Séminaire de philosophie et mathématiques

Marc Krasner

La pluralité et l'infini en philosophie et en mathématique de l'ancienne Grèce

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1979, fascicule 1
« Dans la philosophie et la mathématique grecques », , p. 1-40
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1979___1_A1_0>

LA PLURALITE ET L'INFINI EN PHILOSOPHIE ET EN MATHEMATIQUE DE L'ANCIENNE GRECE

par Marc KRASNER

§1. - Les origines.

L'évolution des idées sur la pluralité et l'infini dans ce qu'on peut appeler le courant principal de la mathématique de l'ancienne Grèce est un exemple curieux (bien que certains le nient) de l'interaction de la métaphysique et de la mathématique. Les problèmes de fondèments des anciens sont souvent apparentée aux nôtres , et il y a chez nous aussi une telle interaction . Mais comme aujourd'hui la plupart de gens n'aiment guère la métaphysique , la nôtre est clandestine , ce qui ne contribue pas peu à brouiller nos problèmes de fondéments .

Commençons par le commencement . Comme tous les peuples , les Grecs ont appris à compter , et ont acquis une certaine idée de nombre entier (positif) et des opérations qu'on peut faire avec ces nombres (du moins , quand ils ne sont pas trop grands) . Encore dans des lointains temps préhistoriques , certains de ces nombres ont acquis une valeur magique , tel le nombre 7 , qui est le premier entier qu'on ne peut pas former par juxtaposition de paires (comme les yeux , les oreilles , etc ...) , de triples (comme le père , la mère et l'enfant) ou de quintiples (comme les doigts d'une main ou d'un pied) – on connait le rôle de ce nombre dans la plupart des religions (et aussi dans le calendrier de presque tous les peuples) . Très tôt aussi , les nécéssités des échanges ont obligé à considérer la division de certains biens matériels en parties égales selon quelque critère objectif . Ainsi s'est formée une idée plus ou moins claire de nombre fractionnaire (positif) . Parmi les marchands de la Méditerranée orientale a prévalu la représentation égyptienne de ces nombres comme somme d'inverses d'entiers différents et , éventuellement , de 2/3 , ce qui posait , d'ailleurs , à ceux , qui se servaient de ce système , des problèmes arithmétiques ardûs . Car ils additionnaient sûrement ces fractions et,peut-être les multipliaient ! Puis , un jour , dans un groupe initiatique dirigé par un certain Pythagore , où on pratiquait à la fois la magie des nombres et la musique , on s'est aperçu qu'à un rapport (c'est-à-dire une relation percepti -

ble par une oreille musicale) des sons correspond un rapport (au sens arithmétique) des longueurs des cordes , qui les émettent . D'où les mots de Pythagore émerveillé : " tout est nombre " , et le fol éspoir de cataloguer tout dans le monde par les rapports des nombres (sous une forme un peu moins folle , un éspoir analogue habite aujourd'hui beaucoup de physiciens) . Ainsi , les pythagoriciens ont introduit la forme actuelle des fractions rationnelles , bien que cette forme est restée longtemps employée par une élite initiatique seulement , les marchands et le peuple continuant à se servir de la forme égyptienne . Mais quelle que soit la forme , sous laquelle les fractions étaient employées , on les considérait comme nombres ou presque (dont les entiers étaient un cas particulier) , qui agissaient sur les grandeurs à peu près comme nos opérateurs . C' est dans le groupe de Pythagore qu'on a commencé à étudier , pour des raisons magico-religieuses , mais aussi , peut-être , par pure curiosité , les propriétés arithmétiques (et , en particulier , la divisibilité) des entiers et des fractions , et aussi celles de certaines figures géométriques (bien que la géométrie grecque a eu aussi d'autres sources) . Le " tout est nombre " de Pythagore signifiait , en particulier , que les pythagoriciens considéraient , au début , que les seuls rapports possibles des valeurs d'une même grandeur(1) sont des fractions rationnelles positives . En notre langage ensembliste , ces rapports forment l'ensemble Q_+ , " moitié positive " de corps rationnel Q , qui ne depend pas (ni non plus les opérations de l'addition et de multiplication de ses éléments) de la grandeur qu'on considère et du choix de l'unité . Et , toujours en notre langage , on peut dire que les valeurs possibles de grandeur d'une certaine sorte (p.ex. longueur , temps) formaient , selon le point de vue initial des pythagoriciens , la partie positive d'un Q-espace véctoriel cyclique totalement ordonné (toutefois , cet ensemble des valeurs était soumis aux limitations supplémentaires pour la grandeur discrète-nombre , et pour l'angle géométrique) .

