Séminaire de philosophie et mathématiques

Jacques Maurin

Bases d'une théorie du hasard

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1980, fascicule 4
« Bases d'une théorie du hasard », , p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1980___4_A1_0>

BASES D'UNE THEORIE DU HASARD

Jacques MAURIN
1er mars 1980, Palaiseau, France.

On propose une définition précise du hasard, sur les bases de l'imprévisibilité et de l'absence de signification. Cette définition s'applique aussi bien au hasard causal de l'univers macroscopique, qu'au hasard a-causal qui pourrait advenir en Mécanique Quantique et peu-être en Biologie.

On donne des moyens d'extraire d'une suite de nombres donnée sa composante de type aléatoire. En sens inverse, on donne un algorithme permettant de construire une infinité de suites de type aléatoire dotées de fonctions de corrélation et de répartition pré-imposées, avec la faculté de doser arbitrairement les taux de hasards causal et a-causal.

Ἀεὶ ὁ θεὸς γεωμετρεῖ

Platon, Théetète

La notion de hasard demande à être définie de ménière précise.

On ne peut pas la définir comme constituée par la collection des évènements relevant du calcul des probabilités.

Rappelons les notions de fonction de répartition et de densité de probabilité : Soit une "variable aléatoire" X susceptible de prendre des valeurs numériques réelles x. Sa fonction de répartition F(x) est définie par le fait qu'une épreuve sur X aura une chance mesurée par F(x), c'est-à-dire aura 100.F(x) % de chances, de donner une valeur de X inférieure à x, soit $X < x$. F(x) varie de manière non décroissante de 0 pour x infiniment grand négatif, soit $x = -\infty$, à 1 pour x infiniment grand positif, soit $x = +\infty$. Sa densité de probabilité f(x) est la dérivée de F(x) ; la chance pour X d'être comprise entre x et x+dx, soit $x \in [x, x+dx[$, est mesurée de même par f(x)dx.

Il en résulte que la proportion des cas où X est inférieure à x a toute chance de tendre asymptotiquement vers F(x); et celle des cas où x est comprise entre x et x+dx vers f(x)dx.

Mais la fonction "certaine" $x = \cos t$ par exemple, où t est le temps, est dotée d'une densité de répartition asymptotique

$$f(x) = \frac{1_{|x|<1}}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

qui possède toutes les qualités d'une densité de probabilité. Cette propriété s'étend, comme l'a montré TORTRAT, à une classe étendue de fonctions certaines.

Or, il est visible que cette fonction n'a rien d'aléatoire : elle ne relève pas du hasard, parce qu'on peut prévoir à l'avance sa valeur à tout instant futur donné t, si éloigné soit-il.

Il est donc nécessaire de définir et d'étudier la notion de hasard de manière autonome par rapport à celle de probabilité.

Il sera toutefois utile d'esquisser ici les grandes lignes de cette dernière notion :

Le tronc commun des théories des probabilités et de ce qu'on peut dire sur le hasard se trouve dans les écrits de Blaise PASCAL (1623-1662). Le formalisme actuel des probabilités dérive des travaux d'Emile BOREL (1871-1956). Ce formalisme est à l'origine des théories de la mesure : celle de BOREL codifie les ensembles σ de points sur le droite réelle $(-\infty,+\infty)$ support de x par exemple, tels que $X \in \sigma$, c'est-à-dire X tombant dans σ, ait un sens.

Un tel formalisme s'éloigne de la réalité qui est la production de valeurs successives ou distantes dans l'espace de la variable X. Aussi des tentatives ont été faites pour baser la théorie des probabilités sur la notion de fréquence statistique, ou asymptotique ; la plus connue de ces tentatives est l'oeuvre de R. von MISES.

Il a toutefois été démontré par J. VILLE que cette voie statistique n'arrive pas à rejoindre totalement le formalisme Borélien : elle laisse échapper des évènements mesurables au sens de BOREL.

L'expérience ne fournit que des évènements successifs dans le temps ou distants dans l'espace, et les théories des probabilités ignorent cette notion de succession ou de distance, sauf adjonctions sortant de leur cadre proprement dit.

Les fonctions aléatoires par exemple, qui sont des variables aléatoires fonctions du temps, introduisent bien la notion de succession. Mais le temps y est un paramètre surajouté, qui gouverne une succession de lois de probabilité, au lieu de décrire une succession de tirages suivant une loi.

