SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

JEAN DHOMBRES

L'écriture mathématique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1981, fascicule 10
« L'écriture mathématique », , p. 2-47
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1981___10_A1_0>

L'ECRITURE MATHEMATIQUE

Jean DHOMBRES
Institut de Mathématiques
et d'Informatique
Université de NANTES

Je me dois d'abord d'ouvrir cette discussion par un avertissement de modestie. Tant le vocabulaire que le style de l'écriture mathématique n'ont pas encore fait l'objet d'études approfondies, ni surtout de recensements quantifiés. Les remarques usuelles quant à la forme d'un exposé mathématique proviennent pour la plupart de mathématiciens professionnels, peu au courant de la sémiologie ou modérément préparés à des exégéses scripturaires. Ces auteurs s'avèrent peu intéressés, en général, par une description systématique ou une analyse thématique de l'écriture mathématique, plus tournés qu'ils sont vers les aspects pédagogiques de l'exposé.

Je me dois donc en terre si peu explorée de préciser ma méthode d'approche et surtout, d'entrée de jeu, de dire ce que je ne ferai pas. Je n'entends pas étudier la syntaxe particulière, s'il en est, à l'oeuvre dans les textes mathématiques contemporains. Quelques rares auteurs de lexiques s'essayèrent à cet exercice, des équipes de traduction automatique également. Les problèmes soulevés à partir des problèmes "exotiques" et passionnants du chinois ou du japonais dépassent mon propos. Mais, je n'entends pas non plus chercher à classifier certaines figures de style plus fréquentes que d'autres chez tel ou tel mathématicien : il y a les partisans de la métonymie, ceux de la synecdoque et les tenants enfin de la métaphore. Ces tropes mériteraient une étude, école par école, sinon auteur par auteur. Je n'ai absolument pas les moyens de l'entreprendre ici, mais suis persuadé de l'intérêt d'une telle étude dont il faudrait délimiter le cadre.

Par contre, mon but est d'utiliser la génèse historique du déroulement des mathématiques afin d'analyser quelques traits particuliers de l'écriture symoblique en mathématiques, son rôle parfois moteur, parfois de frein quant à la découverte. Le coeur du problème, ici discuté, paraît donc être celui des "notations". Mais j'espère établir que l'on dépasse vite l'étude du seul problème technique d'une sorte de sténographie (1).

Autrement dit, la question ici posée est de savoir si ce véhicule qu'est l'écrit est neutre en mathématiques. Ne faut-il pas retourner, en fait, l'aphorisme de La Pruyère :

> *"Il me semble que l'on dit les choses encore plus finement qu'on ne peut les écrire".*

LA DIVERSITE DES ECRITURES MATHEMATIQUES

Une mesure liminaire de la pertinence de la question posée -encore que la question reste impertinente aux yeux d'un mathématicien bien élevé- consiste à ouvrir quelques ouvrages mathématiques originaux. Pour le profane, ce qui frappe d'abord, c'est la similarité des pages imprimées. Non pas tant, d'ailleurs, par le fait de notations semblables, mais par l'apparition de signes placés en apposition des phrases du langage courant. Signes de la langue usuelle comme x, A mais souvent signes imprononçables sous les seules ressources des règles usuelles de la prononciation française, comme (A,B) ou f(x,y), ou e^x ou encore signes caractéristiques tels que $\int_a^b f(x)dx$ voire $y'' + \alpha(x)y = z(x)$ etc. Chacun peut faire un effort d'imagination

---

(1) Je vais m'appuyer sur trois textes parus dans Textes et Langages 1, l'accession à l'écriture, Publications de l'Université de Nantes, 1978, textes dus à J.L. GARDIES Leibniz : l'écriture et le calcul P. 24-52.
P. BAILHACHE L'écriture symoblique créatrice de concepts P. 53-66.
J. DHOMBRES L'écriture mathématique : de l'impensé à l'impensable P. 67-103.
Je voudrais aussi signaler l'ouvrage de : G.G. GRANGER Essai d'une Philosophie du Style Paris (1968). A. COLIN ainsi que le texte pratique pour mon propos de : F. CAJORI A history of mathematical notations, Open Court, 1928. Toutefois, la quête érudite de Cajori ne répond pas aux besoins de ce travail car elle constitue surtout une coupe archéologique. Il me faut indiquer aux hispanisants le livre de : J. de LORENSO : Introduccion al estilo matematico, Madrid, Editorial Tecnos, 1971.

et se souvenir des présentations de quelques grands classiques mathématiques, du Traité d'Analyse d'E. Picard à Dimension Theory de H. Walmann et W. Hurewicz, de Algebraïc Topology de S. Lefschetz à l'Intégration dans les groupes topologiques d'A. Weil en passant par le Cours d'Analyse Algébrique de A.L. Cauchy de 1821 ou la Théorie Analytique de la chaleur de J. Fourier de 1822.

Bientôt pourtant, et de la même manière que se rompt l'uniformité des visages en une contrée étrangère, se font jour des différences scriptuaires entre des textes de combinatoire, un texte sur les probabilités, un autre de théorie des nombres, un autre encore de géométrie algébrique ou d'algèbre, un autre enfin d'analyse. Les symboles et leurs variétés, les espacements blancs, la densité du texte par rapport aux formules et outils techniques, la disposition des résultats qui paraissent importants, tout diffère. Peut être convient-il d'illustrer par des exemples qu'il me faut raccourcir au maximum et que je présente sans commentaire.

visages en une contrée étrangère, se font jour des différences scripturaires entre des textes de combinatoire, un texte sur les probabilités, un autre de théorie des nombres, un autre encore de géométrie algébrique ou d'algèbre, un autre enfin d'analyse. Les symboles et leurs variétés, les espacements blancs, la densité du texte par rapport aux formules et outils techniques, la disposition des résultats qui paraissent importants, tout diffère. Peut-être convient-il d'illustrer par des exemples qu'il me faut raccourcir au maximum et que je présente sans commentaire:

AUCHY (1821) Il nous reste à examiner les valeurs singulières des fonctions de plusieurs variables. Quelquefois ces valeurs sont complètement déterminées et indépendantes des relations que l'on pourrait établir entre les variables. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par

$$\alpha,\quad \varepsilon,\quad x,\quad y$$

quatre variables positives, dont les deux premières convergent vers la limite zéro et les deux dernières vers la limite ∞, on reconnaîtra sans peine que les expressions

$$\alpha\varepsilon,\quad xy,\quad \frac{\alpha}{x},\quad \frac{y}{\varepsilon},\quad \alpha^x,\quad x^y$$

ont pour limites respectives

$$0,\quad \infty,\quad 0,\quad \infty,\quad 0,\quad \infty.$$

ZYGMUND (1968) (4·6) THEOREM OF MARCINKIEWICZ. *Let (α_1,β_1) and (α_2,β_2) be any two p... of the triangle*

$$\Delta:\quad 0\leqslant\beta\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

such that $\beta_1\neq\beta_2$. Suppose that a quasi-linear operation $h=Tf$ is simultaneously of ... types $(1/\alpha_1, 1/\beta_1)$ and $(1/\alpha_2, 1/\beta_2)$, with norms M_1 and M_2 respectively. Then for any p... (α,β) with

$$\alpha=(1-t)\alpha_1+t\alpha_2,\quad \beta=(1-t)\beta_1+t\beta_2\quad (0<t<1)$$

the operation T is of strong type $(1/\alpha, 1/\beta)$, and we have

$$\|h\|_{1/\beta}\leqslant KM_1^{1-t}M_2^t\|f\|_{1/\alpha}, \tag{4·7}$$

where $K=K_{t,\kappa,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2}$ is independent of f, and is bounded if $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ are f... and t stays away from 0 and 1.

LEIBNIZ (1674) X. Sçavoir $\pm$ ou $\mp$

10. Et si, à present, nous voulions exprimer AB par BC, et AC, <(regardez la figure du nombre precedent:)> l'equation

$$\left\{\begin{array}{l}AC \infty AB - BC \text{ nous donneroit} \\ AC \infty AB + BC \text{ ....}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}AC + BC \infty AB \\ AC - BC \infty AB\end{array}\right.$$

$$\text{ou}\qquad AC \infty AB \pm BC \text{ ....}\qquad AC \mp BC \infty AB.$$

On voit par là qu'il y a deux signes simples, l'un $\pm$ (c'est-à-dire + ou −) et l'autre $\mp$ (c'est-à-dire − ou +) car le signe qui porte un − au bas du caractere, signifie toujours sa propre negation.

ARCHIMEDE (IIIès av[t] J.C.) Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

Ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται· λέγω ὅτι ἴσος ἐστίν.

POINCARÉ (1834)

Je me réserve

fais ici qu'effleurer, et j'ai hâte d'arriver à des équations se rapprochant davantage de celles qui ont été traitées par M. Appell.

J'envisage alors une série doublement infinie de nombres

$$\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

tels que

$$|a_{n+1}| > |a_n|; \quad \lim |a_n| = \infty \text{ ou } 0, \quad \text{pour } n = +\infty \text{ ou } -\infty,$$

et je forme les équations

$$(2) \qquad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n a_n^p = 0. \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \text{ad inf.}).$$

GALOIS (1830)

C'est surtout dans la théorie des permutations, où l'on a sans cesse besoin de varier la forme des indices, que la considération des racines imaginaires des congruences paraît indispensable. Elle donne un moyen simple et facile de reconnaître dans quel cas une équation primitive est soluble par radicaux, comme je vais essayer d'en donner en deux mots une idée.

Soit une équation algébrique $fx = 0$ de degré p^ν, supposons que les p^ν racines soient désignées par x_k, en donnant à l'indice k les p^ν valeurs déterminées par la congruence $k^{p^\nu} = k$ (mod. p).

LEBESGUE (1910)

Soit $f(x)$ une fonction dont la valeur absolue ne surpasse jamais M : 1° si l'on ne connaît rien de plus sur f, on ne peut assigner aucune limite supérieure aux valeurs absolues des sommes successives de la série de Fourier de f; 2° au contraire, on peut assigner une limite supérieure $M\psi(h)$ à ces valeurs absolues, si l'on sait que f est nulle dans l'intervalle $(x-h, x+h)$ entourant le point considéré.

En effet, pour la somme S_n des $n+1$ premiers termes de la série de Fourier de f, on a, dans la première hypothèse,

$$|S_n| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha-x}{2}}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}f(\alpha)\,d\alpha\right| \le M\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt = M\rho(n);$$

et, dans la seconde hypothèse,

$$|S_n| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}[f(x+2t)+f(x-2t)]\,dt\right| < M\frac{2}{\pi}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t} = M\psi(h).$$

Or, il est évident que la limite $M\rho(n)$ peut être atteinte et qu'elle croît indéfiniment avec n.

HUA LUO GENG (1967)

定理 2. 若 $(m_i, m_j) = 1$ $(i \neq j)$，則

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

有唯一解，mod $m_1 \cdots m_n$.

此可由定理 1 行歸納法證明之.

今述一我國古代對此問題之實際解法. 於 §1 中已述及在孫子算經中有"物不知其數"一問. 解該問題,有次之歌訣：

"三人同行七十稀，
五樹梅花廿一枝，
七子團圓正半月，
除百零五便得知."

程大位　算法統宗 (1593).

意為：以 70 乘用 3 除所得之餘數，21 乘用 5 除所得之餘數，15 乘用 7 除所得之餘數,總加之,然後以 105 之倍數加減之. 如第一節所列之問題之算式為

$$2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233,$$

WEIL (1940) Une différentielle étant pour nous, dans ce fascicule, un symbole de mesure, nous exprimerons symboliquement l'égalité ci-dessus, c'est-à-dire l'invariance de la mesure, par

$$d(sP) = dP.$$

Nous n'aurons à nous occuper dans ce fascicule que d'espaces homogènes. Si en particulier m est une mesure dans l'espace d'un groupe G, elle sera dite *invariante* (ou, plus précisément, invariante à gauche) si l'on a l'une des égalités équivalentes

$$mA = m(sA), \qquad \int f(x)dx = \int f(sx)dx, \qquad d(sx) = dx.$$

LEGENDRE (1823) *Corollaire.* Pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient deux angles égaux chacun à chacun, car alors le troisieme sera égal de part et d'autre, et les deux triangles seront équiangles.

