Séminaire de philosophie et mathématiques

D. Ruelle

Attracteurs étranges et dépendance sensitive des conditions initiales

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1980, fascicule 7
« Attracteurs étranges et dépendance sensitive des conditions initiales », , p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1980___7_A1_0>

ATTRACTEURS ETRANGES ET DEPENDANCE SENSITIVE DES CONDITIONS INITIALES

D. RUELLE

Je vais dans quelques instants vous parler d'attracteurs étranges, de leur théorie mathématique, de leurs applications physiques, et j'ajouterai quelques remarques un peu plus philosophiques.

Cependant, avant d'entrer dans le vif du sujet je voudrais dire quelques mots sur le problème de la méthodologie. Plus une science est exacte, plus sa méthodologie est assurée, et moins il est nécessaire de la mentionner explicitement. Par contre, lorsqu'on s'éloigne des mathématiques vers les sciences de la Nature ou de l'Homme, la béquille intellectuelle d'une bonne méthode fait de plus en plus défaut, et l'on risque de plus en plus de dire des sottises. Dans ces conditions, bon nombre d'intellectuels choisissent de respecter soigneusement les règles de leur discipline, et de faire pour le reste un choix plus ou moins incontrolé parmi les idées reçues. Les résultats sont souvent désastreux comme on le voit en se référant à des idées autrefois acceptées et maintenant passées de mode. C'est ainsi qu'un collègue, rencontré il y a quelques années, m'assurait qu'il n'était pas loin de croire, que grâce à la pensée de Mao des progrès remarquables pourraient être obtenus en mathématiques. Avant Mao, c'est Staline qui avait été admiré par toute une génération d'artistes et d'intellectuels français. De son côté, Hitler avait inspiré des penseurs un peu partout, et l'on pourrait multiplier les exemples.

Tout ceci pour dire que les idées acceptées à une époque donnée ne valent pas nécessairement mieux que les idées qu'on pourrait avoir par soi-même. Je m'autoriserai de cet argument pour vous dire ce que je pense. Certaines de mes affirmations sont des théorèmes mathématiques, d'un haut degré de certitude, d'autres concernent des faits physiques peu contestables. Mais je ferai aussi des suggestions beaucoup moins assurées, et dont la valeur devra être testée par une critique sévère sur le plan de la logique et sur le plan des faits. Je suis prêt à cette critique, mais je ne me soucierai pas par contre du statut idéologique de mes idées. Une idéologie se caractérise par cela qu'elle refuse de mettre en question les enseignements de tel ou tel grand homme . Ce qui importe, à mon sens, c'est si une chose est vraie, pas si elle est conforme à quelconque système révélé, qu'il soit à base ethnique, religieuse, politique, où même prétendument scientifique.

*

* *

Je puis maintenant en venir au sujet principal de cet exposé, qui concerne certaines caractéristiques générales de l'évolution dans le temps de systèmes naturels. Je ne m'engage pas à grand chose en appelant t le temps et $\vec{x}$ l'état du système qui m'intéresse. Par exemple si j'étudie une réaction chimique, x pourra être une liste de concentrations de divers composés chimiques, ces concentrations variant avec le temps t . Je peux aussi bien m'intéresser à un problème écologique, où $\vec{x}$ indique les effectifs de diverses espèces animales ou végétales. Dans ce problème on peut par exemple mesurer $\vec{x}$ au quatorze juillet de chaque année. Le temps t est donc ici un nombre entier (d'années) - on dit qu'on a un temps discret. Si les espèces de mon problème écologique vivent moins d'un an, passant la mauvaise saison sous forme d'oeufs ou de graines, on peut faire l'hypothèse approximative que x à l'année t_+ , ne dépend que de ce qui se passait l'année précédente t . On peut donc écrire

$$\vec{x}(t+1) = \vec{f}(\vec{x}(t)) \qquad (1)$$

L'équation (1) définit une évolution temporelle à temps discret, on dit aussi un système dynamique à temps discret. Pour le cas du temps continu (1) est remplacé par une équation différentielle

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{X}(\vec{x}(t)) \qquad (2)$$

Ce deuxième cas n'est pas essentiellement différent du premier et, pour la facilité, je discuterai surtout le cas discret (1). Notons que dans (1) et (2) le nombre de droite ne dépend pas explicitement du temps (nous avons des systèmes autonomes).