Est-ce que , en employant un tel langage , je ne commets pas un pêché grave d'anachronisme ? Ce serait bien le cas pour une époque plus tardive , quand deux événements énormes se sont produits : en mathématique - la découverte des rapports irrationnels , en philosophie - la venue de Parménide et de ses élèves (infidèles) les Eléates . Mais jusqu'à là les grecs n'avaient pas encore leur " peur bleue " de l'infini . Ainsi , Démocrite , qui était un jeune contemporain

(1) . *J'adopte ici la terminologie suivante en ce qui concerne les grandeurs : je distingue les <u>grandeurs</u> (telles longueur , temps , etc...) , les <u>valeurs</u> des grandeurs (p.ex. la longueur d'un baton donné , le temps qu'a pris une certaine conversation) et la <u>mésure</u> d'une telle valeur , c'est-à-dire son rapport à l'unité (qui est une autre valeur de la même grandeur) choisie . Les grecs parlaient respectivement des <u>sortes de grandeurs</u> , des <u>grandeurs</u> et des <u>rapports</u>.*

des Eléates , ne semble pas avoir été influencé par leurs " apories " , car il n'a pas craint d'envisager la totalité de l'Univers infini avec l'infinité d'atomes ,qui le composent (ce point de vue ,via Epicure , a atteint Lucrèce , comme l'a souligné récémment M. Michel Serre) . Il ne semble pas que les grecs de cette époque s'interdisaient d'envisager les collections infinies , comme , p.ex. celle de toutes les valeurs d'une grandeur , bien qu'ils préféraient de ne considérer que les choses et les collections finies .

Avant de parler de deux événements mentionnés , précisons mieux la mentalité philosophique et mathématique des grecs à l'époque , qui les a précédés . Jusqu'à Parménide , la philosophie grecque se tenait résolument au point de vue de sens commun qu' on appelle en philosophie contemporaine " réaliste " (2). Ce point de vue , qui est , soi-disant , celui de ceux , " qui ne veulent pas faire de la métaphysique " , consiste à considérer que nous appréhendons la réalité telle qu'elle est : p.ex. , quand nous " voyons " une chaise , ce que nous voyons est vraiment une chaise telle qu'elle est , quand nous " voyons " marcher un homme , ce que nous voyons est vraiment un homme , qui marche , etc. . Les points de vue plus modéré de ce type , comme celui d'Aristote , n'affirment pas l'identité de la chose et de ce qu'on en appréhende , mais affirme que ce qu'on voit est (par quelle harmonie préétablie ?) l'empreinte exacte de la chose elle-même dans la conscience du sujet . Bien que mon objet n'est pas de réfuter tel ou tel point de vue , mais de le rélater , je pense que ceux-là ne sont pas soutenables . Ainsi , je vois une chaise , je ferme les yeux , elle disparait , je rouvre les yeux et je la vois à la même place . Or , je sais pertinemment que , pendant que mes yeux étaient fermés , la chaise n'a pas bougé . Comment , dans ces conditions , peut-on soutenir que ce que je vois est la chaise elle-même ou son empreinte fidèle ? D'ailleurs , l'affirmation d'Aristote court-circuite un problème véritable : pourquoi , dans certaines circonstances , ce qu'on voit semble être , sous certains rapports , une empreinte fidèle de la chose ? Malgré cela , toute notre nature biologique , telle que l'évolution l'a modélée, nous pousse vers ce point de vue , tout notre langage en dérive : en effet , un animal , qui réfléchirait si le prédateur ou la proie qu'il voit le sont , n'attraperait aucune proie et serait vite mangé par un prédateur . Finalement , l'évolution a établi une concordance suffisante entre ce qu'on voit (ou,plus généralement , ce qu'on sent) et ce qui est , pour permettre des actions efficaces . Ce qui fait qu'il nous faut faire un effort surhumain contre notre nature pour se placer réellement à un point de vue différent , et il est à peu près

(2) . *Qu'il ne faut pas confondre avec le point de vue de même nom en philosophie platonicienne et scholastique ("querelle des universels") .*

impossible de trouver un langage adéquat à un tel point de vue , car le sens des mots est leur sens commun .