Scholie. Remarquez que, dans les triangles semblables, les côtés homologues sont opposés à des angles égaux; ainsi l'angle ACB étant égal à DEC, le côté AB est homologue à DC; de même AC et DE sont homologues comme étant opposés aux angles égaux ABC, DCE: les côtés homologues étant reconnus, on forme aussitôt les proportions :

AB:DC::AC:DE::BC:CE.

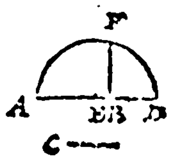
STEVIN (1634) Estant donné deux lignes droites: Trouver leur moyenne proportionelle.

LE DONNÉ. Soient A B & C deux lignes droites.

LE REQVIS. Il nous faut trouver leur moyenne proportionelle.

CONSTRVCTION.

Ie produis A B jusques à D, tellement que B D soit egale à C, je marque puis apres le poinct E au milieu de A D, descris la dessus le demicercle A F D, & tire de B jusques à F en la circonference la ligne B F à angle droit sur A D: Ce qui estant ainsi, je di que B F est la moyenne proportionelle requise entre A B & C, dont la demonstration est faite en la 13 proposition du 6 livre d'Euclide.



Semblable operation par nombres.

Ie mesure les deux lignes données, trouvant je prens A B de 5, C de 3: Ie di puis apres 5 fois 3 est 15, dont la racine quarrée 3 87 (2): Parquoi tiré une ligne si longue, on a la moyenne proportionelle requise: dont la demonstration est manifeste par l'operation. CONCLVSION. Estant donc données deux lignes droites, nous avons trouvé leur moyenne proportionelle, selō le requis.

ARNAULD (1668) Deux raisons sont appellées égales quand toutes les aliquotes pareilles des antecedens sont chacunes également contenües dans chaque consequent.

Pour mieux comprendre cette definition qui est une des plus difficiles de la Geometrie, soient les 4 grandeurs qu'on veut montrer estre proportionnelles *b. c. f. d.*

Soient les aliquotes quelconques de *b*, premier antecedent, appellées *x*, & les aliquotes quelconques du second antecedent pareilles à celles du premier appellées *y*: en sorte que si *x* est ou la [illegible] ou la [illegible] ou la [illegible] du premier antecedent, *y* soit aussi ou la [illegible]

Qui donc prétendrait ne voir en l'écriture mathématique qu'un code unique et indépendant de l'objet décrit dans le règne mathématique (comme l'on parle du règne animal), serait obligé, au risque de se contredire par éparpillement, de restreindre son assertion pour distinguer une écriture propre à la combinatoire, une aux probabilités, une autre à l'algèbre, etc. Ce premier pas dans notre étude est bien facile.

LA PERPÉTUELLE RÉÉCRITURE DES MATHÉMATIQUES

Un deuxième pas, non moins facile mais plus conséquent, est le constat d'un état de perpétuelle réécriture dans lequel se complait la mathématique. Cette science, dans les temps modernes à tout le moins, a la caractéristique unique de se réécrire pratiquement dans son intégralité à chaque génération. Sans pour cela que les versions plus anciennes soient contredites. Bien au contraire, ces versions sont comme phagocytées parce qu'incorporées dans une sorte de spirale ascendante laquelle abandonne, d'un tour sur l'autre, quelques chapitres classés au rang des curiosités vieillottes. Afin de donner à réfléchir, et dans le seul domaine de l'Analyse, voici une liste de traités significatifs depuis 1800 environ :

J.L. LAGRANGE	Théorie des fonctions analytiques	1797
S.F. LACROIX	Traité du calcul différentiel et du calcul intégral	1799
A.L. CAUCHY	Cours d'Analyse algébrique de l'Ecole Royale Polytechnique	1821
B. RIEMANN	Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer Veränderlichen komplexen Grösse	1851
J. DUHAMEL	Eléments de calcul infinitésimal	1860
C. MÉRAY	Nouveau précis d'analyse infinitésimale	1872
U. DINI	Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali	1878
E. PICARD	Traité d'analyse	1893
E.W. HOBSON	The theory of Functions of Real Variables and the Theory of Fourier's series	1907
E. BAIRE	Leçons sur les théories générales de l'analyse	1908
G.H. HARDY	A Course of Pure Mathematics	1908

C. CARATHEODORY	Vorlesungen Über reelle Funktionen		1917
J.E. LITTLEWOOD	The Elements of the Theory of Real Functions		1926
H. HAHN	Reelle Funktionen		1932
N. BOURBAKI	Traité de Mathématiques	à partir de	1939
I.P. NATANSON	Théorie des fonctions d'une variable réelle (en russe)		1950
J. DIEUDONNE	Eléments d'analyse	à partir de	1960

Les manuels cités, s'ils sont entrés aussitôt dans le rayon des "usuels" des bibliothèques universitaires, dépassent de loin le niveau des livres de cours et chacun reprend ab initio la mathématique. On trouverait nettement moins de volumes marquants, à ce niveau général d'exposé, si l'on prenait l'exemple de la physique, de la zoologie ou de la sociologie. En outre, ces ouvrages ne sont pas conçus comme des dictionnaires encyclopédiques, où l'on puiserait au hasard des besoins et des pages, mais bien comme de constructions contraignantes.

Toile de Pénélope sans cesse remise sur le métier, la mathématique apparaît contradictoirement à chaque étape comme négatrice d'histoire et sans lacune. En effet, son écriture se pare d'un caractère tout à la fois définitif et suffisant, ou plutôt, tels ces pans de mur d'où jaillissent des moignons de pierre sur lesquels viendront s'appuyer d'autres murs à venir de même taille, l'écriture mathématique semble ne s'ouvrir que sur la seule poursuite de la logique interne des questions encore pendantes. On argumentarait vainement en cherchant l'origine de la contradiction dans un refus, de fragrance idéaliste, d'inscrire les mathématiques dans le déroulement de l'histoire. Et ce thème porte plus loin la réflexion de J. CAVAILLES, lequel dans on introduction aux Remarques sur la formation de la théorie abstraite des Ensembles (Paris, 1938) parle avec force et finesse de "l'objectivité, fondée mathématiquement, du devenir mathématique". Notre propos actuel reste en deçà d'une telle analyse puisqu'il se contente de constater une contradiction laquelle a besoin de l'écrit pour se manifester.

Ce double aspect, éminement contradictoire, des mathématiques comme forme compacte et achevée, mais toujours tendue par de nouveaux développements qui ne la prolongent pas mais la restructurent en totalité, se révèle d'autant plus fortement qu'il implique un nécessaire passage par l'écriture. Ne serait-ce que pour mieux la nier.

Mais arrêtons-nous à ce point un instant pour illustrer ces considérations d'un exemple.

LES DIVERSES ECRITURES DU CALCUL INTEGRAL

Cet exemple sera celui du calcul intégral. On sait que les auteurs grecs ont inventé une méthode ingénieuse, la méthode qualifiée d'exhaustion au 17è siècle, pour comparer les longueurs courbes aux longueurs rectilignes ou mesurer les aires planes et les volumes, méthode déjà maniée avec élégance au Livre XII d'Euclide et portée à son extension quasiment ultime par Archimède, par exemple dans la Quadrature de la parabole ou la Mesure du Cercle. Au risque d'entrer dans des détails techniques, il convient, pour la clarté du propos, d'expliquer en gros la méthode d'exhaustion.

1) La méthode d'exhaustion

Pour calculer l'aire d'un cercle par exemple, il est d'abord remarqué, à l'aide des résultats géométriques du Livre VI d'Euclide, que le rapport des aires de deux polygones semblables inscrits dans deux cercles est égal à celui du carré des rayons correspondants. Il s'agit ensuite, écririons-nous aujourd'hui, de passer à la limite. Cela ne peut se faire dans le cadre axiomatique euclidien, notamment celui du Livre V, lequel n'envisage jamais de procédé limite. Le raisonnement est alors indirect, c'est-à-dire raisonnement par l'absurde. La contradiction s'impose en utilisant la propriété dite de la quatrième proportionnelle.

Cette propriété énonce qu'à trois grandeurs (μεγεθῶν) données A, B, D, il correspond une quatrième grandeur C telle que le rapport de A à B soit l'égal de celui de C à D. Pour les longeurs rectilignes, une telle propriété provient immédiatement du théorème de Thalès (1 bis) (Livre VI d'Euclide), mais pour les grandeurs plus géné-

---

(1 bis) M. Caveing signale à juste titre que le patronyme de ce théorème n'est fourni par aucune source antique. D'ailleurs je signale ici que la thèse de M. Caveing est enfin disponible chez l'auteur (13 bd. Beaumarchais 75004 Paris).
La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque (vol. I, II et III). Voir aussi du même auteur Zénon d'Elée : prolégomènes aux doctrines du continu, VRIN, Paris, 1982.

rales dont s'occupe le Livre V, la propriété devrait être ajoutée aux axiomes. Euclide omet de le faire explicitement, quoiqu'il utilise fréquemment cette propriété de la quatrième proportionnelle -et de façon cruciale au Livre XII-. (Cette absence chez Euclide soulève d'ailleurs un problème difficile : celui de la preuve dans la mathématique grecque, de l'existence d'un être mathématique).

Soient S et S' les aires de deux cercles de rayons respectifs R et R'. Grâce à la quatrième proportionnelle, on désigne par Σ une aire telle que le rapport de S à Σ soit précisément le rapport de R^2 à R'^2. On procède alors en montrant que tant l'inégalité $\Sigma < S'$ que $\Sigma > S'$ sont également impossibles. Ce qui établit, grâce à la totalité de l'ordre sur les aires, la seule implication restante $\Sigma = S'$

En termes euclidiens, on a prouvé que les aires de deux cercles ont une "raison double" de celle des rayons. Examinons cette preuve :

Pour assurer, par exemple, que $\Sigma < S'$, il est d'abord noté que l'on peut toujours construire un polygone régulier d'aire S'_n , inscrit dans le cercle d'aire S', de sorte que la différence $S' - S'_n$ soit strictement inférieure à la grandeur donnée $S' - \Sigma$ présupposée strictement positive. Cela se fait géométriquement par un algorithme de dichotomie sans difficulté majeure, grâce bien entendu à l'axiome d'Eudoxe-Archimède, lequel assure que deux grandeurs étant données, on peut diviser l'une d'entre elles par un nombre entier suffisamment grand pour que la grandeur obtenue soit strictement inférieure à l'autre grandeur donnée. On déduit donc $\Sigma < S'_n$. Par similitude, on inscrit maintenant dans le cercle d'aire S un polygone d'aire S_n. Géométriquement encore, il est prouvé que le rapport de S_n à S'_n est égal au rapport de R^2 à R'^2 , donc a fortiori au rapport de S à Σ . On échange alors les termes moyens dans la proportion (S, Σ ; S_n , S'_n) échange que l'écriture euclidienne démontre et que l'écriture moderne a digéré sous forme automatique puisque $S/\Sigma = S_n/S'_n$ implique $S/S_n = \Sigma/S'_n$. Or S est strictement supérieure à S_n puisque "le tout est plus grand que la partie". Par suite, la grandeur Σ doit être strictement supérieure à S'_n , ce qui contredit notre hypothèse de départ. On procède de même pour établir l'impossibilité de $\Sigma > S'$.

2) Le style de la méthode d'exhaustion

Voilà le contenu mathématique de la méthode d'exhaustion. Qu'en retenir quant au style ? Essentiellement trois choses qui la caractérisent et qui sont loin d'être mathématiquement neutres.

D'une part, l'usage systématique du raisonnement par l'absurde lequel organise toute la construction syntaxique de la preuve. Une égalité prouvée au terme de deux inégalités impossibles.

D'autre part, un certain type de manipulations des proportions. Je n'ose pas dire que cette manipulation est de nature algébrique, afin de ne pas donner à croire que les notations sont littérales et par combinaisons de signes. Tout se retrouve écrit en langage descriptif et non abrégé, bien que les règles de ces manipulations, règles fournies au Livre V, soient indépendantes de la nature même des grandeurs manipulées. Il y a assurément un "style" des proportions.

Enfin, la trouvaille nécessaire d'un procédé algorithmique, c'est-à-dire un procédé dont les opérations conduisent à une certaine étape se reproduisent sous la même forme afin de réaliser l'étape suivante. Le style porte témoignage de cet automatisme.

