrangien d'interaction. Pressentant probablement le caractère crucial de cette astuce, H. WEYL associe à chaque point de l'espace-temps une fibre circulaire. Cette manière de hérisser l'espace constitue naturellement un mode d'individuation plus élaboré que le simple point chargé en permettant le déploiement de symétries internes. Nous obtenons ainsi un fibré en cercles sur l'espace-temps. Une nouvelle découverte nous attend : A(x) qui était simple terme correcteur, s'interprète alors comme une connexion qui, rappelons-le prescrit le rassemblement concret des fibres ! D'une manière équivalente, le lagrangien d'interaction s'obtient en remplaçant simplement $\frac{\partial}{\partial x}$ (dérivation de l'espace-temps homogène) par le symbole $\frac{\partial}{\partial x} + A(x)$ qui est, rappelons-le, celui du Calcul Différentiel intrinsèque associé à une connexion ! De plus, H. WEYL montre même que la courbure dérivée de A(x) n'est autre que le champ électromagnétique !

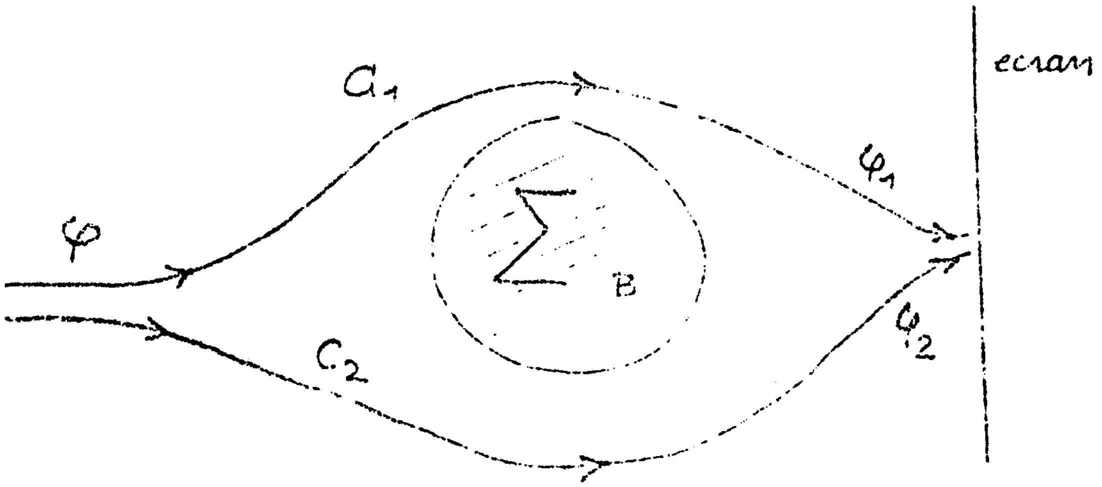
Nous sommes tentés alors de rédiger un petit dictionnaire pour rendre encore plus flagrant le parallélisme de la constitution des deux espaces

	espace géométrique des monades mathématiciennes		espace physique des monades physiciennes
abstrait	fibré abstrait		lagrangien libre
		retranchement sur l'espace-temps Espace physico-mathématique	
concret	communication des monades mathématiciennes		communication des monades physiciennes
	connexion (calcul différentiel intrinsèque)		potention vecteur créateur des quanta de force véhicule de l'interaction
expérimental	courbure		force élétromagnétique

Ceci incite naturellement à une généralisation du procédé. Partant d'un lagrangien "libre" possédant un groupe de symétries internes abstraites (en général groupes de matrices à coefficients constants), le lagrangien d'interaction pourra s'obtenir en rebranchant ce groupe sur l'espace-temps (les coefficients dépendant alors de la variable x). D'une manière équivalente, on peut former le fibré abstrait obtenu en paramétrant le groupe de symétries par l'espace du laboratoire puis choisir un Calcul Différentiel Intrinsèque qui en prescrit le rassemblement concret. Yang et Mills appliquère cette méthode au Spin isotopique (notre deuxième exemple). La Théorie de Jauge était née.

Remarquons que le rôle du potentiel-vecteur en physique a toujours été ambigu. A-t-il vraiment un "sens physique" dans l'acceptation habituelle de ce terme ? Comment se manifeste-t-il "vraiment" ? L'expérience d'Aharonov-Bohm tente de la préciser.

On se donne (fig.11) un champ magnétique B <u>strictement confiné à l'intérieur du cercle hachuré</u> Σ . Une gerbe d'électrons, <u>ayant initialement la même phase</u>, se sépare en deux faisceaux qui empruntent deux chemins différents C_1 et C_2 . Des franges sont bien observées et détectent donc des phases différentes pour les deux faisceaux.



Les chemins C_1 et C_2 ne sont donc pas physiquement équivalent, <u>quoique en dehors de l'action directe de B</u>. Un modèle qui réduit l'électron à un simple point chargé peut tester <u>des forces de Lorentz</u>

(ici absente) mais ne peut évidemment prédire des interférences.