*

*   *

En général $\vec{x}$ a plusieurs composantes $x_1, x_2, \ldots.$ et peut même en avoir une infinité si l'on veut décrire un système physique continu (comme un fluide). Un exemple de système dynamique pour un vecteur à deux composantes est le système de Hénon, défini par

$$\left.\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t)+1-ax_1(t)^2 \\ x_2(t+1) &= bx_1(t) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Un tel système se prête très bien à l'étude par ordinateur. Celui-ci calcule (très vite) $x_1(t+1)$, $x_2(t+1)$ à partir de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et peut marquer les points de coordonnées (x_1,x_2) sur une feuille de papier. De nombreux calculs de ce genre ont été faits, et l'on obtient deux types de résultats différents suivant les valeurs choisies pour les paramètres a et b .

J'appellerai ces types tranquille et turbulent et je vais en donner des exemples.

Pour $a = 1.3$, $b = 0.3$, les points $(x_1(t), x_2(t))$ s'approchent d'un ensemble de sept points limites $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ et au bout d'un certain temps on n'observe plus que des sauts périodiques entre ces sept points. On a donc un comportement très prévisible et somme toute assez banal. Nous sommes dans le cas "tranquille".

Pour $a = 1.4$, $b = 0.3$ les points $(x_1(t), x_2(t))$ semblent d'abord tomber au hasard, mais quand on en a marqué quelques centaines ou quelques milliers on voit qu'ils se placent sur un système complexe de courbes formant une figure un peu étrange, qu'on a d'ailleurs appelée un attracteur étrange. Le point $(x_1(t), x_2(t))$ continue à sauter indéfiniment d'une extrémité à l'autre de l'attracteur étrange de manière apparemment fantaisiste, et en tous cas bien moins répétitive que dans le cas discuté auparavant. Nous sommes ici dans le cas "turbulent".

*

* *

Nous allons donner un sens plus précis à la différence entre systèmes tranquilles et systèmes turbulents, mais pour cela il faudra que nous fassions l'hypothèse que nous avons affaire à un système dynamique différentiable. Cela veut dire que la fonction $\vec{f}$ dans (1) est différentiable par rapport à son argument, ou que les composantes $f_1, f_2, \ldots$ ont par rapport à $x_1, x_2, \ldots$, des dérivées partielles continues du premier ordre et peut être aussi d'ordre plus élevé. Cette condition de différentiabilité paraît bien technique, mais nous permet d'étudier l'évolution d'un petit incrément $\delta x(0)$ de la condition initiale $\vec{x}(0)$ sur $\vec{x}(t)$ pour t grand. On peut se convaincre qu'en général $|\delta\vec{x}(t)|$ est proportionnel à $|\delta\vec{x}(0)|$ avec un coefficient qui se comporte exponentiellement avec le temps :

$$|\delta x(t)| \sim |\delta x(0)| e^{\gamma t}$$

Si γ est négatif ou nul l'incrément $x(t)$ décroit avec le temps, ou reste constant, on croît tout au plus lentement, nous dirons que le comportement du système est tranquille. Si γ est positif l'incrément croît explosivement avec le temps, et nous dirons que le comportement du système est turbulent, ou qu'il présente une dépendance sensitive des conditions initiales.

La justification mathématique du comportement exponentiel de $|\delta x(t)|$ est basée, en gros, sur le théorème ergodic multiplicatif d'Oseledec, publié en 1968, et qui est donc un résultat assez récent. Une étude détaillée est difficile, et l'on est par exemple incapable pour l'instant de prédire pour quelles valeurs de a et b le système de Hénon aura un comportement turbulent. Je ne vais pas m'attarder ici sur les problèmes mathématiques, et je vais plutôt examiner les conséquences du phénomène de dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales.