Examinons donc Euclide et Archimède stylistiquement à l'oeuvre dans l'application de la méthode d'exhaustion. Nous piocherons volontairement nos exemples dans des textes variés pour tenter de dégager un sentiment d'unité générale : quadrature de la parabole (en abrégé QP)(2), des spirales (en abrégé DS), sur les conoïdes et les sphéroïdes (en abrété CS), la mesure du cercle (en abrégé MC), de la sphère et du cylindre (en abrégé SC) et le Livre XII d'Euclide (en abrégé E_{12}). (On excusera dans ce qui suit un certain réductionnisme pédant de système).

a) L'énoncé du résultat à démontrer vient en premier lieu et fait généralement usage du langage des proportions :

(2) Les citations d'Archimède, en traduction française, sont tirées de la collection Budé : Archimède, Paris (3 vol) 1970, traduction due à Charles Mugler. Celles d'Euclide proviennent de la vénérable traduction de F. Peyrard, laquelle date des tout débuts du 19ème siècle (rééditée chez BLANCHARD, Paris 19). Je reconnais bien volontiers qu'il vaudrait mieux citer le texte grec, en dépit de la fidélité des traductions choisies.
Quelquefois, j'ai noté entre parenthèse l'expresion grecque.

"Les aires de deux cercles ont une raison double de celle des diamètres" (E_{12} Prop 2). Ce langage, lorsque c'est possible, est rendu plus direct encore.

"Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base égale au périmètre du cercle". (MC, Prop 1).

b) Puis, systématiquement, vient la présentation d'un nouvel énoncé équivalent, lequel introduit les notations littérales et la chose précisément à démontrer.

"Soit le segment ΑΔΒΕΓ compris entre une droite et une parabole ... il faut démontrer que K est équivalent au segment ΑΔΒΕΓ" (QP, Prop 24). (Δεικτεον οτι ισον εστι τῳ τμαματι). Cette introduction, parfois peut utiliser l'hypothèse de la quatrième proportionnelle en définissant une grandeur géométrique convenable. Ensuite, vient la présentation du raisonnement par l'absurde, clef de voûte de la démonstration.

"Que le segment ΑΔΒΕΓ soit d'abord, si possible, supérieur à l'aire K" (QP, Prop 24).

"Qu'elle soit d'abord, si possible, inférieure" (DS, Prop24) Le "si possible" traduisant ει δυνατον .

Raisonnement qui introduit un balancement de la construction syntaxique de la démonstration puisque l'autre hypothèse (inférieur ou supérieur) sera également réfutée par contradiction pour ne laisser place qu'à l'égalité. La contradiction, obtenue au bout du compte, est alors dûment rappelée à la coda et terminera l'exposé par un mouvement de renvoi.

"La figure rectiligne est par conséquent plus petite que le triangle E, ce qui est absurde" (οπερ ατοπον) (MC, Prop 1).

ou encore

"Et il est en même temps plus petit, ce qui est impossible" (E_{12} Prop 1) (οπερ εστιν αδυνατον).

La contradiction débouche bien sur l'égalité cherchée.

"Il s'ensuit que le cercle est équivalent au triangle E" (MC, Prop 1). (Ισος αμα ο κυκλος τῳ Ε τριγωνῳ)

c) Le développement lui-même de la preuve de l'un des termes de la contradiction comporte, selon la difficulté, une mise plus ou moins fouillée. On peut distinguer trois étapes, quant à ce développement, chacune pouvant éventuellement être subdivisée en sous-étapes comparables.

La première étape consiste en une mesure géométrique de ce qui est gagné lorsqu'on réalise une division de la figure considérée. Appelons là l'étape de la <u>dichotomie</u>. Ainsi, pour la mesure de l'aire du cercle (E_{12}, Prop 2), la division par deux (la dichotomie : célèbre par les paradoxes de Zénon, διχοτομια) de l'arc d'un polygone régulier inscrit induit un polygone d'un nombre double de côtés. On établit que l'excès de l'aire du cercle sur le nouveau polygone est moindre que la moitié de l'excès de l'aire du cercle sur l'ancien polygone. Ainsi, la dichotomie géométrique effectuée sur la figure se répercute quantitativement en une dichotomie des mesures. Mais en cette répercussion, la dichotomie apparaît sous la forme d'inégalité. Le <u>style utilisé est très fidèle à ce parallélisme de mouvement</u>, quand bien même les figures en jeu sont plus élaborées, par exemple pour la mesure du volume du tronc de cône ou du cylindre pour laquelle on inscrit des pyramides.

"Chacune de ces pyramides est plus grande que la moitié du segment conique correspondant" (E_{12}, Prop 12)

"Le rapport de Θ A à AΛ est supérieur au rapport de la moitié de H Θ à la perpendiculaire abaissée du point A sur H Θ " (DS, Prop 18) .

La phrase explique que l'on enlève plus que la moitié, donc, et c'est ce qui importe, qu'on laisse moins que la moitié. Cette partie de la démonstration peut figurer dans une proposition séparée (Exemple CS, Prop 19) voire être plus compliquée que la simple dichotomie.

"Le triangle ΒΔΓ est inférieur au triple de la somme des trapèzes ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ et du triangle ΞΙΓ, et supérieur au triple de la somme des trapèzes ΤΦ, ΗΘ, ΙΠ et du triangle ΙΟΓ" (QP, Prop 14).

Sur le plan des notations, on notera l'absence de signe sténographique pour indiquer les inégalités, pourtant constamment manipulées (en vue d'établir une égalité d'ailleurs).

L'étape suivante est algorithmique en ce sens qu'on y répète autant de fois que nécessaire l'étape de la dichotomie. Le but est d'obtenir une grandeur géométrique inférieure à une grandeur donnée, celle dont l'existence est précisément l'hypothèse à contredire. Ainsi, si l'on a supposé que $\Sigma > S'$ ou $\Sigma < S'$ (en notations modernes), on introduit soit la grandeur Σ S', soit la grandeur $S' - \Sigma$

"Il nous reste à montrer que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur à la grandeur solide proposée" (CS, Prop 19),

ou encore

"Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales ; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès de l'aire du cercle ΕΖΗ Θ sur la surface Σ " (E_{12}, Prop 2).

Le noeud justificatif de la démonstration est la propriété que l'on trouve énoncée à la 1ère proposition du Livre X d'Euclide, laquelle proposition, dans ce livre, introduit un critère d'incommensurabilité (Prop 2)

"Deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées".

Chez Archimède, l'application est énoncée sous forme d'un corollaire (πορισμα) :

"Car en retranchant toujours une aire qui, en vertu de cette proposition, est supérieure à la moitié, il est évident qu'en continuant ainsi à diminuer les segments restants, nous les rendrons inférieurs à toute aire donnée". (QP, corollaire situé avant la Prop 21).

Cette propriété, cruciale pour la validité de la méthode d'exhaustion, est chez Euclide (E_{10}, Prop 1) de démonstration directe(4) par utilisation de la définition même des grandeurs susceptibles d'être comparées selon les méthodes du livre V (Définition 5 de la traduction de Peyrard et que je cite ensuite en grec).

"Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser".

|Λογον εχειν προς αλληλα μεγεθη λεγεται α δυναται πολλαπλασιαζομεναα αλληλων υπερεχειν|

Archimède insista, quant à lui, sur la qualité opératoire de cette définition dans le cadre de la méthode d'exhaustion (5).

"Parmi ces propositions, je range aussi un postulat énoncé déjà dans les livres publiés précédemment, à savoir qu'il soit possible que la différence, dont la plus grande grandeur dépasse la plus petite parmi les lignes inégales et les aires inégales, ajoutée à elle-même dépasse toute grandeur donnée parmi celles qui sont comparables entre elles" (DS, envoi du manuscrit à Dosithée).

(4) Que le raisonnement soit directe me paraît important. En résumant Euclide, on doit montrer que si deux grandeurs inégales AB et Γ sont données, et si AB>Γ, en retranchant de AB plus que sa moitié et du reste obtenu plus que sa moitié et ainsi de suite, on aboutit finalement à une grandeur inférieure à Γ. Que le raisonnement soit direct signifie qu'il convient de préciser cet "ainsi de suite", c'est-à-dire le nombre d'étapes à effectuer. Or ceci est facile. On ajoute, en effet, autant de fois que nécessaire Γ à lui-même pour dépasser AB. Le nombre de fois en jeu est précisément le nombre d'étapes nécessaires à la dichotomie.

(5) Voir aussi QP (envoi à Dosithée) où il est question de l'utilisation d'un "lemme" semblable et SC, postulat 5 (Λαμ ανω δε ταυτα) . On peut en référer à des commentaires dans W.R. KNORR : The evolution of the euclidean elements, 1975 et W.R. KNORR : Archimedes and the Elements : Proposal for a revised chronological ordering of the Archimede an corpus, Arch. Hist. Exact Sc. 19. p. 211-250 (1978) .

Le style de cette étape algorithmique, chez Euclide comme chez Archimède joue avec naturel de "l'ainsi de suite", lequel "ainsi de suite" n'a point place dans les notations écrites. L'idée est algorithmique, mais le style de l'écriture ne l'est pas. Deux ou trois applications de l'algorithme suffisent au niveau de l'écriture. L'exemple de la Proposition 1 du Livre X d'Euclide est typique (voir la note 4). La grandeur Γ est ajoutée un certain nombre de fois à elle-même. On se contente de trois pour les notations effectivement écrites : ΔE sera la somme de ΔZ, ZH et HE toutes égales à Γ. Le lecteur, par son imagination, fortifiée par la pensée mathématique dûment explicitée selon un "ainsi de suite", supplée à la faiblesse de l'écriture.

La dernière étape pour la preuve de la contradiction consiste en une utilisation d'une combinatoire algébrique directement liée aux proportions et dont la justification "abstraite" est entièrement contenue dans le livre V d'Euclide. Cette manipulation combinatoire reste généralement simple chez Euclide, mais devient fort habile chez Archimède, bien proche quelquefois du casse-tête. En effet, et là réside le hic, la manipulation ne dispose d'aucune notation systématique quant aux proportions : tout est dit par des phrases, souvent répétitives. L'exemple le plus fréquent et le plus simple est l'utilisation de la proposition 16 de ce livre V, laquelle est une règle de calcul.

"Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation"

dont la glose euclidienne donne la signification :

"Soient les autre grandeurs proportionnelles, A, B, Γ, Δ c'est-à-dire que A soit à B comme Γ est à Δ ; je dis que ces grandeurs sont proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que A est à Γ comme B est à Δ ".

Rigueur du balancement de la phrase qui correspond à la permutation dont il est mathématiquement question. Un balancement constamment répété et qui met en jeu les différentes grandeurs construites. Celles-ci ne sont pas toujours repérées par une seule lettre, mais par autant de lettres que ce qui est nécessité par la construction d'origine géométrique de la grandeur en jeu : grandeur Σ certes, mais aussi ligne AB, cercle ΑΒΓΔ, polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ etc. Et le balancement sera tel que le nombre des lettres utilisées se correspondra de part et d'autre de la proportion : un parti-pris évidemment esthétique, c'est-à-dire stylistique. Parti pris très simple comme :

E_{12} : " Σ' est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à Γ ", mais parti pris déjà plus fastidieux malgré son rythme balancé comme dans SC, Prop 18.

"Or comme ΑΔ est à ΔΕ, ainsi le rhombe ΑΒΓΔ est au cône ΒΓΔ, et comme ΝΟ est à ΔΕ, ainsi, le cône ΜΝΞ est au cône ΒΓΔ, puisque leurs bases sont égales ; mais le rapport du cône ΜΝΞ au cône ΒΓΔ est égal au rapport du rhombe ΑΒΓΔ au cône ΒΓΔ ; le cône ΜΝΞ est donc équivalent au rhombe ΑΒΓΔ"

Nous ne pouvons entrer ici dans plus de détail, mais on conviendra que cette dernière étape est la plus pénible à suivre pour un lecteur moderne, lequel ne s'y retrouve qu'en utilisant... les notations modernes. Preuve que nous avons oublié, certes par dépassement, le style des proportions.

L'analyse un peu longue à laquelle nous venons de nous livrer, outre qu'elle établit stylistiquement le règne de la méthode d'exhaustion, suggère également quelques remarques quant au rôle du style en mathématique. Qu'il nous suffise de souligner l'étroite connivence entre la démarche mathématique et son écriture et d'apprécier le soulagement qu'apporte un style rigoureusement construit dans ses balancements rythmés à une mémoire mise en péril par une démonstration trop longue.