Or, cette description est indispensable pour juger du caractère aléatoire ou non de la suite des évènements:

Plus haut, on a vu par exemple que la succession des valeurs de $x = \cos t$ possède une densité de répartition asymptotique dotée des propriétés d'une densité de probabilité, alors qu'il ne s'agit visiblement pas de hasard, parce que les valeurs de x sont à tout instant prévisibles.

Un critère fondamental du hasard est ainsi son imprévisibilité.

Mais ce critère suffit-il ?

Examinons-le sur un exemple :

Alan VAUGHAN rapporte que l'acteur Charles Francis COGHLAN, originaire de l'île du Prince Edouard au Canada, mourut en 1899 à Galveston (Texas), à plus de 4.000 km par mer de son île natale.

En 1900, un terrible ouragan dévasta Galveston, inondant le cimétière. La dalle du tombeau fut arrachée, et le cercueil de COGHLAN, ainsi libéré, remonta le golfe du Mexique, contourna la Floride, et fut jeté dans l'Atlantique où le Gulf-Stream l'entraîna vers le Nord.

Huit ans plus tard, en octobre 1908, trouvée, avec sa plaque d'identification, sur le bord de l'île du Prince Edouard par des pêcheurs, la dépouille de COGHLAN fut réinhumée dans le cimétière de son village, dans son île natale où il aurait peut-être voulu finir ses jours.

J'ai cité ce cas parce qu'il est à la fois imprévisible, et explicable par un enchaînement de causes. Relève-t-il du hasard ? La réponse dépend des caractéristiques psychologiques et culturelles de l'appréciateur. Le sens commun y verrait un jeu extraordinaire du hasard. Un esprit rationaliste y décernera le simple jeu d'un déterminisme. Alors qu'un mystique sera porté à y distinguer, sinon une volonté posthume, du moins une téléologie occulte.

L'appartenance d'un évènement au domaine du hasard peut ainsi être fortement teintée de subjectivité suivant l'appréciateur.

Plus loin dans le passé, la Bible (Daniel, V, 25) relate un évènement survenu en 538 avant le Christ au cours du festin de Balthazar. Sur le mur de la salle du festin, subitement, une main dépourvue de bras se met à écrire la phrase araméenne ci-dessous, qui comporte trois sens superposés :

	וּפַרְסִין	תְּקֵל	מְנֵא	מְנֵא
	oupharsin	teqel	mené	mené
1er sens :	demi-sicle	sicle	mine (monnaie d'or)	
2nd sens :	divisé	pesé	mesuré	
3ème sens :	perses			

et que la Bible interprète ainsi :

(Dieu) a mesuré ton règne et y a mis fin.

Tu as été pesé dans les balances et trouvé léger.

Ton royaume a été divisé et donné aux Mèdes et aux Perses.

Cet évènement était hautement imprévisible. Mais il viendrait difficilement à l'esprit qu'un tel évènement, indépendamment de sa réalité, aurait été le fruit du hasard, car il est très peu vraisemblable que le hasard produise des phrases dotées de sens, donc aussi peu vraisemblable qu'un évènement de cette nature, quoiqu'imprévisible, relève du hasard, car il est formé de mots, significatifs.

Cet exemple suggère un autre critère fondamental du hasard : l'insignifiance de l'évènement examiné, c'est-à-dire sa non-signification.

Toutefois, la production d'un groupe de signes doté de sens peut, quoique celà soit peu vraisemblable, résulter exceptionnellement d'un jeu du hasard : il faudra que la mise en oeuvre de ce second critère n'exclue pas cette possibilité.

En résumé, nous ne considèrerons un évènement comme relevant du hasard que s'il est à la fois imprévisible, et insignifiant; sachant que ce dernier critère doit tenir compte d'exceptions, possibles mais peu vraisemblables.

Ces critères n'ont de sens que par rapport à un observateur des évènements successifs : il faudra qu'il ne puisse déduire des évènements x_λ écoulés aucune précision assurée sur celui qui va se produire, et que la suite des évènements ne puisse pas lui suggérer de signification. La présence d'un observateur de la suite des évènements est donc primordiale pour définir leur caractère aléatoire ou non.

Diverses propositions de quantification ont été faites de chacun de ces deux critères fondamentaux. Nous décrirons les principales.

Une définition en rapport avec ce que j'appelle l'imprévisibilité a été appliquée notamment par l'Ecole de BASS à Paris.

A cette occasion, je tiens à témoigner de l'aide puissante que J. BASS a bien voulu me dispenser, sur le plan de la technique mathématique, aussi bien que relativement à la maturation de mes idées.