Seul responsable de l'écart des phases, le potentiel vecteur n'intervient pas par ses "valeurs" (projection sur les axes du repère du laboratoire) car l'addition d'un terme convenable à A ne modifie pas le déphasage. Ici il teste bien plutôt un agencement apparamment "purement géométrique" . Par le biais des interférences, il nous signale que les deux chemins ne sont pas géométriquement équivalents dans l'espace hachuré.

L'état initial est celui de particules préparées ayant des phases identiques loin de la zone expérimentale. On peut le concevoir comme un fibré circulaire "abstrait" muni d'une connexion triviale : la structure de groupe s'est incarnée dans le cercle sans référence à l'espace de base. Les particules (et les fibres) "s'habillent", le potentiel vecteur surgit et avec lui, l'espace physico-mathématique manifesté par les interférences de l'état final.

Ce "récit" souligne volontairement la vacillation féconde des catégories du "purement géométrique" et du "purement physique". Les particules-fibres constituent un espace physico-mathématique effectif par la dissolution simultanée de celles-ci. Habiller un lagrangien libre ou un fibré abstrait, ce n'est plus céder à la prière d'une Physique avide de Formes, c'est raconter l'acte même de communication entre "monades physiciennes" et "monades mathématiciennes", la traduction qui fonde l'existence de la Physique Mathématique.

(*) Note sur le potentiel

M. Guéroult (Leibniz : Dynamique et Métaphysique) a bien montré l'importance du potentiel dans le système de Leibinz. Celui-ci est réservoir de force vive apte à bousculer les corps ou les briser. Il apparaît donc comme disponibilité à modifier des agencements mécaniques.

En Thermodynamique, le potentiel thermique peut libérer du travail et donc mouvoir des masses. Bien plus, il permet des transitions entre certaines structures cristallines, une ascencion dans une hiérarchie de formes. C'est ainsi de G. Simondon peut écrire : (L'individu et sa genèse physico-bilogique P.103 P.U.F.).

L'état contenant des forces de tension, une énergie potentielle, peut être nommé forme du système, car ce sont ses dimensions, sa topologie, ses isolements internes qui maintiennent ces forces de tension..."

Mais c'est la Théorie de Jauge qui le dévoile si explicitement comme force de liaison entre incarnation de structures en l'interprétant comme connexion infinitésimale.

III - La querelle du Temple de Marbre et du Temple de bois

Certains physiciens n'ont voulu voir dans cette histoire qu'une manière "esthétique" d'écrire des lagrangiens d'interaction. C'est oublier que l'élégance en Physique précède toujours des bouleversements cruciaux. Maxwell, pour justifier l'introduction du courant de déplacement dans ses équations, avouait s'être laissé guider par une exigence de symétrie des formules... Herz montrera que ce terme explique l'existence des ondes radios.

C'est probablement comme nouveau mode d'instauration du physico-mathématique lui-même que la Théorie de Jauge est révolutionnaire. Toute physique mathématique est fondée par un protocole d'articulation du sens géométrique et du sens physique.

C'est ainsi, que Newton, dans l'introduction de ses Principia écrit :
"L'espace absolu, sans relation aux choses externes demeure toujours similaire et immobile"

"le lieu est la partie de l'espace occupée par un corps"

C'est dans ce cadre préalable que l'équation $\frac{F}{m} = \Gamma$ lie les forces (divisées par la masse) aux accélérations.

On connaît la contre-attaque d'Einstein : imposer brutalement le signe = entre une courbure et un tenseur matériel.

Cette nouvelle équation était la réponse urgente au choix d'un "modèle" d'espace. Certains géomètres avaient en effet montré que l'espace de Kant Newton n'était pas le candidat unique et Riemann avait explicitement averti que l'Espace, comme forme a priori du Monde, devait chercher sa détermination ailleurs.

La Géométrie, réceptable formel désormais en quête de fondement, accueillait la concrétude vivifiante de la Matière. Cette paix impatiemment conclue, qui semblait mettre fin à leur querelle séculaire, ne satisfaisait pourtant guère Einstein qui la comparaît volontier à un "palace à deux ailes : l'aile gauche était faite de marbre éternel, l'aile droite de mauvais bois !"

Il était difficile en effet de concevoir une équivalence entre la Géométrie Pure, pensée comme projet axiomatique, science achevée des figures et des formes (le Temple de Marbre !) et la Matière amas confus de "masse énergie". Cette manière de voir d'Einstein rendait d'ailleurs encore plus criante l'hétérogénéité de termes censés s'identifier. Il avait bien compris que l'enjeu du pacte qu'il avait scellé était la cohérence du physico-mathématique lui-même. L'obstination avec laquelle il cherchera à construire une Théorie du Champ Unifié le prouve assez.

Si maintenant la rencontre du Physique et du Mathématique est comprise explicitement comme l'acte de traduction qui identifie un rassemblement concret de fibres par transport parallèle et un potentiel vecteur créateur de particules virtuelles, véhicules de l'interaction comme c'est le cas pour la Théorie de Jauge, le malaise s'évanouit.