3) Le style intermédiaire de la méthode des indivisibles

Pour innover par rapport à la force impérieuse de l'écriture euclidienne, constamment balisée par une justification pas à pas, il faut beaucoup d'audace. Et courir des risques. Quoique dans un écrit mal diffusé et redécouvert au XXème siècle (6), Archimède

(6) La Méthode d'Archimède relative aux propositions mécaniques, dont l'unique manuscrit actuel fut trouvé sur un palimpseste en 1899 au Monastère du Saint-Sépulcre de Jérusalem (Codex rescriptus Metochii Constantinopolitani S. Sepulchri monsaterii Hierosolymitani 355, saec. X), fut déchiffré par le danois J.Y. Heiberg en 1906 et publié dans son édition critique de 1913 à 1915.

élabora une autre technique relative au calcul des aires ou des volumes, technique d'attaque directe cette fois, par décomposition en petits éléments et sommation. Ce procédé mêle le vocabulaire des proportions à des écritures qui sont celles des pionniers du calcul infinitésimal, de Descartes à Cavalieri, de Barrow à Grégoire de Saint Vincent. Archimède prend bien soin de dire que sa méthode "mécanique", ou expérimentale si le mot existait en grec, facilite le raisonnement mathématique ultérieure en suggérant le résultat, mais ne saurait se substituer à lui. Restriction essentielle, plus ou moins reniée au long des siècles, mais qui harcèlera suffisamment les consciences pour que surgissent force traités justificatifs sur le calcul différentiel, lesquels traités seront admirablement résumés sous forme syncrétique dans les Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal de Lazare Carnot, ou sous forme plus didactique par S.F. Lacroix dans son Traité de calcul différentiel et intégral, juste avant la mise en forme définitive par A.L. Cauchy vers 1821(7).

4) Le style classique du calcul intégral

La pertinence du style classique, par opposition à la méthode des Anciens, est peut être la mieux perceptible là où elle s'ébauche à grand peine. Je veux dire chez B. Pascal, et tout particulièrement dans son Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets, et son Traité des sinus du quart de cercle (1658), bien plus d'ailleurs que dans les différents autres traités relatifs à la cycloïde (8). Malgré son refus d'utiliser le symbolisme opératoire de

(7) La "rigueur" de Cauchy vient de faire l'objet d'un livre de J.V. Grabiner : The origins of Cauchy's rigorous Calculus M.I.T. Press 1981
En ce qui concerne l'histoire proprement dite du calcul différentiel et intégral, on peut se reporter avec avantage aux ouvrages suivants :
C.B. Boyer : History of the Calculus New York Dover 1959 (2è Ed.)
M.E. Baron : The origins of the infinitesimal calculus London Pergamon Press 1969.
et C.H. Edwards Jr : The historical development of the calculus Springer Verlag 1979.
De toute façon, même après Cauchy, il faudra encore préciser le statut des nombres réels. Jusque vers 1870, malgré quelques difficultés admirablement mises en valeur par Bolzano, ce statut reste celui des λογοι d'Eudoxe. A cette date, enfin, apparaissent simultanément les mises en forme de R. Dedekind, G. Cantor, Ch. Méray, K. Weierstrass. On peut se reporter, entre autres à : J. Dhombres : Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire Collection Cédic, F. Nathan, 1978.

(8) Pour ce paragraphe, on se réfèrera à :
P. Bosmans : La notion des indivisibles chez Pascal Archéion 1923, P. 369-379.
et aux articles de F. Russo (Pascal et l'analyse infinitésimale), et de P. Costabel (essai sur les secrets des Traités de la Roulette), parus dans L'oeuvre Scientifique de Pascal, PUF, 1964.

l'algèbre, nouvellement mise à la mode par F. Viète, S. Stevin ou R. Descartes, Pascal, à partir d'un objet géométrique, l'onglet, obtient et énonce des résultats concernant a priori la transformation d'intégrales définies. Géométriquement, ces égalités sont obtenues au terme de deux modes distincts de balagyage du même solide, l'onglet (9). Mais que reste-t-il, au bout du compte, de l'origine géométrique des égalités ? Celles-ci, vraies indépendamment de la forme particulière de l'onglet, ont évidemment valeur opératoire. Ainsi la proposition II du Traité, que nous choisissons pour sa simplicité (cf Oeuvres Complètes, La Pléiade, P. 249).

"La somme des carrés des ordonnées à la base est double des rectangles compris de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance à la base"

ce que nous écrivons en langage moderne selon

$$2\int_o^b xy\,dy = \int_o^a y^2\,dx$$

Le style utilisé par Pascal reflète bien la généralité du résultat obtenu et diffère d'autant des résultats de la méthode d'exhaustion applicables seulement à telle ou telle figure géométrique. Dès lors, on pourra en déduire a priori, par manipulations formelles, d'autres résultats plus élaborés et qu'une mise en scène plus ingénieuse saura établie. Le caractère universel est très net pour Pascal (cf Lettre de Monsieur Dettonville à Monsieur de Carcavi, O.C. P. 245) :

"Or, pour arriver à ces connaissances sur le sujet des portions de la roulette en particulier, je donnerai des propositions universelles pour connaître toutes ces choses en toutes sortes de trilignes généralement".

---

(9) L'onglet est défini comme le solide délimité par l'intersection d'un dièdre d'arête AC et d'angle 45° et d'un cylindre droit de base ABC où AC et AB sont deux segments perpendiculaires et C est joint à B par une courbe (fonction strictement monotone chez Pascal). Le balayage du volume peut s'effectuer suivant des plans verticaux parallèles à AC ou parallèles à AB .

Dans les démonstrations, même rupture par rapport au style ancien, à savoir l'abandon autant que faire se peut de la méthode de raisonnement par l'absurde (10). L'abandon dès lors d'un balancement rythmé du texte, ce qui a pour conséquence de réduire la longueur des démonstrations. Le mistigri pour lors est passé au niveau des définitions, de celle, par exemple, de la "somme des ordonnées" car c'est bien là où se niche le problème des indivisibles, des sommes infinies de quantités infinitésimales etc.

On comprend dès lors lors la longueur chez Pascal des avertissements précisément destinés à éclairer ces définitions. Et voici que s'inaugure, phénomène dont je veux signaler la nouveauté, l'hétérogénéïté de l'écriture mathématique, hétérogénéïté qui ne prendra fin que chez Cauchy, plus d'un siècle et demi plus tard.

D'une part, il y a les introductions, les avertissements, les explications, où se règlent, du moins tentent de se régler, les problèmes ontologiques des différentielles, des quantités infinitésimales etc. Le style, en ces parties, comme le fera acerbement remarquer l'évêque G. Berkeley, ne diffère en rien du style méthaphysique ou théologique le plus traditionnel par questions, réponses, objections, surtout par des approches successives d'une même entité selon des définitions différentes, par multiplication des démonstrations plus ou moins convaincantes dans le but d'emporter l'assentiment, par une avalanche de raisons, par utilisation du raisonnement indirect etc.

A l'autre bout, se trouve le corpus des démonstrations, désormais directes, quasiment indépendantes des raisons employées pour justifier les définitions. On y élabore des règles débarrassées de toute justification ontologique. De fait, jointes à la définition du triangle caractéristique, et de quelques autres, ces définitions moyennant le génie de Newton et de Leibniz, permettront la réalisation

---

(10) Non que Pascal nie l'intérêt d'un tel raisonnement. Il médite, au contraire de Descartes, sur son intérêt et l'intègre dans une vision métaphysique plus large :

"*C'est une maladie naturelle à l'homme de croire qu'il possède la vérité directement ; et de là vient qu'il est toujours disposé à nier tout ce qui lui est incompréhensible, au lieu qu'en effet, il ne connaît naturellement que le mensonge, et qu'il ne doit prendre pour véritable que les choses dont le contraire lui paraît faux*" (De l'esprit géométrique OC, P. 585).

d'une écriture unique, celle du calcul différentiel et intégral. Calcul généré par un automatisme, dont l'égalité intégrale de Pascal déjà fournie suggère un premier aperçu. Ecriture dont Leibniz donne les règles syntaxiques essentielles, d'où sont pratiquement éliminées les inégalités (en opposition à la méthode d'exhaustion) et où prédominent les procédures de sommation :

dérivation d'un produit $d(fg) = fdg + gdf$

intégration par parties $\int_a^b f(x)dg(x) = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$

opérations contraires $d\int f = f$

changement de variable $\int_a^b f(\phi(x)\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt$ lequel justifie l'emploi de dx sous le signe intégral. etc .

Newton enrichit ces règles de l'utilisation systématique de la formule du binôme, ouvrantl'ère des séries infinies

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots$$

On comprend que l'exposé des définitions fasse usage à la fin du 17ème siècle, et pendant tout le 18ème siècle, d'un style bien peu euclidien, variable d'ailleurs d'un auteur à l'autre.

Par contre, la démonstration des règles, ce que j'appelle la deuxième phase, une fois ces définitions placées, présente une écriture mathématique dont la forme, progressivement, va abandonner le style euclidien strict pour adopter une forme nettement plus algébrique et devenir un style classique. Et cette nouvelle écriture prédomine le 18ème siècle malgré les obscurités, malgré les faiblesses du soutainement théorique. Toutefois, et c'est notable, l'écriture de la méthode d'exhaustion intervient toujours comme un lointain rassurant, une sorte de divinité propice, qui fonderait et justifierait la nouvelle écriture. Pascal est le seul à tenter de remonter jusqu'à la première écriture, *"Celle des Anciens, afin que la chose put être ferme et sans dispute"*. Pour tous les autres à suivre, une sorte d'attitude fidéiste dispense alors de réécrire l'ensemble des mathématiques en un style unique dépassant les auteurs grecs et évitant les méthodes douteuses des indivisibles et consorts.

Pascal d'ailleurs, pour cette deuxième phase, reste nettement euclidien : un énoncé en langue commune, une reprise mathématique de l'énoncé permettant de placer les notations, l'emploi systématique des proportions et du langage géométrique malgré de nettes procédures arithmétiques ou combinatoires. Le phrasé de la démonstration est modulé par une apposition marquant chaque proposition. Comme exemple, prenons la proposition VII du Traité des sinus du quart de cercle où je souligne volontairement les mots d'articulation stylistique (11).

"Car, la somme triangulaire des sinus DI, à commencer par DO, n'est autre chose par la définition, que la simple somme de tous les DI compris entre les extrêmes BA, DO, plus la somme de tous les DI, excepté le premier PO, c'est-à-dire compris entre le second QT et AB, et ainsi de suite. Mais, la somme des sinus compris entre DO et BA, est égale à OA ou PU en AB ; et, la somme des sinus compris entre DT et AB est de même égale au rectangle TA ou QS en AB, et ainsi toujours. Donc, la somme triangulaire des sinus DI, à commencer par DO, est égale à la somme des sinus PU, QS, DS, etc, multipliées par AB. Cqfd".

Prédominence encore chez Pascal, mais destinée à disparaître, du langage des proportions et donc du style particulier de la phrase lié à ses proportions (cf la démonstration du lemme 1 du Traité général de roulette (12).

"Car ces arcs sont entre eux en raison composée de la raison des rayons FC, GC, et de la raison des angles NFC, DGC. Or, un de ces angles est double de l'autre, et réciproquement un des rayons est double de l'autre, et ainsi la raison composée de ces deux raisons, dont l'une est double et l'autre sous-double, est la raison d'égalité".

---

(11) OC p. 280

(12) OC p. 307

Peu à peu, le mouvement de la phrase sera haché par la présence de formules qui concentreront tout l'intérêt au lieu de ces descriptions des opérations portant sur les proportions. L'élégance du style va se trouver déplacée vers la lisibilité et le balancement équilibré de ces formules, leur agencement dans la phrase même : un processus parfaitement maîtrisé chez Cauchy. Une nouvelle fois, le style mathmématique s'est adapté à la description fidèle des opérations en jeu.

5) Le style moderne

Il est vraiment fondé par Cauchy, sensible à la suite du puriste J.L. Lagrange, aux dangers d'un formalisme mal justifié dont nous avons dégagé les linéaments stylistiques. Et Cauchy de revenir "*à la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre*"(13). Et le style de suivre ce retour à la pratique euclidienne : l'essentiel me semble l'homogénéité recouvrée entre l'énoncé des définitions, celui des théorèmes et les démonstrations. Subsiste chez Cauchy la préférence du raisonnement direct, et le rôle désormais essentiel de la formule (14) Retour aussi, mais cette fois avec la notation ad hoc aux inégalités comme technique de démonstration d'une égalité. Typique est la démonstration de $\lim\limits_{\alpha \to o} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ (15). Cauchy a d'abord noté la parité de $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, donc ne considère que le cas où α reçoit une valeur positive très petite.