J'entends par imprévisible un évènement tel qu'on ne puisse tirer des évènements antérieurs aucune prévision assurée relative à lui. Si la suite des évènements observés est périodique, comme le lever du jour, il est facile à tout observateur de prédire la suite, en l'occurence que le jour va se lever demain. Si, plus généralement, cette suite est presque périodique, c'est-à-dire composée d'une combinaison de périodicités, comme par exemple les marées, on sait en trouver les fréquences temporelles composantes par analyse harmonique.

Soit une suite de nombres réels x_λ, $\lambda = 0,1,2, \dots$. On calcule, si elles existent, les moyennes des produits $x_\lambda \cos 2\pi\nu\lambda$ et $x_\lambda \sin 2\pi\nu\lambda$.

$$\mathcal{C}_\nu x_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda x_\lambda \cos 2\pi\nu\lambda \quad , \quad \mathcal{S}_\nu x_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda x_\lambda \sin 2\pi\nu\lambda \quad , \mathfrak{M}_\lambda \circ_\lambda = \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{\Lambda+1} \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \circ_\lambda$$

Ces valeurs ne sont nettement différentes de zéro que pour certaines valeurs des fréquences temporelles ν qui, dans le cas d'une suite presque périodique, engendrent la suite x_λ , donc en permettent la prévision.

Considérons maintenant la fonction d'autocorrélation, paire, de la suite x , qui est la moyenne des produits $x'_\lambda \cdot x'_{\lambda+\theta}$, avec $x'_\lambda = x_\lambda - \overline{x}_\lambda$, où $\overline{x}_\lambda$ est la moyenne $\mathfrak{M}_\lambda x_\lambda$ de x_λ :

$$g_x(\theta) = \mathfrak{M}_\lambda x'_\lambda \cdot x'_{\lambda+\theta} \qquad \theta = \dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots$$

On montre que, pour toute suite presque périodique, donc prévisible, $g_x(\theta)$ ne tend pas vers zéro quant θ croît indéfiniment.

A contrario, le critère d'imprévisibilité prendra la forme quantitative $\lim_{\theta\to\infty} g_x(\theta) = 0$, ce qui signifie que la fonction de corrélation tend vers 0 quand la séparation θ croît.

Des définitions en rapport avec ce que j'appelle l'insignifiance ont été codifiées notamment par l'Ecole de KOLMOGOROV à Moscou et à sa suite par MARTIN-LOF à Stockholm.

Le sens même du terme que j'emploie suggère une parenté avec la théorie de l'information, dont je rappelle ci-dessous une notion de base :

Soit un nombre k, égal ou supérieur à 2^{h-1}, mais inférieur à 2^h, ce qui s'écrit $2^{h-1} \leqslant k < 2^h$. En numération binaire, il s'écrit :

$$k = 2^{h-1} + a_{h-2}.2^{h-2} + \ldots + a_1.2 + a_o \ .$$

En prenant le logarithme $\log_2 k$ de k de base 2, défini comme étant la puissance de 2 égale à k, on obtient la double inégalité :

$$h-1 \leqslant \log_2 k < \widehat{\log_2 k} + 1$$

où $\widehat{\circ}$ est la partie entière de $\circ$, entier immédiatement inférieur ou égal à $\circ$.
Il suffit, pour déterminer k, de connaître h et les h-1 valeurs de a_i, soit h informations. Si on connaît h par $\log_2 k$, la quantité d'informations apportées par k est définie et quantifiée par cette valeur logarithmique. Si on ignore les a_i, $\log_2 k$ mesure l'ignorance ou entropie de l'information manquante. C'est l'une des bases de la théorie de l'information.

Il en résulte qu'il suffit, pour KOLMOGOROV, de traiter de la question en numération binaire, c'est-à-dire en considérant une suite de 0 à 1.

Dans ces conditions, le critère de KOLMOGOROV se rapporte à la stabilité de la fréquence statistique des 1 dans la suite x_λ, $\lambda = 1,2,\ldots$, quand on en sélectionne tous les sous-ensembles "admissibles". Chaque sélection s'opère par un algorithme, c'est-à-dire par un procédé de calcul, arbitraire pourvu qu'il soit admissible, c'est-à-dire non tendancieux : un algorithme tendancieux consisterait par exemple à sélectionner les x_λ égaux à un nombre toujours le même. KOLMOGOROV donne une formulation générale des algorithmes admissibles.

Soit une suite de N éléments $x_\lambda = 0$ ou 1. Le critère de KOLMOGOROV la considère comme (n,ε,p) aléatoire par rapport au système de sélections utilisé, si le taux décimal des 1 pour toutes les sélections de plus de n éléments, est voisin d'un même nombre $p \in [0,1]$ à ε près.