*

* *

Tout d'abord il faut dire que ce phénomène de dépendance sensitive des conditions initiales est connu en mathématiques depuis assez longtemps et apparaît par exemple dans les travaux de Thom, d'Anosov et de Smale. Smale a en particulier étudié des attracteurs étranges. Mais l'importance du comportement "turbulent" n'a été vraiment appréciée que quand les calculs sur ordinateurs ont montré l'universalité de ce phénomène, qui apparaît d'ailleurs aussi bien dans le cas d'un temps continu que pour un temps discret.

Je voudrais aussi mentionner que la dépendance sensitive des conditions intiales apparaît pour des systèmes mécaniques sans frottement (systèmes conservatifs) mais ne donne pas lieu à des attracteurs étranges à cause de la conservation de la "mesure de Liouville". Nous nous intéresserons donc plutôt aux systèmes dits dissipatifs.

*

*   *

Dans un système dissipatif une forme noble d'énergie (énergie mécanique, électrique, ou chimique) est transformée en chaleur. Si l'on fournit continuellement l'énergie noble en enlevant d'autre part de la chaleur on peut observer une grande variété de phénomènes.

Nous allons discuter le cas de l'hydrodynamique d'un fluide visqueux et caractériser par un paramètre μ la vitesse d'apport de l'énergie noble. (En pratique μ est le nombre de Reynolds ou le nombre de Rayleigh). Si $\mu = 0$ le fluide est au repos (on suppose toujours qu'on attend assez longtemps pour que les phénomènes transitoires disparaissent). Pour μ petit on obtient une solution stationnaire différente du repos puis, souvent, un mouvement périodique. La solution stationnaire et le mouvement périodique sont de type "tranquille". Si μ croit encore on observe une évolution temporelle non périodique, d'apparence chaotique, appelé turbulence, et qu'il faut interpréter. Une interprétation traditionnelle, due à Landau est que la turbulence résulte de la superposition d'un grand nombre d'oscillations correspondant à des "modes" différents du système. On peut montrer qu'une telle superposition a un comportement "tranquille". Une autre idée, proposée d'abord par Lorenz dans un cas particulier, puis par Takens et moi-même en général, est que l'on a un attracteur étrange avec dépendance sensitive des conditions initiales, ne faisant intervenir qu'un petit nombre de "modes". Ce nombre de modes, ou nombre de degrés de liberté, correspond grosso modo à la dimension de l'attracteur, et augmente quand μ augmente. L'expérience a maintenant montré que quand μ augmente on peut trouver des superpositions de deux ou même parfois trois fréquences discrètes, mais qu'ensuite on observe un comportement typique d'attracteur étrange. Grâce à cette confirmation expérimentale, le rôle des attracteurs étranges en turbulence est maintenant bien établi et il se publie sur le sujet un grand nombre d'articles, pas toujours très bons.

Cette situation contraste avec l'accueil assez froid que les articles de Lorentz, et de Takens et moi-même ont reçu lors de leur parution . Cet accueil froid est, il faut le dire, caractéristique du manque d'entousiasme du monde scientifique pour les idées nouvelles. La réalité est assez différente de l'imagerie populaire qui représente le savant visionnaire et révolutionnaire. Comme le dit mon collègue Louis Michel, le principal défaut des scientifiques, c'est le manque d'imagination. D'ailleurs, si le chercheur scientifique professionnel est peu révolutionnaire, je crois qu'on peut en dire autant du poète professionnel, ou du révolutionnaire professionnel...