---

(13) Cours d'Analyse, 1821, introduction p. II

(14) Le retour en force du raisonnement par l'absurde en calcul intégral va être dû principalement à Cantor et à ses méthodes de démonstration topologiques telles que digérées par H. Lebesgue. Faute de place, nous ne pouvons entrer dans une telle analyse ici. On se contentera de signaler deux ouvrages fort utiles:

T. Hawkins Lebesgue's Theory of integration, Chelsea 1970 et J.W. Dauben, G. Cantor, His mathematics and philosophy of the infinite, Harvard U. Press 1979.

(15) Cours d'Analyse, chapitre II, p. 66

Cela posé, concevons que l'arc α reçoive une valeur positive très petite. La corde de l'arc double 2α étant représentée par $2\sin\alpha$, on aura évidemment $2\alpha > 2\sin\alpha$ et, par suite,

$$\alpha > \sin\alpha.$$

De plus, la somme des tangentes menées aux extrémités de l'arc 2α étant représentée par $2\tan\alpha$, et formant une portion de polygone qui enveloppe cet arc, on aura encore $2\tan\alpha > 2\alpha$ et, par conséquent,

$$\tan\alpha > \alpha.$$

En réunissant les deux formules qu'on vient d'établir, on trouvera

$$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha;$$

puis, en remettant pour $\tan\alpha$ sa valeur,

$$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

et, par suite,

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha.$$

Or, tandis que α diminue, $\cos\alpha$ converge vers la limite 1 : il en sera donc de même *a fortiori* du rapport $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ toujours compris entre 1 et $\cos\alpha$, en sorte qu'on aura

$$\lim\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

IMPENSE ET IMPENSABLE DIALECTIQUE DE L'ECRITURE MATHEMATIQUE

Après cette longue diversion sur quelques écritures du calcul intégral, nous pouvons poursuivre et accéder à un troisième pas, par lequel nous chercherions à délimiter le rôle de l'écriture dans la construction historique d'aspect contradictoire des mathématiques, troisième pas qui peut s'avérer être un faux pas si l'on n'y prend garde.

Il s'agirait d'affirmer que l'écriture permet des audaces que la pensée ne s'autorise pas. En quelque sorte, que l'on pourrait écrire l'impensable. Immanquablement, on songe à l'irruption des "irrationnels" entre l'âge de Pythagore et celui d'Eudoxe et de Théétète. Et cet exemple historique est fructueux pour préciser notre propos (16).

Une certaine tradition présente l'affaire de la façon suivante : Pythagore, dans sa volonté de réduire le Monde à quelques éléments simples, est conduit à supposer que l'architectonique de celui-ci est numérique et qu'en particulier tout segment de droite est composé d'un nombre fini d'éléments, disons de points. Si p est le nombre de points du côté d'un carré et q le nombre de points de sa diagonale, il surgit une contradiction dès lors qu'on utilise précisément le théorème de Pythagore. Puisqu'en effet $2\,p^2 = q^2$, on déduit sans peine, en employant les mots d'Aristote, pour qui cette démonstration est devenue une trivialité, qu'"un nombre impair serait égal au pair"(17). La construction pythagoricienne s'effondre et pour bien marquer le désarroi, le divulgueur de la découverte, un malheureux Hippase de Métaponte, serait englouti dans les flots (18). Nous gardons trace de cette expérience douloureuse dans le vocabulaire : irrationnel, αλεγος voire αρρητος ce qui n'est pas énonçable.

---

(16) Il ne peut être question ici de reprendre en détail la "crise des irrationnels". On se reportera entre autres à un article de J.T. Desanti dans l'ouvrage <u>Logique et connaissance scientifique</u>, sous la direction de J. Piaget (Collection la Pleiade, Paris 1967) et pour une étude plus mathématique au texte déjà cité, J. Dhombres, <u>Etude épistémologique et historique des idées de nombre, de mesure et de continu</u>. Voir aussi le texte cité de M. Caveing à la note (1 bis).

(17) Aristote, <u>Analytiques postérieures</u>, 1 23

(18) Rapporté par Plutarque

Sans qu'il soit nécessaire d'en référer aux cosmogonies phthagoriciennes (19) il est certain que nombres entiers et fractionnaires furent manipulés avec une certaine dextérité par les astronomes babyloniens ou les scribes égyptiens. Ces nombres servent, entre autres, à mesurer des longueurs et l'antiquité égyptienne et babylonienne atteste l'utilisation des rapports de nombres, quand bien mêle la pratique numérique hésiterait à envisager des fractions dans lesquelles numérateurs et dénominateurs seraient grands. Plutôt que de dire que les seuls nombres connus en ces temps furent les nombres aujourd'hui qualifiés de rationnels (nombres entiers ou fractionnaires), il vaudrait mieux préciser qu'à deux nombres, servant éventuellement à mesurer des longueurs, il paraissait acquis que l'on pouvait toujours appliquer le procédé de l'anthyphérèse, c'est-à-dire le calcul du plus grand commun diviseur, procédé algorithmique qui aurait la vertu de se terminer toujours au bout d'un nombre fini d'étapes (20).

Or, et ce sont là sans doute les premières preuves d'irrationalité, l'anthyphérèse lorsqu'appliquée géométriquement au côté d'un carré et à sa diagonale, ne se termine pas, allant se répétant indéfiniment.

Convenablement agencé, le procédé fournit en fait une approximation numérique de plus en plus satisfaisante pour $\sqrt{2}$, approximation qu'utilisera le courant numéricien antique, certes constamment brimé par le géométrisme et le sens axiomatique euclidien.

Mais ce procédé introduit l'indéfini là où ne figurent que des données claires et finies, ce qui n'est pas tolérable. En

---

(19) Et il convient justement d'éviter de telles références. Car, à bien y réfléchir, quel scandale y aurait-il à découvrir une contradiction au sein de la cosmogonie pythagoricienne que le bon sens commun peut qualifier de simpliste ? Le but des lignes qui suivent est bien de montrer que la "crise des nombres irrationnels" est d'abord une crise interne au sein de la mathématique. Mais une crise dont le rejaillissement philosophique est d'autant plus conséquent que Platon attribuait au raisonnement mathématique -et plus encore aux objets mathématiques- une place de choix. Non pas la première, car en mathématiques, "l'esprit est obligé d'user d'hypothèses, sans aller au principe, parce qu'il ne peut s'élever au-dessus des hypothèses". (La République, Livre VI).

(20) L'anthyphérèse décrite au Livre VII d'Euclide apparaît comme un procédé de calcul fort ancien. Il est d'ailleurs utile, pour donner quelque solidité historique à notre thèse, de rappeler que le Livre X d'Euclide consacré aux irrationnels, lequel paraît avoir précédé le Livre V, commence précisément par disposer d'un critère d'incommensurabilité, à savoir l'impossibilité de terminer l'anthyphérèse (Livre X, Proposition 2).

d'autres mots, si l'irrationnel est calculable, aussi finement qu'on le désire - il ne serait selon le vocabulaire aristotélicien qu'un infini virtuel (en puissance) - il n'est pourtant pas possible de l'écrire en totalité - selon un infini en acte (21).

Et voilà donc un soi-disant impensable -dûment pensé- et non écrit . C.q.f.d.

Mais alors, pourquoi utiliser ce qualificatif d'impensable ? C'est le poids de la tradition d'une part, mais d'autre part cela nous permet une opposition avec le qualificatif "impensé". Voilà qui mérite une explication que nous débuterons en reprenant l'exemple même des incommensurables.

On sait qu'Eudoxe vraisemblablement, et dans cet extraordinaire mouvement dont se ressentent encore certains dialogues de Platon, élabora une théorie des rapports, des proportions précisément, pour pouvoir écrire comme tels les irrationnels. C'est la théorie magistrale des λογι laquelle est conservée au Livre V des Eléments d'Euclide. Revenant, en effet, à la racine même de la contradiction, c'est-à-dire la mesure des grandeurs, par exemple celle des longueurs, Eudoxe extrait une axiomatique simple lui permettant de définir les rapports, aussi bien ceux des grandeurs commensurables entre elles que des grandeurs qui ne le sont pas. De définir de tels rapports, donc de les écrire. C'est ce qui est notamment fait au Livre XII où l'on écrit explicitement un rapport non rationnel, qu'aujourd'hui et depuis le XVIIIème siècle l'on note par la lettre π . Archimède, quant à lui, jonglera avec ces écritures pour établir que ce rapport π, s'il désigne le rapport de l'aire d'un cercle au carré

---

(21) En ce qui concerne les nombres entiers, ou plutôt leur ensemble Aristote indique qu'il ne s'agit que d'un infini naturel : "C'est parce que la représentation ne l'épuise pas que le nombre (à αριθμοξ) parait être infini (Physique, Livre III). Par le calcul de notre $\sqrt{50}$, à partir d'une remarque de Platon $5^2.2 = 7^2+1$, par exemple, l'anthyphérèse non terminable met en cause l'existence même d'un rapport de la diagonale au côté (α-λογοξ). Eudoxe fournit ce qu'il faut pour définir un rapport, mais il distingue ensuite le rapport exprimable (ρητοξ) du rapport inexprimable (αρρητξ), mais rapport tout aussi bien défini (et qualifié par trudoxe, ayant discipliné la terminologie, d' αλογοξ). modernes, il ne faut pas négliger l'anthyphérèse et réduire le travail d'Eudoxe à une simple apposition entre le développement décimal illimité périodique d'un nombre fractionnaire et celui non juridique . Ces considérations techniques sont bien postérieures à la mathématique hellène.

Au XVIème siècle, une des figures de proue de l'Ecole Allemande, Michel Stiffel, indiquera encore dans son Arithmetica Integra : "Sicut ingitur infinitus numerus, non est numerus ; sic irrationalis numerus non est verus numerus, quum laterat sub quadam "infinitatis nebula".

de son rayon, convient encore pour le rapport du périmètre au diamètre ou de la surface d'une sphère au carré du diamètre. Le symbole écrit est manié sans difficulté.

Et pourtant ces λογοι ne bénéficient pas du statut à part entière du nombre et le texte euclidien hésite à se prononcer clairement. La difficulté majeure est à chercher dans le fait que les opérations élémentaires, addition et multiplication, ne sont pas envisagées en toute généralité pour les λογοι . Comme le dira beaucoup plus tard P. Tannery, "*le plus insupporable dans les mathématiques ce sont les nombres irrationnels. Leur introduction dans l'arithmétique est un véritable scandale*" et de préciser que la difficulté c'est bien d'écrire $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, et non la simple considération de $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$. Techniquement les λογοι ne sont pas pensés comme éléments d'un corps de nombres et c'est en ce sens seulement qu'ils sont "impensables" . Comme l'on voit, c'est dans sa délicate incorporation à un processus opératoire, donc aussi dans l'absence de maîtrise d'une globalisation que se manifeste la spécificité d'un "impensable". Si l'on veut encore, et à une époque donnée, "l'impensable" qualifie un état d'un concept, clairement pensé et écrit, mais intervenant dans un style parallèle au style mathématique en vigueur et donc non encore amalgamé au style "classique". Cet amagalme même, lorsqu'il se réalise, détruit le style "classique", lequel tombe en désuétude, mais modifie tout autant le style "parallèle". La mathématique est alors réécrite et un nouveau style "classique" s'instaure.

Un exemple éclatant d'un tel style nouveau nous est fourni par Simon Stevin notamment sans son Traité des incommensurables grandeurs : "*Qu'il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables ou sourds*" (dans l'édition française de 1634).

Stévin a saisi la possibilité d'inscrire tous les nombres réels dans un cadre opératoire unique. Ainsi ne se soucie-t-il plus des seuls irrationnels décrits au Livre X d'Euclide, mais "*des millénomies lignes et de leurs racines de racines jusques en infini*". Est-il besoin d'ajouter que ce triomphe des virtualités de l'écrit ne s'obtient qu'après des siècles de tâtonnements scripturaires, des Indiens aux Arabes jusqu'à un Léonard de Pise par exemple et à l'Ecole Allemande, Italienne ou Française de la Renaissance. Ce style nouveau est explicitement repris par R. Descartes dans sa Géométrie de 1637 sans toutefois s'en référer à Stevin, mais à Viète (*"Je commence là ou Viète s'est arrêté"* précisera Descartes).