Le critère de MARTIN-LOF précise la fréquence à attendre des 1. Soit par exemple une suite de N chiffres 0 ou 1, supposée équirépartie, c'est-à-dire où les 0 ou 1 apparaissent avec des taux égaux. Considérons la sous-suite x_λ, $\lambda = 1,2, \ldots , n$. Elle contient $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n$ chiffres 1. L'hypothèse d'équirépartition aléatoire sera rejetée au niveau $\varepsilon = 1/2^m$ si l'écart entre $2s_n$ et n dépasse une certaine limite f(m,n) fonction de m et n pour plus de $2^n/2^m$ sous-suites de longueur n.

Les critères ci-dessus sont transposables à toute suite numérique quelle qu'en soit la base et aussi à toute fonction de répartition.

Un autre citère d'insignifiance, non sans rapport avec ce qui précède, peut être tiré notamment des travaux de POSTNIKOV à Léningrad.

On peut partir de l'idée de base que, dans la suite étudiée, ne figurent pas de sous-suites suggérant une signification.

Nous nommerons de telles sous-suites des mots.

Mais qu'est-ce qu'un mot ?

Soit par exemple donnée à examiner une suite alphabétique latine EBQKLIM... Etudions-y la fréquence statistique d'apparition des triplets composés des trois lettres A, E et U. Ils peuvent prendre chacune des six formes AEU,AUE,EAU, EUA,UAE,UEA. Dans un texte en français,par exemple le triplet EAU aura une fréquence plus élevée que les autres. Si le texte est suffisamment long, l'existence de mots, donc de signification, coïncidera avec l'appratition de triplets de fréquence plus élevée que ceux composées des mêmes signes dans un ordre différent.

A contrario, le critère d'insignifiance s'identifiera ainsi avec l'égalité des fréquences statistiques des triplets à nature et nombre d'éléments égaux.

On remarque que, dans une suite vérifiant ce critère, le mot EAU peut advenir, mais forfuitement, avec la même fréquence statistique que le tripler UEA par exemple.

S'il persiste pour tous les multiplets, ce critère se nomme répartition complète des éléments de la suite.

On voit qu'il est directement applicable à toute succession de signes alphabétiques ou numériques quelle qu'en soit la base ; et aussi à toute fonction de répartition de ces signes.

Les critères d'imprévisibilité et d'insignifiance sont essentiels. Mais on peut en définir nombre d'autres : NIEDERREITER à Urbana (Illinois) en donne une liste assez complète, enrichie de ses propres travaux.

Mais nous nous contenterons de considérer ici les deux critères fondamentaux d'imprévisibilité et d'insignifiance.

Avant de les utiliser, il est utile de détruire un préjugé, d'après lequel hasard et nécessité seraient antinomiques.

Il est courant par exemple d'imputer au hasard le temps qu'il fera dans un mois jour pour jour. Or, ce temps sera le fruit d'un inéluctable enchaînement de causes, c'est-à-dire d'un déterminisme: celui des lois régissant la physique atmosphérique. Le fait d'imputer au hasard le temps qu'il fera dans un mois ne fait que manifester notre ignorance.

Mais, considérons, dans un domaine plus théorique, celui de la Mécanique Ondulatoire ou Quantique, la relation d'indétermination de Heisenberg, d'après laquelle on ne peut connaître rigoureusement à la fois la position et la vitesse d'une particule: Si on se donne la position, la vitesse sera aléatoire.

Les théoriciens de la Mécanique Quantique sont partagés, relativement à l'explication de cette frange d'incertitude :

- Certains croient leur formalisme incomplet : il y manquerait des "variables cachées": C'est le cas de la théorie de la double solution de L. de BROGLIE. D'après B. d'ESPAGNAT, certaines expériences semblent infirmer cette opinion.
- L'expérience pouvant "réduire" le flou aléatoire, d'autres constatent qu'il faut, pour expliquer cette réduction, incorporer l'observateur et sa technique à l'observé, ce qui modifie ce dernier: Ce serait la position de BOHR et de l'Ecole de Copenhague.
- D'autres enfin pensent que ce flou existe dans la réalité: Ce serait la position de von NEUMANN.

Ainsi, la réussite évidente de nos prédictions concernant l'univers physique macroscopique le montre régi par un déterminisme incontestable. Il n'en est pas de même à l'échelle particulaire microscopique où, on vient de le rappeler, existe une incertitude. De sorte qu'on pourrait penser que le déterminisme des corps macroscopiques, agrégats de particules microscopiques, serait issu du jeu d'une loi des grands nombres, c'est-à-dire de la stabilité de lois de type probabiliste.