*

* *

On a maintenant trouvé des comportements turbulents dans des systèmes dissipatifs très divers, et il est remarquable de constater à quel point ces systèmes présentent les mêmes phénomènes quand on les considère comme systèmes dynamiques, alors que physiquement ils sont sans rapport les uns avec les autres. Par exemple, un système hydrodynamique est défini par la vitesse du fluide, alors qu'un système chimique peut osciller sans que le fluide bouge. On trouve dans toutes sortes de systèmes des bifurcations de Hopf, de Feigenbaum, etc... En résumé on peut dire que le comportement dynamique des systèmes dissipatifs (pour des valeurs pas trop grandes du paramètre μ introduit plus haut) est semblable au comportement de systèmes dynamiques différentiables de dimension finie pris au hasard. En fait les enregistrements faits par exemple à partir d'une expérience d'hydrodynamique, ne se distinguent pas des enregistrements correspondant à l'étude par ordinateur d'un système d'équations différentielles prises arbitrairement.

*

*   *

Ayant trouvé des comportements turbulents en physique et en chimie, il est naturel d'en chercher aussi dans le domaine du monde vivant, où abondent les phénomènes périodiques, que ce soit en physiologie, en écologie, ou en économie. Notons un article remarqué de R. May (dans Nature) sur le cas de l'écologie. Comme la précision des expériences, et leur reproductibilité, sont ici bien moindres qu'en physique et en chimie, nous ne pouvons plus espérer vérifier avec précision des prédictions théoriques. Néanmoins la théorie des attracteurs étranges peut encore être utile par le langage et les analogies qu'elle fournit. On sait au moins que si un phénomène présente un comportement temporel "chaotique" il ne faut pas néccesairement lui trouver une cause chaotique : un système dynamique non linéaire n'a pas besoin d'une cause non périodique pour avoir un comportement turbulent.

Essayons d'appliquer ces idées au cas de l'économie. On peut imaginer qu'une économie primitive serait dans un état stationnaire, présentant d'année en année sensiblement le même aspect, sauf pour l'effet des fluctuations climatiques, des épidémies, etc. Les économies modernes montrent par contre des cycles qui ont été fort étudiés, et la situation actuelle pourrait assez bien être qualifiée de chaotique. On peut donc imaginer qu'un paramètre μ décrivant, disons, le degré de développement technologique, croit lentement au cours du temps, et que l'état de l'économie passe ainsi d'un état stationnaire à un état périodique, puis à un état turbulent. Bien entendu de telles idées doivent choquer ceux pour qui l'économie est une question idéologique, et d'autres par paresse intellectuelle. Il reste qu'il est difficile de tester une idée quand des perturbations extérieures aussi importantes existent, et quand il est quasi impossible de répéter une expérience. Je pense qu'il serait neanmoins fructueux d'étudier sur ordinateur les modèles économiques que l'on possède pour un pays comme la France, pour voir si des comportements périodiques, quasipériodiques ou turbulents s'y présentent, et comment ils se modifient quand on change les paramètres de l'économie.

Une autre idée vient à l'esprit, probablement fausse, mais qui demanderait quand même à être testée. Elle concerne les fluctuations boursières. On les explique d'habitude par la superposition incohérente d'un très grand nombre de contributions indépendantes. Cet argument rappelle la théorie de Landau de la turbulence. Ne peut-on pas penser que l'on a au contraire un système dynamique à un petit nombre de variables, avec un comportement turbulent ? Quitte à ce qu'il s'ajoute à cela un "bruit" dû à une multitude de petites contributions incohérentes ?

*

*   *

Il est de bon ton de terminer un exposé comme celui que je viens de faire en se réjouissant de ce que, si l'un ou l'autre problème a été résolu, on en a par contre posé beaucoup d'autres,nouveaux. C'est effectivement une constatation réjouissante pour ceux qu'intéresse la recherche plus que le résultat, et qui comme Guillaume le Taciturne, n'ont pas besoin d'espérer pour entreprendre, ni de réussir pour persévérer. J'avoue que personnellement je fait ma recherche avec l'espoir d'obtenir des résultats de mon vivant, c'est-à-dire avec l'espoir de comprendre des choses importantes