Cependant, une remarque s'impose si l'on veut bien suivre notre thèse. C'est que l'éventuel "impensable" se manifeste comme un stade second , celui où un concept nouveau est déjà parçu, analysé, maîtrisé et écrit, mais non encore intégré dans un faisceau logico-déductif au reste du corpus mathématique. On réservera alors le vocable "impensé" au stade premier -même s'il y va de quelques impropriétés de langage. Plus exactement, lors de la plus ou moins lente maturation d'un concept nouveau, il se peut que le concept non encore logiquement pensé fasse en quelque sorte son apparition dans l'écriture, laquelle apparaît donc, pour le lecteur actuel à tout le moins, comme un support quasi prémonitoire de concepts non encore élaborés. Historiquement, un tel processus a souvent permis d'effectuer des opérations sur l'impensé -au sens que nous venons de préciser (22).

Nous sommes beaucoup plus familiarisés avec le processus inverse, que je qualifie d'écriture opératoire, celui de la manifestation opératoire et dynamique d'un concept par une écriture ad hoc. On le voit souvent par prétérition. Un concept général mis en évidence peut rester sous le boisseau, faute d'une écriture capable d'en résumer dynamiquement toutes les propriétés et n'apparaître qu'au terme d'une prise de conscience. Il me semble que les résultats de Pascal sur l'onglet et les sinus du quart de cercle ressortent typiquement de cette explication. Le retour voulu par Pascal au langage géométrique le plus usuel escamote la nécessaire création d'un style nouveau adapté aux découvertes effectuées, dont l'originalité est pourtant consciente chez Pascal. Le témoignage de Leibniz fortifie cette interprétation. C'est au terme d'un mûrissement sans doute plus long qu'il ne l'avoue (de 1673 à 1676 vraisemblablement), que Leibniz lisant Pascal trouve enfin *"une lumière que l'auteur n'avait point vue"*, une similitude entre le triangle caractéristique infinitésimal et un triangle formé à partir de la tangente, de la normale et de l'axe des abscisses. Similitude restée chez Pascal au niveau d'un lemme relatif au cercle, et selon la forte expression de L. Brunschwicg (23), *"un*

---

(22) On pourrait reprendre, dans ce cadre, et à titre d'illustration, bien des exemples fournis dans F. Rostand. Souci d'exactitude et scrupules des mathématiques VRIN, Paris, 1960

(23) Les étapes de la philosophie mathématique (p.173) Réédition E Blanchard 1972.

moment de la preuve qui ne survit pas à l'achèvement de la démonstration". Mais l'essentiel est que cette similitude au coeur du langage euclidien des proportions, débouche sur une écriture nouvelle liant les éléments différentiels dy, dx aux éléments finis, y, x, permettant ainsi le fructueux va et vient du différentiel à l'intégré (24). Le signe écrit révèle la réalité géométrique et la subsume au point d'en dire plus à partir d'opérations ne portant que sur le signe écrit.

CLASSIFICATION DES ROLES DE L'ECRIT EN MATHEMATIQUES

Ces distinctions faites entre l'impensé, l'impensable et l'écriture opératoire vont nous servir pour poursuivre l'analyse de la dialectique de l'écriture mathématique et franchir un nouveau pas en examinant a priori, c'est-à-dire sans schèmes historiques en tête, les possibilités virtuelles de l'écrit dans le cadre du perpétuel devenir des mathématiques. Nous omettons ici les rôles obvies de l'écriture scientifique : comme abréviation ou sténographie mémoriable, comme signe universel et comme encyclopédie descriptive (25).

Les autres virtualités de l'écriture mathématique pourraient se regrouper en cinq rubriques selon la tension suscitée entre le symbole et l'écriture littéraire familière. Cinq rôles donc :

- un rôle par défaut : le signe symbolique ne comporte pas les restrictions de ce qui est pensé et par suite implique, à une lecture naïve ou nouvelle,

---

(24) Editae vero hactenus methodi talem transitum non habent, adhibent enim plerumque rectam ut dx vel aliam hujusmodi, non vero rectam dy quaem ipsis DX, DY, dx est quarts proportionates, quod omia turbat.. (Leibniz, <u>Nova methodus pro maximis et minimis</u>, 1684).
On trouvera une analyse philosophique de l'algébrisation leinitzienne dans la 3ème partie du livre de Michel Serres : <u>Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques</u>. PUF 1968

(25) Encore que ces rôles ne soient pas aussi innocents qu'on serait tenté de le penser. En particulier, on pourrait s'interroger sur la raison pour laquelle, du moins en français, les néologismes mathématiques introduits au long des acquisitions de cette science appartiennent fréquemment au langage commun et sont rarement forgés sur des étymologies gréco-latines savantes. On songe à "dérivée", "différentielles", "espace compact", "mesure", voire les si français "espaces tonnelés" ! Etiemble, dans le Jargon des Sciences, y alla même d'un bon point décerné aux mathématiciens.

plus qu'il ne le semble. Le signe peut donc posséder une potentialité propre de développement. C'est fondamentalement l'<u>écriture de l'impensable</u>.

- un rôle par absence ou ambiguïté : le signe symbolique n'apparaît pas, mais seule apparaît une expression littéraire ou bien encore le signe symbolique est insuffisant en tant que tel, même au niveau naïf. C'est l'<u>écriture de l'impensé</u>.

- un rôle par présence, que l'on pourrait aussi qualifier de rôle d'excès : le signe symbolique écrit, par sa seule présence, atteste l'existence de l'objet auquel il prétend se référer. C'est l'<u>écriture axiomatique ou l'écriture algorithmique</u>.

Sans peine, on glanerait de multiples exemples illustrant cette classification revêche. Nous choisirons l'analyse des fonctions comme thème directeur.

ECRITURE ET DEVELOPPEMENT DE L'ANALYSE DES FONCTIONS

La notion de fonction correspond à l'un des modes mathématiques de prise en charge de l'idée familière de causalité, donc de dépendance. On imagine bien la multiplicité et l'ambiguïté des formes possibles d'une telle notion avant qu'un traitement formel ne vienne en fixer la définition.

Approfondissant les premières tentatives de l'Ecole Mécaniste de Paris au XIIIème siècle, c'est par une phrase qui claque comme une banière de ralliement que Calilée ouvre le XVIIème siècle(26) :

"La nature est écrite en langue mathématique".

Cette langue évidemment est celle des correspondances quantifiées. Les objets mêmes sur lesquels portent ces correspon-

(26) Je ne peux m'empêcher de signaler le merveilleux livre court de S. Drake, <u>Galilea</u>, Oxford University Press 1980 qui fait avec simplicité le point des études galiléennes et renvoie à des textes plus savants du même auteur (après l'évocation par A. Koyré du platonisme galiléen et l'évocation ultérieure du Galilée expérimentateur).

dances, jusqu'à la fin du 19ème siècle, sont clairement des "quantités", c'est-à-dire des grandeurs au sens euclidien, disons nos nombres réels pour simplifier, voire selon l'image géométrique des points sur une droite. L'extension se portera dès le XVIIIème siècle jusqu'aux points d'un plan ou de l'espace. Là n'est pas la difficulté, car c'est en fait la nature mathématique de la correspondance qui fait problème.

a) Le rôle par défaut : écriture de l'impensable

Pour la première présentation formelle d'une fonction, spécifiant mathématiquement l'idée de correspondance, il faut attendre Euler lequel dans son Introductio in analysin infinitorum de 1748, la définit comme une expression analytique quelconque d'une quantité variable et de nombres ou quantités constantes (27). Du point de vue scripturaire, Euler note par exemple f(x, y, z).

On constate que l'ambiguïté restrictive de la définition littérale d'Euler s'oppose à la généralité latente de l'écriture. En effet, par expression analytique quelconque, Euler entend se limiter aux combinaisons algébriques ou transcendantes de son époque : addition, multiplication, mais aussi exponentiation, développement en séries entières et produits infinis (28). Ce sont les seules fonctions calculables par les moyens désormais classiques. Le signe f(x, y, z), par exemple, est évidemment plus général puisqu'il élimine le recours au calcul explicite et surtout isole, comme s'il s'agissait d'un être en soi, le symbole f lui-même.

Le signe écrit joue donc là un rôle par défaut, que nous pouvons historiquement suivre jusqu'au développement de ses potentialités. Ainsi, Euler dès 1755, dans ses Institutions calculi differentialis, se voit contrait de considérer comme fonction toute relation d'une variable à l'autre telle qu'une variation de la première entraî-

(27) "Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili et numeri seu quantitatibus constantibus".

(28) Et cette définition correctement affinée par Lagrange et Cauchy conduira à la classe des fonctions analytiques, mais il y faudra auparavant l'introduction systématique des nombres complexes.

ne ipso facto une variation de la seconde (29). Et le rôle par défaut est bien entendu intégré plus tard à la pratique mathématique. Un texte de Condorcet (30) porte clairement la dynamique scripturaire de la définition :

"Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités x, y, z... F et que chaque valeur déterminée de x, y, z..., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent ; je dis que F est une fonction de x, y, z,..."

Et Condorcet de préciser le grappin jeté sur ce nouvel impensable qu'est une expression non calculable :

"...Si je sais que lorsque x, y, z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en x, y, z, ni la forme de l'équation entre F et x, y, z, je saurai que F est une fonction de x, y, z...".

Quarante ans plus tard, Cauchy écrit tout simplement :

"Soit f(x) une fonction de la variable x, ...".

L'analyse du XIXème siècle raisonne librement sur ces valeurs f(x) tandis que se précisent les différentes classes de fonctions : analytiques, continues, indéfiniment dérivables, intégrables au sens de Riemann, mesurables, boréliennes etc. La claire séparation des diverses classes ne va pas sans sérieuses empoignades où l'on revient à chaque fois sur le concept déjà défini de fonction, mais qui n'a pas encore stabilisé sa place dans l'organisation

---

(29) "Quae autem quantitatis hoc modo at allis pendent, ut his mutatis etiam ipsse mutationes sabeant, eae harum funtiones appellari solent ; que denominatio latissime patet atque modos, quibus una quantitas per alias determinare potest, in se completitur"
L'importante querelle sur la généralité attribuable au mot fonction a fait l'objet d'une remarquable note de Truesdell dans la publication des Oeuvres d'Euler.

(30) Dans un <u>Traité de calcul intégral</u>, présenté par morceaux à l'Académie des Sciences de Paris de 1778 à 1782. Cette citation est signalée dans un remarquable exposé, rédigé pour le séminaire de Philosophie et de Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure (25 février 1974), exposé dû à Christine Phili et auquel nous renvoyons le le lecteur.

mathématique (31). Ainsi, pour citer un exemple, si du concept de fonction semble éliminée dans l'esprit d'un Cauchy, d'un Bolzano, voire d'un Riemann, l'idée de la possibilité effective du calcul, possibilité matérialisée par une formule explicite ou un algorithme, cette idée y a été implicitement remplacée par celle de continuité. Soit la continuité en un sens plus ou moins voisin du nôtre, soit la continuité au sens d'unicursalité, comme possibilité graphique d'un dessin de la fonction sans qu'il soit nécessaire de lever la plume.

Un nouveau degré sera franchi à l'orée du XXème siècle (Volterra, Fréchet, etc.) lorsque la correspondance pourra être étudiée en soi. Comment ne pas être sensible au rôle de l'écrit à ce sujet ? Ainsi pour Condorcet, F désigne seulement une valeur numérique, non la correspondance. Déjà Lagrande note FX et Cauchy f(x). Il ne restera qu'à supprimer la variable x pour ne plus considérer que f, non cette fois comme valeur, mais comme correspondance, donc comme objet mathématique susceptible lui aussi d'une analyse dans son extension d'ensemble (comme l'ensemble des fonctions numériques, définies sur l'axe réel et continues). A ce moment là d'ailleurs, on pourra faire sauter les dernières restrictions concernant le domaine des variables pour envisager des ensembles quelconques (32).

Et le processus notationnel se poursuit par réintroduction de la variable, mais sous une écriture inversée cette fois, sous la forme x(f), résultat de l'application qui a la fonction f fait correspondre sa valeur au point x. Notation particulièrement précieuse en théorie de la mesure (Mesure de Dirac) et dans toute l'analyse contemporaine.