Il existerait ainsi deux types de hasard : l'un causal, provenant de l'ignorance de l'observateur relativement à un déterminisme occulte, l'autre a-causal, qui existerait soit dans le mode d'appréhension de l'univers par l'esprit humain, soit dans la réalité de l'univers lui-même.

Mais ces deux types de hasard sont caractérisables par les mêmes critères précédemment décrits, et sont formulables sous l'aspect des mêmes lois.

L'objet essentiel de ma propre recherche a été de démontrer qu'on peut, par le déterminisme le plus rigoureux qui soit : le déterminisme mathématique, engendrer des suites vérifiant aux yeux de l'observateur non initié les deux critères fondamentaux d'imprévisibilité et d'insignifiance, donc qui, pour lui, relèveront authentiquement du hasard.

Je puis ainsi engendrer du hasard par ce qui était réputé son contraire : le déterminisme ou nécessité.

Plus exactement, on le verra, je puis doser à mon gré la part déterministe du hasard que je produis, et cela sans altérer la précision de ses caractéristiques: de sorte que, comportant microscopiquement une frange aléatoire, il est macroscopiquement déterminé.

J'ai adopté, pour définir le hasard, l'imprévisibilité au sens de BASS : tendance vers zéro de la fonction de corrélation de la suite et insignifiance au sens de POSTNIKOV : répartition complète.

Voici mon procédé :

Pour rompre la chaîne causale, je montre comment obtenir plusieurs suites simultanées, telles que les évènements qui se produisent dans une suite soient indépendants de ceux advenus dans une autre suite.

Soient deux pièces de monnaie, toutes deux équilibrées. Tirons-les simultanément plusieurs fois successives à pile ou face : pour chacune des deux suites ainsi obtenues par des tirages successifs, la proportion de pile tendra vers 50%.

Maintenant, ne considérons dans la seconde suite que les tirages pour lesquels, dans la première suite, est simultanément sorti pile, et faisons abstraction des autres tirages : les deux suites seront dites indépendantes, si dans ces conditions la proportion de pile conservée dans le seconde suite continue à tendre vers 50 %, et réciproquement.

Plus généralement, deux suites seront dites statistiquement indépendantes, si, en filtrant le tirage de la seconde à travers une ou plusieurs valeurs déterminées prises simultanément par la première, la répartition des valeurs prises par cette seconde suite ne change pas, et réciproquement.

Cette définition de l'indépendance se généralise à un nombre quelconque de suites simultanées.

Un des fondements de ma méthode est qu'elle donne le moyen d'engendrer, par un déterminisme mathématique, des suites indépendantes entre elles.

J'utilise dans ce but des polynômes de WEYL, définis par le fait qu'un de leurs monômes de degré égal ou supérieur à 1 a un coefficient irrationnel, c'est-à-dire non exprimable par une fraction. Je vais donner plus bas des exemples de tels polynômes.

Je considère les valeurs Modulo 1, dites encore fractionnaires, de ces polynômes, c'est-à-dire ce qu'il en reste après soustraction du nombre entier immédiatement inférieur ou égal. Par exemple, 2,478 Mod.1 = 0,478;et -3,892 Mod.1 = (-4+0,108)Mod.1 = 0,108.

Je montre que les valeurs Modulo 1 prises simultanément par un ensemble de polynômes de WEYL sont indépendantes entre elles au sens précité si leurs coefficients irrationnels sont des fonctions linéaires à coefficients rationnels de puissances entières toutes différentes d'un même nombre transcendant.

Je rappelle que par définition : un nombre rationnel est le quotient de deux nombres entiers. Un nombre transcendant est tel qu'il ne se trouve aucun polynôme à coefficients entiers que ce nombre puisse annuler.

Par exemple, les polynômes de WEYL ci-dessous :

$$_1\phi(n) = ({}_1a_2.e + {}_1b_2)n^2 + {}_1a_1.n + {}_1a_0$$

$$_2\phi(n) = ({}_2a_2.e^2 + {}_2b_2)n^2 + {}_2a_1.n + {}_2a_0$$

$$_\lambda\phi(n) = ({}_\lambda a_2.e^\lambda + {}_\lambda b_2)n^2 + {}_\lambda a_1.n + {}_\lambda a_0$$

e = 2,7183... nombre transcendant de Néper,

${}_1a_2$, ${}_1b_2$; ${}_2a_2$, ${}_2b_2$; ... ; ${}_\lambda a_2$, ${}_\lambda b_2$; ... rationnels, ${}_ia_j$ réels, sont indépendants Modulo 1.