Cette théorie de Jauge affirme simplement en effet que la constitution d'un espace physico-mathématique est l'identité fondamentale de deux questions et de leurs réponses :

- Qu'est-ce qui fonde un espace de monades mathématiciennes ?

La connexion qui définit des transports virtuels de structures entre fibres

- Qu'est-ce qui fonde un espace de monades physiciennes ?

Le potentiel vecteur créateur de quantas virtuels d'interaction.

Cette identité ; obtenue rappelons-le, par dissolution du "purement géométrique" et du "purement physique", se réfracte ensuite sans le mode du "vraiment géométrique" - (la courbure) et du "vraiment physique" (le champ électromagnétique et ses forces).

Curieusement, la symétrie flagrante de la connexion et du potentiel-vecteur rend maintenant presque tautologique, obligatoire leur identification, beaucoup plus convaincante en tous cas que celle des jumeaux dérivés pourtant plus "concrets" la courbure et le champ.

Il serait pourtant navrant de tuer dans l'oeuf l'élan problématique inouî qui jaillit toujours de la collision de la Matière et de la Géométrie ! (*) Le refus du potentiel-vecteur de se laisser débusquer comme "grandeur" directement observable, indique bien qu'il entend préserver cet élan intact. Par son retrait même, il demeure puissance de cohésion. Nous entendons le dialogue de deux acteurs : la Courbure et le Champ. Abrité dans la coulisse, le Potentiel-connexion dirige la mise en scène du théâtre physico-mathématique. Il ne se livre jamais. La connexion ne figure pas explicitement dans les grands théorèmes de la Géométrie Différentielle. Le potentiel-vecteur n'intervient pas dans les formules de la force électromagnétique. Bref l'immersion dans le donné physique ou le donné géométrique lui répugne. Il y délègue ses concepts dérivés : c'est le secret du Temple de Marbre et du Temple de Bois. C'est probablement parce qu'ils ne se donnent que "voilés" que les Potentiels de Jauge pourront conduire à la Grande Unification des différents champs.

Ceci nous ramène curieusement à .... la Mécanique des Matrices de Heisenberg !

Chez certains physiciens stagne encore (**) une certaine nostalgie pour le vieux déterminisme prédateur, pour le temps où les particules se laissaient saisir par le quadrillage à distance. Ah! Pouvoir par le calcul refermer son poing sur l'électron "qui est là devant moi" par la simple connaissance de sa position vitesse !

(*) Un peu comme ces Mathématiciens stupides qui disent : "Ben voyons, notre Espace habituel n'est qu'un espace vectoriel !".

(**)Les physiciens qui critiquent le soi-disant non-déterminisme de la Mécanique Quantique sont les tristes descendants de ceux qui trouvaient les différentielles "imprécises"!

Pourquoi donc préférer une certitude aussi plate à la richesse de l'Algèbre des Observables qui en dit beaucoup plus sur le jeu expérimental : symétrie, compatibilité de certaines pratiques, règles de jeu de mesures. Les relations d'incertitudes ne sont pas à appréhender comme connaissance insuffisante mais comme le simple refus du physique à se donner par saisie cartésienne. Celle-ci est impuissante à comprendre les rôles, les places, les intrigues du théâtre de la Mécanique Quantique.

Deux épistémologies dérisoires ont souvent accompagné la querelle du Temple de Marbre et du Temple de Bois.

La Mathématique ? Bonne à tout faire ou Temple de Marbre. La Géométrie, deuxième dame des mathématiques (derrière l'Arithmétique) ou simple "formalisme théorique" à digérer pour aborder enfin les "vrais problèmes physiques". Pour un certain positivisme avide de "faits", de "résultats", de "prédictions risquées", il s'agit surtout de "tirer quelque chose" : du "fondatoire" en pressurant la Géométrie, et du "concret", du "réel" en pressurant la Physique.

Cette manière de voir constitue le vulgaire déchet d'une Physique Mathématique conçue comme installation de la Matière docile dans le cadre d'un Espace dompté. La Théorie de Jauge rompt explicitement avec cette tradition en pensant l'émergence simultanée de deux problématiques délicates. Elles se donnent d'un coup précisément dans la mesure où leurs virulences respectives demeurent intactes.

En ce sens, la Théorie de Jauge n'est pas un "modèle" parmi d'autres. Modèle à entendre au sens d'une construction ad hoc soumise ensuite au test de l'expérience. Son existence même fait table rase de la vieille dualité positiviste : Modèle comme jeu "abstrait", "élégant" et Expérience Minotaure. L'impatience qui fabriquerait des Modèles de Théorie de Jauge "en vue" d'une prestation expérimentale impérative ne ferait qu'étouffer la question enfin balbutiée, celle de Leibnitz et Boscovitch ; la constitution d'un langage physico-mathématique du commencement.

Celui-ci serait partie prenante d'un matérialisme tactile et stylé qui raconterait le surgissement d'espaces turbulents, défigurés et aussi les fulgurations inattendues des quantas.

B I B L I O G R A P H I E

G. DELEUZE — Différence et répétition (chapitre sur les différentielles)

M. HEIDEGGER — Qu'est-ce qu'une chose ?

H. WEYL — Temps Espace Matière