---

(31) Souvent cette stabilisation dépend d'arguments utilitaires. Ainsi Weierstrass évitera pour une fonction une définition à la Condorcet, considérant celle-ci comme trop générale et donc inutilisable. Cauchy, en 1821, sans que cela soit statutairement imposé, envisage des fonctions définies sur un intervalle et impose la continuité sur l'intervalle, sans jamais définir la continuité ponctuelle (cf plus loin).

(32) Est-il nécessaire de préciser que non seulement cette extension du domaine, mais également la saisie de la notion de correspondance comme d'un objet de calcul ("fonction de lignes" de Volterra par exemple), ne proviennent pas d'un seul jeu d'écriture. C'est au contraire toute l'oeuvre de Cantor qui sous-tend la démarche. Mais l'écriture, certes après coup, paraît potentiellement riche. Est-il vraisemblable que celle-ci n'ait joué aucun rôle marquant ? Pour ces études des débuts de l'analyse fonctionnelle, on renvoit le lecteur au livre si riche de J. Dieudonné : History of functional analysis,1981

Développant la vivacité de ce prolongement, un dernier stade actuel pour la notion de fonction est apparu avec les fonctions généralisées. (Les distributions au sens établi par Laurent Schwartz). La fonction, cette fois, perd son aspect de correspondance ponctuelle pour se définir comme un opérateur, c'est-à-dire un objet agissant sur une classe S de fonctions très régulières. Une fonction f agit sur ϕ, de la classe S, pour donner un nombre noté (f,ϕ). Cette action, quelquefois, se calcule selon l'intégrale $\int_R f(x)\ \phi(x)dx$ mais toutes les actions envisageables ne peuvent pas toujours être écrites sous cette forme, ce qui introduit de nouveaux êtres, les fonctions généralisées (ainsi de x(f), que l'on noterait (f,x) mais qui ne peut provenir d'une fonction selon le procédé intégral décrit plus haut. On y doit introduire la mesure de Dirac).

Avec l'écriture (f,ϕ) se manifeste objectivement la double linéarité en f et en ϕ et par suite s'inscrit enfin dans le symbole la dualité entre l'objet fonction, comme correspondance, et la variable, sur le domaine duquel agit la fonction. Dualité qui est la base technique essentielle de l'analyse fonctionnelle.

b) Le rôle par absence ou ambigüité : écriture de l'impensé

A.L. Cauchy, dans son Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique "prouve" qu'une série convergente dont chaque terme est une fonction continue définit une fonction elle-même continue. Ce résultat est faux et l'erreur provient d'un défaut possible d'uniformité. Mais examinons minutieusement le texte écrit de Cauchy. Il part d'une série convergente $u_o, u_1, \ldots, u_n \ldots$ et note

$$s = \sum_{n=o}^{\infty} u_n \ , \ s_n = \sum_{k=o}^{k=n} u_k \ \text{ et } \ r_n = s - s_n$$

. Jusque là rien à dire. Puis, "*Lorsque les termes de la série renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, ..., s_n, r_n et s sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x...*".

La notation s_n, r_n et s est en retard par absence sur le texte écrit qui exprime bien quant à lui $s_n(x)$, $r_n(x)$ et $s(x)$. Cette erreur de notation manifeste l'erreur du raisonnement .

"*Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite* α . *L'accroissement de* s_n *sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite et celui de* r_n *deviendra insensible en même temps que* r_n , *si l'on attribue à* n *une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction* s *ne pourra être qu'une quantité infiniment petite...*".

En chaque point x, le raisonnement de Cauchy est correct, mais le nombre n "considérable" dépend de x, ce que le signe noté n'indique pas et il se peut que le plus petit $n(x)$ concevable en chaque x ne constitue pas une fonction majorée en x sur l'intervalle considéré. D'où l'échec du raisonnement de Cauchy.

Dès 1826, Abel rendra manifeste l'erreur de Cauchy en se servant d'un exemple tiré des séries trigonométriques(33) et Cauchy lui-même remaniera correctement son théorème dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris de 1853. Et ce replâtrage tiendra compte du succès de la méthode dès qu'il est

---

(33) N.H. Abel, Recherches sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.\,2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3.}$ ... Journ. für reine und angew. Math. tome 1 (1826) p. 311-339
Abel prend l'exemple désormais classique de la série partout convergente $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ où $f(\pi) = 0$ comme il est facile de le voir, tandis que $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

Ainsi f n'est pas continue au point π (on en déduit donc la non uniforme convergence de la série : c'est le phénomène de Gibbs).

possible de borner n(x) indépendamment de x . Pour ce faire, Cauchy explicitera la notion de convergence uniforme, description précisément des cas où n(x) est borné sur l'intervalle de définition des fonctions u_n et peut donc s'écrire simplement n (34). Il est remarquable que dans le mémoire de 1853, Cauchy, ne citant d'ailleurs pas Abel, note encore u_n , mais énonce correctement la majoration uniforme en x (je souligne)

"Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande on puisse rendre, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites données, le module de l'expression, ..., inférieur à un nombre ε aussi petit que l'on voudra".

Même absence dans la notation chez Stokes en 1847. Cependant avec Weierstrass, la notation est maîtrisée. Il serait amusant de reprendre les divers textes se rapportant à la continuité uniforme, à la convergence uniforme, au 19ème siècle et de vérifier précisément les notations utilisées.

C'est par absence, ou à tout le moins par ambigüité, que le signe manifeste ici son rôle, au point que certains tiendront à voir dans le texte initial de Cauchy une définition "uniforme" de la convergence (35). D'autres épistémologues joueront de cette ambigüité pour reprendre l'histoire même du calcul infinitésimal après

---

(34) Pour une explicitation historique, nous renvoyons le lecteur à : F. Dugac : Fondements de l'analyse dans Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. J. Dieudonné (ed). Hermann 1978. ainsi qu'à la thèse de P. Dugac, Sur les fondements de l'anlyse de Cauchy à Baire, Paris, 1978.

(35) Cela ne tient pas. Il est vrai pourtant que Cauchy s'empêtrera plus d'une fois sur cette question d'uniformité. Par exemple, pour la définition de l'intégrale définie, il utilisera sans sourciller l'uniforme continuité, certes exacte mais qu'il reste à établir, d'une fonction continue sur un segment |a,b|, ou encore pour la continuité d'une fonction de deux variables qu'il déduit à tort de la continuité partielle. La notation écrite, dans ces deux exemples importants est également fautive. Si l'on veut remonter à la source du mal, il faut aller jusqu'à l'absence d'écriture quantifiée de la continuité d'une fonction. Et il est notable que Cauchy définit la continuité sur tout un intervalle mais ne distingue pas la continuité en un point. Là encore, notre thèse se justifie, puisque la notation écrite pêche par défaut (lorsqu'il faudrait lire, à tout ε < o et à tout x, correspond un η, dépendant donc de x et de ε ; on lit seulement : à tout ε > o correspond un η... la variable x étant sous-entendue...mais on ne sait pas très bien où, et cette indétermination mine le raisonnement).

l'introduction de l'analyse non-standard par A. Robinson (North Holland 1966), par exemple I. Lakatos.

Pour notre propos, il est plus important de noter que c'est l'absence initiale dans le signe, une fois qu'elle est remarquée puis prise en compte, qui permet le surgissement du bon concept. C'est ce que nous avons voulu décrire en parlant d'écriture, en creux, de l'impensé.

Ce thème mériterait, il est vrai, un développement plus technique ou plus érudit, lequel ne siérait pas ici. Il conviendrait notamment de distinguer le rôle par absence d'un rôle par ambigüité. Bien entendu, aux yeux de celui qui sait qu'il faudrait qu'il y ait quelque chose, l'absence est toujours ambiguë. Cette ambiguïté là ne nous ferait pas sortir du rôle par absence. Nous employons, ici, le mot ambiguïté pour parler plutôt de la relecture d'une écriture par un mathématicien de la "mathesis" suivante, relecture qui tord ce qui a été objectivement pensé par le scripteur.

c) Le rôle par présence : écriture axiomatique et écriture algorithmique

Lorsque David Hilbert, en 1899, débute ses Grundlagen der Geometrie par ses mots : "*Pensons trois systèmes de choses que nous appellerons points, droites et plans*", les vocables : points, droites et plans n'ont aucune importance et une impertinence d'Hilbert les aurait pu remplacer par trois signes distincts quelconques.

L'écriture ainsi conçue ne sert plus qu'à distinguer : distinguer des objets et distinguer des raisonnements successifs, sans omissions ni rajouts. C'est l'écriture axiomatique, laquelle se déroule avec un automatisme si assuré qu'elle réussit à éliminer de facto tout problème ontologique. Plus exactement, l'ontologie va se nicher dans le seul problème de la non-contradiction des axiomes, ceux utilisés pour définir l'objet dont on veut parler et ceux du cadre mathématique plus général dans lequel on se place. Une variante de l'écriture axiomatique me paraît être l'écriture algorithmique, variante qui en est très éloignée sur le plan conceptuel mais s'en rapproche beaucoup sur le plan du déroulement du signe. Comme le dit Michel Serres, reprenant Leibniz (cp déjà cité) "*Un sorite, un tissu de syllogismes, un compte bien dressé, un calcul d'algèbre une analyse des infinitésimales sont à peu près des raisonnements en forme, parce que leur forme de raisonner a été prédémontrée, en sorte qu'on est sûr de ne point s'y tromper*".

Certains signes, en effet, une fois écrits sur le papier, appellent immanquablement un certain déroulement algorithmique, une série d'actes opératoires, que ces actes soient justifiés ou non dans le contexte précis dans lequel ils s'insèrent. C'est là qu'il nous faut préciser. Dans l'<u>écriture axiomatique</u>, la justification pas à pas est essentielle : elle fait partie, d'ailleurs du calcul lui-même. Mais justification pour aller où ? Le succès de la méthode axiomatique, historiquement parlant, provient du <u>choix</u> de l'écriture, la plus propre à conduire par le chemin le plus court, sinon le plus élégant, aux résultats les plus riches, les plus conséquents. Ce sont bien les conséquences qui ont rejailli sur les différentes axiomatiques de la Topologie naissante des années 1920-1930 pour aboutir au choix d'une axiomatique à peu près reconnue par tous, celle que l'on trouve chez Bourbaki ou chez Kelley. Et une axiomatique réglée par une écriture propre. Il faut relire, à ce sujet les textes de M. Fréchet, F. Riesz, D. Hilbert, F. Hausdorff etc. Autrement dit, l'écriture axiomatique ne joue son rôle que par téléologie, c'est-à-dire dans la mesure où il s'agit d'une écriture parfaitement adéquate, d'une <u>écriture opératoire</u>. Nous ne reviendrons pas sur celle-ci, après l'exemple déjà fourni du calcul différentiel et intégral.

Au contraire, dans l'écriture algorithmique, la forme seule des calculs gouverne sa poursuite et l'écriture peut jouer un rôle par excès.

On pourrait étudier ainsi les développements formels de calculs sur les irrationnels, par imitation des calculs sur les rationnels, tels ceux réalisés par un maître comme Omar Al-Khayyâm au XIème siècle ou encore les manipulations formelles sur les nombres imaginaires, de l'Ecole Italienne de la Renaissance à un expert comme

Euler. Pour ce dernier point, on voudra bien se référer aux textes de MM. J.L. Gardies et P. Bailhache déjà cités. Pour rester dans le domaine des fonctions, on prendra la fondation exemplaire du calcul symbolique par l'ingénieur O. Heaviside (36). L'idée originelle est simple : il s'agit d'algébriser systématiquement les techniques de résolution des équations différentielles en tenant compte de certaines analogies formelles entre l'opération de dérivation et la multiplication d'une part, entre l'opération d'intégration et la division d'autre part. Ce qui revient à remplacer une équation différentielle linéaire du type :

$$(1) \qquad a \frac{d^2y}{dx^2}(x) + b \frac{dy}{dx}(x) + c\, y(x) = z(x)$$

par,

$$(2) \qquad (a\, s^2 + b\, s + c)\, Y(s) = Z(s)$$

Formellement, comment ne pas continuer l'écriture, même si jusqu'à présent aucune justification ne la soutient, pour décomposer le trinôme du second degré et obtenir :

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{as^2 + bs + c} = \frac{Z(s)}{a(s - s_1)\ (s - s_2)}$$

$$\text{soit} \qquad Y(s) = \frac{1}{a(s_1 - s_2)} \left[\frac{Z(s)}{s - s_1} - \frac{Z(s)}{s - s_2} \right]$$

Il s'agit d'interpréter $\frac{Z(s)}{s - s_1}$ par exemple. Or, nous avons posé formellement que la division par s correspondait à une intégration $\int_0^s z(t)dt$.