Ma méthode comporte deux possibilités générales :

Elle peut d'abord, en adaptant l'analyse harmonique, séparer dans une suite de nombres donnée, par exemple par l'expérience, sa part de type aléatoire,par soustraction de sa part non aléatoire.

Elle peut d'autre part engendrer une infinité de suites pourvues d'une fonction de corrélation qui a toute chance d'être aussi proche qu'on le veut d'une fonction de corrélation donnée et en même temps complètement réparties suivant des fonctions de répartition données, dans des conditions peu contraignantes :

J'engendre d'abord une suite de nombres réels $\mu_1(\lambda)$, $\lambda = 0,1,2,...$ dont la fonction de corrélation $g_\mu(\theta)$ est aussi voisine qu'on veut d'une fonction de corrélation pré-imposée M_θ,et tendant vers zéro quand la séparation θ croît indéfiniment.

J'adopte dans ce but la méthode de BASS. Cette méthode consiste essentiellement à calculer une fonction K(u) vérifiant $K(u) * K(-u) = g_\alpha(\theta)$, où $g_\alpha(\theta)$ tend vers α, que je prends entier, croît indéfiniment vers la fonction de corrélation désirée. * est l'opération de convolution définie, pour les mathématiciens, par l'intégrale :

$$K(u) * L(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda-u)L(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u)\,L(\lambda-u)\,du \; .$$

On prend ensuite la convolution de K(u) avec une autre fonction $x(\alpha u)$ dont la fonction de corrélation varie linéairement de 1 quand la séparation $\tau \epsilon |0,1|$ est nulle, à 0 quand elle est égale à $1/\alpha$ et reste nulle ensuite et on multiplie cette convolution par $\sqrt{\alpha}$; ce qui s'écrit :

$$\mu_1(\lambda) = \alpha^{1/2}.x(\alpha u) * K(u) \; .$$

On montre que cette dernière convolution possède une fonction de corrélation d'autant plus proche de celle désirée que le coefficient variable α est plus grand.

La fonction de répartition des $\mu_1(\lambda)$ ainsi obtenus n'est pas complète, et est imposée par le calcul ci-dessus, donc ne peut pas être choisie librement.

Il reste donc à assurer la répartition complète de la suite obtenue et le libre choix de sa fonction de répartition.

J'y parviens par la méthode suivante :

H. WEYL a montré que $\widetilde{\phi(n)}$, partie fractionnaire du polynôme de WEYL $\phi(n)$, est équirépartie sur l'intervalle $|0,1|$: ce qui signifie que la proportion décimale de fois où la valeur de $\phi(n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, tombe dans un sous-intervalle déterminé de $|0,1|$, est égale à la longueur de ce sous-intervalle.

Pour chaque valeur de λ, je choisis arbitrairement, dans des conditions peu contraignantes, la fonction de répartition $F_\lambda(z)$ que je désire. Soit $F_\lambda^{(-1)}(u)$ la fonction inverse : j'y choisis pour u la valeur $\widetilde{\phi(n)}$, créant ainsi une suite sur n de valeurs $z_n(\lambda) = F_\lambda^{(-1)}(\widetilde{\phi_\lambda(n)})$. Dans cette expression, je prends pour $\phi_\lambda(n)$ une suite sur λ de polynômes de WEYL tous indépendants entre eux Modulo 1.

Il est facile de montrer qu'alors la fonction de répartition sur n des $z_n(\lambda)$ est celle désirée soit $F_\lambda(z)$, et que les variables $z_n(\lambda)$ sont indépendantes entre elles sur λ.

Or, je puis disposer à mon gré de ces fonctions de répartition $F_\lambda(z)$: je leur impose simplement d'être telles que les moyennes correspondantes des $z_n(\lambda)$ sur n soient les $\mu_1(\lambda)$ obtenues plus haut, et de respecter certaines autres conditions peu restrictives.

Je montre qu'alors, pour n fixé, la fonction de corrélation $g_{zn}(\theta)$ des $z_n(\lambda)$ sur λ est aussi voisine en probabilité qu'on le veut de celle désirée ; ce qui signifie que la proportion des n pour lesquels ce voisinage n'est pas satisfaisant, est nulle.

En outre, l'indépendance des $\phi_\lambda(n)$ assure le caractère complet de la répartition des $z_n(\lambda)$.

En bref, on a vu que la corrélation de la suite des nombres concerne leur succession dans le temps ; ici λ, lequel est une dimension.

J'imagine et utilise une autre dimension qui me permet de substituer à chaque valeur $\mu_1(\lambda)$ de la suite de nombres ayant une fonction de corrélation proche de celle choisie, un nuage de valeurs $z_n(\lambda)$ suivant cette nouvelle dimension et centré sur $\mu_1(\lambda)$, nuage dont je fixe à mon gré les répartitions successives, que je puis obtenir insignifiantes le long du temps λ.

En désacouplant ainsi la variable de prise de corrélation qui est le temps λ, et la nouvelle variable n de prise de décompte statistique, et sous certaines réserves, j'ai ainsi indépendamment séparé les obtentions de la corrélation et de la répartition.

Il n'existe pas alors de procédé permettant à l'observateur de remonter à la connaissance des valeurs de la suite obtenue à celle de leur procédé de génération, ce qui lui ôte toute possibilité de prévoir de manière précise les valeurs à venir connaissant celles déjà obtenues.

J'ai ainsi obtenu, jusqu'ici par un déterminisme rigoureux, des suites de nombres ayant les fonctions de corrélation et de répartition voulues, imprévisibles par l'observateur, et complètement réparties donc insignifiantes.

Je vais maintenant montrer qu'il existe au sein de mon procédé une infinité de degrés de liberté, c'est-à-dire de hasards a-causaux laissant intactes les fonctions de corrélation et de répartion désirées.

Tout d'abord, j'utilise, pour engendrer la suite des moyennes $\mu_1(\lambda)$, un polynôme de WEYL arbitraire, doté d'un coefficient irrationnel arbitraire et de coefficients réels arbitraires à la suite; ce qui constitue une infinité non dénombrable de possibilités. Ensuite, à chacune des valeurs dénombrables $\mu_1(\lambda)$, j'associe un polynôme de WEYL différent $\phi_\lambda(n)$. Chacun utilise dans son coefficient irrationnel le même nombre transcendant arbitraire, ce qui introduit une infinité non dénombrable de possibilités ; cette infinité est multipliée par le fait que je prends une expression linéaire à coefficients rationnels quelconques d'une puissance de ce nombre, ce qui crée une nouvelle infinité dénombrable de choix ; en outre, les autres coefficients, simplement réels, et en nombre non limité, introduisent à leur tour des infinités non dénombrables de choix. Enfin, dans la construction de la fonction K(u), j'ai introduit, sans rien perturber, une fonction impaire de la fréquence temporelle $\psi(\nu)$ absolument arbitraire, et aussi une valeur $\mathring{M}_0$ également arbitraire sans un intervalle fini, ce qui introduit deux autres infinités non dénombrables de possibilités.

J'obtiens ainsi un énorme "flou" dans la microstructure de la suite obtenue. Mais en dépit de ce flou, sa macrostructure, définie par ses fonctions de corrélation et de répartition, reste stable.

Cette constatation rejoint les préoccupations des Physiciens théoriciens et aussi des Biologistes, dont les attitudes devant le hasard sont analogues, notamment relativement à l'Evolution, et en Biologie Moléculaire.

En résumé, si on réduit la notion de hasard à l'imprévisibilité et à l'insignifiance, je crois avoir montré ainsi qu'elle peut, totalement ou partiellement au gré de l'utilisateur, s'évanouir dans le déterminisme, qui était réputé son contraire.

Ma méthode me semble numériquement applicable par les physiciens, biologistes, informaticiens, ingénieurs et économistes :

- à la séparation de la composante de type aléatoire d'une suite donnée, par exemple par l'expérience ;
- à la génération d'un hasard spécifié dont les fonctions de corrélation et de répartition sont données à l'avance ;
- enfin à la cryptologie : génération d'un "bruit" par voie déterministe ; son côté bruit empêche l'observateur non prévenu d'en extraire le sens, alors que son côté déterministe en permet le décryptage par l'initié.

Sur le plan de la recherche de base, un certain nombre de voies s'ouvrent pour contrôler et développer ma méthode :

- Soumettre les suites engendrées à d'autres critères, notamment ceux de l'Ecole de KOLMOGOROV.

- Appliquer la méthode à des cas typiques, par exemple les chaînes de MARKOV.

- Etudier la possibilité de substituer à la suite des polynômes de WEYL une autre suite de générateurs indépendants.

- Transposer la méthode, des entiers sur les réels, ce que j'ai déjà esquissé dans une publication antérieure.

- Généraliser la méthode à des fonctions de répartition vectorielles et de corrélation tensorielles, autrement dit à des corrélations croisées et des répartitions à plusieurs dimensions ; ainsi qu'à des moments d'ordres plus élevés, ce qui n'offre aucune difficulté de principe.