---

(36) Deux textes peuventpermettre de situer historiquement le calcul symbolique ou opérationnel, lequel mériterait à lui seul une étude encore manquante

G. Flegg : The operational calculus from Leibniz to Mikusinski Sciences et Techniques en perpective, Vol. 1, Nantes, à paraître, 1983.

J. Lutzen : Heaviside's Operational Calculus and the Attempts to Rigorise it Arch. Hist. Exact Sc. 21 (1980) P.155-242.

Il faut interpréter dès lors une telle division à une translation près et des considérations formelles, ou une vérification élémentaire, conduisent à associer :

$$\exp(s_1\ x) \int_0^x \exp(s_1 - t) \quad z(t)\ dt \quad \text{à} \quad Z(s)/_{s-s_1}$$

on se doit d'écrire :

$$y(x) = \frac{\exp(s_1\ x)}{a(s_1 - s_2)} \int_0^x \exp(-s_1\ t)\ z(t)dt - \frac{\exp(s_2\ x)}{a(s_1 - s_2)} \int_0^x \exp(-s_2 t) z(t) dt$$

Toujours formellement, c'est-à-dire par une écriture quasiment inéluctable, compte tenu dès règles de linéarité, nous aboutissons au résultat explicite :

$$(3) \qquad y(x) = \int_0^x \frac{[\exp(s_1(x-t)) - \exp(s_2(x-t))]}{a(s_1 - s_2)} z(t)\ dt$$

L'écriture (3) correspond, comme il est facile de s'en assurer par voie directe, à l'unique solution de l'équation différentielle (1) nulle ainsi que sa dérivée à l'origine. Elle indique aussi l'importance d'une nouvelle opération sur les fonctions, la convolution.

On comprend le nom de calcul symbolique, c'est-à-dire de calcul sur les symboles, donné à la méthode d'Heaviside. Cette dernière attendra 1917 pour recevoir une première justification théorique lorsque J.R. Carson, puis P. Lévy, remarqueront enfin qu'une opération classique, la transformée de Laplace, explicitement calculable au moyen d'une intégrale sur le demi-axe, $(Y(s) = \int_0^\infty \exp(-st)\ y(t)dt)$, réalise précisément le passage de la dérivation à la multiplication, de l'intégration à la division. La mise au pas théorique ne se trouvera d'ailleurs complètement élaborée qu'avec les méthodes de dualité de la théorie des distributions de L. Schwartz après la seconde Guerre Mondiale, justifiant d'une seule envolée tous les calculs précédents. Le polonais J. Mikusinski a tenu à fonder algébriquement ce calcul (cf : Operational Calculus, Pergamon, 1969).

Comment ne pas être frappé par ce rôle algorithmique de l'écriture par simple présence que déjà Leibniz explorait avec un certain système en inventant le calcul intégral ! Ce rôle peut d'ailleurs être magnifié a contrario. Ainsi, en l'absence de signe sténographique porteur de calcul, et malgré les ambitions théorisées de Condorcet et d'autres, la fonction parfaitement définie attribuant la valeur 1 pour toute valeur rationnelle, et la valeur o pour toute valeur irrationnelle, n'acquit droit de cité que lorsqu'on put, avec Dirichlet, la visualiser sous une formule ramassant des symboles familiers et indiquant des opérations à effectuer

$$\lim_{m\to\infty} \quad \lim_{n\to\infty} \quad \{\cos|(m\,!)\pi\, x|\}^{n}$$

On peut d'ailleurs se demander si le fond du problème posé par l'Ecole Intuitioniste n'est pas justement de n'accepter de considérer que les seuls êtres mathématiques qu'un calcul explicite permet d'atteindre. Les sectateurs de cette Ecole, et en tout cas les tenants de l'analyse constructive (37), seraient les partisans d'un seul style, celui de l'écriture algorithmique, certes pris conceptuellement à rebours de l'écriture axiomatique.

Une dernière remarque. Dès qu'une définition mathématique est posée, plus ou moins clairement, ce qui importe ce sont ses rapports avec les autres notions. Et la simple présence d'une écriture implique une comparaison, donc une opération. Au XVIIIème siècle, par exemple, on réservait l'adjectif continu à des fonctions grosso modo dérivables par morceaux. Un siècle plus tard, Cauchy donne une définition moins contraignante de la continuité mais semble encore admettre la dérivabilité d'une telle fonction. Il faudra encore beaucoup d'efforts -donc d'investissement mathématique- pour se persuader que l'on peut avoir une fonction continue, nulle part dérivable. K. Weierstrass sera le premier à fournir le contre-exemple grâce à une série trigonométrique lacunaire (1872).

---

(37) Cf E. Bishop : Foundations of Constructive Analysis Mc Graw Hill - 1967 .

d) Le rôle par analogie ou antithèse : l'écriture géométrique

C'est un rôle plus souvent imparti au genre poétique mais qui intervient également dans l'écriture mathématique. La plupart des grands auteurs ont ainsi choisi avec précaution les nouveaux vocables qu'ils introduisaient, les tirant le plus souvent du langage courant de façon à en utiliser l'environnement linguitique, à bénéficier des effluves du sens commun, par analogie ou antithèse, sans manquer d'en définir explicitement le nouveau sens mathématique.

Pour rester dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, l'exemple le plus typique est certainement la théorie des équations intégrales telle que pensée par F. Riesz et D. Hilbert au début du XXème siècle, qui conduisit à l'introduction des espaces qu'on appelle désormais hilbertiens. Le langage fait alors libre utilisation du vocabulaire géométrique euclidien classique, placé cette fois en dimension infinie : l'orthogonalité, la projection, les bases orthonormales, la notion de plus courte distance, etc. Mais ce n'est pas là seulement un usage du langage, c'est bien l'écriture géométrique qui est mise à contribution dans son déroulement opératoire, pour des théorèmes aussi cruciaux que l'existence d'une projection sur tout sous espace fermé d'un espace hilbertien ou la détermination du dual topologique d'un tel espace. Faute de place, on épargnera au lecteur les détails techniques.

D'ailleurs, le propos de Hilbert est de généraliser la théorie des séries trigonométriques. Cette théorie joue tout au long du XIXème siècle un rôle initiateur et un rôle de pierre de touche des principaux résultats de l'analyse : des controverses sur la notion de fonction par l'apport de Fourier aux théories de l'intégration de Riemann, à celles de Lebesgue sans oublier les travaux de Cantor en préliminaire à sa théorie des Ensembles. Il semble certain que la théorie des séries trigonométriques, comme représentation, donc écriture possible, des fonctions périodiques les plus irrégulières, jouait un rôle d'antithèse, de repoussoir, face à l'écriture usuelle, c'est-à-dire la représentation d'une fonction régulière par les séries entières. L'histoire minutieuse de l'évolution des idées mathématiques à partir des séries trigonométriques est d'ailleurs encore à écrire.

UNE MATHEMATIQUE PROPREMENT ECRITE

Ce qui précède établit que l'écrit, aussi solide soit-il, sort souvent de son rôle mathématique et l'on comprend le désir d'une mathématique proprement écrite, c'est-à-dire d'une écriture seulement régie par les mathématiques, ne suggérant rien, n'éliminant rien, une écriture de pure présence. C'est donc encore un nouveau pas qu'il nous faut franchir.

Rêvée par Leibniz, une telle langue fut élaborée par Russell et Whitehead, dans les Principia Mathematica, parus peu avant la Grande Guerre. Un coup d'oeil à cet ouvrage mémorable montre une langue formelle, triomphe de l'écrit, puisque le texte est à proprement parler imprononçable.

Démarche formaliste évidemment nécessaire et qui a permis de repenser les fondements des mathématiques, donnant naissance tant à la Logique Mathématique qu'à la Métamathématique ... et cette seconde approche remettait en cause les ambitions originales de Whitehead et Russell.

Démarche formaliste d'autant plus nécessaire, qu'une fois faite elle peut servir de garant... pour ne pous être reprise. La génération suivante, fait paraître à son tour une réécriture complète des mathématiques, le Traité de N. Bourbaki, auteur qui se pique d'être lisible, prononçable et bien écrit.

Car l'étape du formalisme de l'écrit, implique inéluctablement une abondance de développements possibles, une floraison de systèmes axiomatiques éventuels dont il conviendrait de faire l'analyse des conséquences, sans opinion préconçue. C'est la mathématique éclatée, les "mathématiques molles", diront certains !

En perdant toute référence ontologique, l'écriture mathématique semble avoir également perdu les critères du choix des objets à étudier, des relations à établir. Elle peut apparaître comme un jeu, un jeu sans gagnant, une sorte d'analyse interminable, comme dirait Freud, et bien sûr l'écriture automatique y trouve son compte, le simple jeu d'écritures.

DIVERSIFICATION DES SOURCES DE L'ECRITURE MATHEMATIQUE : UN RETOUR AU REEL

Logiquement, à ce tournant, surgit alors la nécessité d'expliquer la conjugaison étrange de la mathématique et du monde réel. Pour utiliser une image vieillie il faut, mais est-ce possible, démythifier les prouesses du calcul prévisionnel du retour des comètes... ou de l'alunissage.

La notion de modèle est souvent évoquée. De langage de la nature, la mathématique serait passée au rang de grammaire algorithmique et transformative des modèles, ces raccourcis inexacts mais fonctionnels et efficaces du réel.

La réduction n'est peut être qu'apparente et en tout cas une conséquence inéluctable est un considérable enrichissement tant du vocabulaire mathématique que de sa syntaxe. En effet, on peut grosso modo distinguer deux étapes différentes lors de la modélisation d'un phénomène, celui-ci étant pris à un certain niveau de compréhension. L'étape de mise en forme mathématique du modèle, puis celle du traitement mathématique pour la détermination des valeurs des paramètres recherchés.

Autant la seconde étape est classique, autant la première doit se plier tant au monde réel qu'aux exigences intrinsèques, prévisibles par effet de retour, de la seconde étape. La tranche toujours élargie du réel mathématiquement modélisable suscite alors l'intervention de nouveaux concepts, de nouvelles structures. Ainsi l'économie et les jeux statrégiques sous l'impulsion première de Von Neuman et Morgenstern (38), ains la biologie ou les grands systèmes vivants (39), ainsi la physique nucléaire et la théorie des champs, ont-ils ajouté de nouvelles idées aux mathématiques, même les plus pures.

De ces domaines proviennent alors de nouvelles expressions, de nouveaux enchaînements, certes modifiés voire ossifiés par

(38) J. Von Neuman, O. Morgenstersn, Theory of games and Economic Behaviour 2nd ed. Princeton Univ. Press (1947)

(39) Cf par exemple, l'ouvrage Anthropologie et Calcul, paru dans la collection 10/18 .

la structure profondément axiomatique et déductive de l'exposition mathématique.

Un exemple non encore parvenu à maturité n'est-il pas celui de la théorie des catastrophes de René Thom (40) comme prise en compte plus globale des phénomènes de stabilité, donc d'évolution ? Il suffit ici de citer les noms des singularités auxquelles s'associe une formulation analytique précise : le pli, la fronce, la queue d'aronde, le papillon et les différents ombilics.

Pour conclure, on se doit de répondre positivement à la question naïvement posée au début de notre travail. L'écrit n'est pas neutre en mathématique et bien au contraire les mathématiciens jouent très souvent de ses ressources aussi bien linéaires que spatiales, de ses qualités suggestives ou descriptives au risque d'ambiguïtés -tant pour exposer que pour investir de nouveaux territoires, intuitionner l'impensé et organiser l'impensable. Toute conquête de taille, cependant, conduit, à partir de l'écriture et du parler usuels, à un réaménagement global de l'écriture mathématique donc à un nouveau classicisme. Ce dernier fige alors, mais pour un temps, la syntaxe (c'est-à-dire le déroulement automatique -donc obligatoire- du calcul) et les paradigmes, dans une langue complète, fermée sur elle-même, sans passé apparent autre qu'archaïque. Tout est alors mûr pour une nouvelle querelle des Anciens et des Modernes !

---

(40) Une première approche est fournie par le recueil : René Thom, Modèles Mathématiques de la morphogénèse Collection 10/18 .