- A la lumière de ce qui a été dit plus haut, étudier l'applicabilité éventuelle de ma méthode aux besoins de la Physique et de la Biologie Théoriques.

Techniquement, enfin, il serait utile d'étudier la phase transitoire et la discrépance des suites obtenues, ce qui semble sans difficultés de principe.

En conclusion, la méthode que je viens d'exposer me semble pouvoir illustrer activement, sur un modèle riche de possibilités, la notion de hasard, causal ou non, et sa génération concrète.

BIBLIOGRAPHIE

J. BASS - Les fonctions pseudo-aléatoires. Mém. Sc. Math., fasc. CLIII, Gauthier-Villars, Paris, 1962.
Cours de Mathématiques, T. III, Masson, Paris, 1971.

E. BOREL - Traité de calcul des Probabilités et de ses applications. T. I : Les principes de la théorie des Probabilités, fasc. 4, Gauthier-Villars, Paris, 1926-1937.
Eléments de la théorie des ensembles. Albin Michel, Paris, 1949.

L. de BROGLIE, J.L. ANDRADE e SILVA - La réinterprétation de la Mécanique Ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

L. DELLACHERIE - Nombres au hasard, de Borel à Martin-Löf. Gazette des Mathématiciens, n°11, Strasbourg, 1978.

W. DIFFIE, M. HELLMAN - New directions in cryptography. I.E.E.E. Tran. Inform. Theory, IT-22,6,644, 1976.

B. d'ESPAGNAT - A la recherche du réel. Gauthier-Villars, Paris, 1979.
Théorie Quantique et réalité, Pour la Science, n°27, Paris, Janvier 1980.

P.P. GRASSE - L'évolution du vivant. Albin Michel, Paris, 1973.

A. KOESTLER - Les racines du hasard. Calmann-Lévy, Paris, 1972.

A.N. KOLMOGOROV. - On tables of random numbers. Sankhya Ser, n°A.25, Inde, 1963.
Three approaches to the definition of the concept of amout of information. Traduction A.M.S. (En russe : Problemy peredaci informacii, T. I), 1965.

J. LARGEAULT. - Hasards, Probabilités, Inductions. Toulouse-Le Mirail, S[ie] A, T. 42, 1979.

P. MARTIN-LOF. - The definition of random sequences. Forskinigsrapport Institutionen för försaäkrings matematik och matematisk statistik, Université Stockholm , 1965.
The literature of von Mises' kollektivs revisited. Stockholm, 1966.

J. MAURIN. - Simulation déterministe du hasard, Masson, Paris, 1975. Avec le concours du C.N.R.S.
Random functions with given time-correlation. Information Sciences, Vol. 11, n°2, Elsevier, New-York, 1976.
Vers une théorie du hasard. Thèse de doctorat en Sciences Mathématiques de l'Université de Paris-Sud, Orsay, 1978.
Towards a theory of chance. Information Sciences, Vol. 18, n° 1 & 2, Elsevier, New-York, 1979.

M. MENDES-FRANCE. - Suites de nombres au hasard d'après Knuth, Séminaire de Théorie des Nombres. Bordeaux I, 1974.

R. von MISES. - Mathematical theory of Probability and Statistics. Ac Press, New-York, 1964.

J. MONOD. - Le hasard et la nécessité. Seuil, Paris, 1970.

H. NIEDERREITER. - Quasi-Monte-Carlo methods and pseudo-random numbers. Bull. Amer. Math. Soc, Vol. 84, n°6, 1978.

A.G. POSTNIKOV. - (en Russe : Modèle arithmétique de processus stochastiques). Institut de Mathématiques V.A. Steklov, n°57, Moscou, 1960.

G. RAUZY : Propriétés statistiques de suites arithmétiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1976.

E. SCHOFFENIELS. - L'anti-hasard, Gauthiers-Villars, Paris 1973.

A. TORTRAT. - Répartition asymptotique des fonctions presque-périodiques de Besicovitch. Proceed. of the Prague Conf. on Information Theory random functions. Acad. of Sc., Prague, 1964.

A. VAUGHAN. - Incredible coïncidence. Lippincott, New-York, 1979.

J. VILLE. - Etude critique de la notion de Collectif. Monographies de Probabilités, fasc. III, Gauthier-Villars, Paris, 1939.

H. WEYL. - Ueber die Gleichverteilung von Zahlen Modulo Eins. Math. anlen, T. 77, p. 313-352, Taubner, Leipzig, 1916.

J. MAURIN
22, rue Jean Richepin
91120 PALAISEAU