Les philosophes présocratiques autres que Parménide et Eléates (physi - ciens ioniens , pythagoriciens , Empedocle , Démocrite et même Heraclite[3]) partent tous du point de vue de sens commun . Bien que pas toute la réalité peut être , à un instant donné , appréhendée par le sujet , (p.ex. , certains objets sont invisibles , soit qu'ils sont trop petits , soit qu'ils sont trop loin , soit que d'autres objets plus proches en interceptent la vue , soit que le sujet a ses yeux fermés ou est aveugle) ,ce qui constitue , d'ailleurs , une faibles- se irrémédiable de ce point de vue [4], ces philosophes , et les Grecs en géné- ral , ne craignaient pas d'envisager l'espace entier , l'espace " illimité " (ἄπειρον) . Il était le contenant de tout ce qui existe (et , en particulier, de ce que voyait , à chaque moment donné , un sujet , lequel était censé de ne pouvoir jamais voir qu'une partie de cet espace) , et il était une sorte de ré- férentiel absolu pour toute leur philosophie et toute leur science , en particu- lier , pour leur mathématique et , plus spécialement , géométrie . Cette derniè- re était , en principe , l'étude des figures (corps , surfaces , lignes ,points et leurs combinaisons finies) de l'espace , en faisant abstraction de leurs propriétés autres que la forme et l'étendue . Certaines notions géométriques étaient considérées comme claires , aussi claires que ,p.ex.,celle de la cou- leur blanche ou rouge , d'autres en étaient dérivées par déscriptions (qui nous semblent parfois fort peu mathématiques) ou combinaisons . De même , cer- taines propriétés des figures étaient admises comme évidentes , dont certaines sous la forme des propositions explicitement formulées dites axiomes ou postu- lats (je passe sur leur différence) , d'autres d'une manière informulée (com-

([3]) . *Quand Héraclite dit : " tu ne te baignes pas deux fois dans une même ri - vière " , il veut dire (littéralement) que les gouttes d'eau qui passent près du baigneur n'ont rien de commun dans deux baignades (d'une manière figurée , il suggère que le monde ne reste jamais le même aux divers moments de son éxi - stence , qu'il change) . Mais il ne met pas en doute la réalité des gouttes passant près du baigneur telles que baigneur les ressent , ni leur persistence, sauf qu'elles ont descendu la rivière et sont hors de la portée du baigneur .*

([4]) . *En effet , comment expliquer qu'un objet peut empêcher la vue d'un autre? L'explication scientifique (d'ailleurs exacte) dit qu'il intercepte la lumière (en général , réfléchie) venant de ce second objet vers les yeux du sujet . Mais , alors , le sujet ne voit pas ce second objet , mais la lumière , qui en vient . Bergson , qui fut le tenant extrême du point de vue de sens commun , a parfaitement compris la difficulté et a imaginé la théorie bizarre que la lumiè- re venant d'un objet n'est qu'un signal permettant au sujet d'appréhender dire- ctement l'objet . Malheureusement , si tel était le cas , on n'aurait jamais pu observer une supernova , car , au moment quand sa lumière touche un observateur terrestre , elle est éteinte depuis longtemps.*

me tout ce qui touchait à la situation) , tandis que toutes les autres propriétés des figures (même , parfois , évidentes) devaient en être déduites (sous le nom de théorèmes) par le raisonnement . Ce système n'était peut-être pas aussi parfait et rigide que plus tard chez Euclide , mais il existait déjà (du moins en germe) . Quand les Grecs envisageaient des grandeurs autres que géométriques , leurs valeurs étaient toujours attachées aux objets de l'espace :p.ex. le poids d'une certaine statue . En tout cas , c'est à l'espace que tout était rapporté , et ses propriétés étaient l'ultime critère de la vérité . Bien entendu , il y avait aussi le temps , et au moins une grandeur spatio-temporelle , la vitesse . On ne sait pas si la notion générale de grandeur (μεγετε) qu' on trouve chez Euclide , date de ce temps ou est postérieure . Mais , en plus de la seule grandeur discrète-le nombre entier positif , les anciens Grecs n'ont considéré , au cours de leur histoire , que les grandeurs " continues " suivantes: longueur , aire , volume , angle , temps , vitesse , poids , auxquelles il convient d'ajouter encore une grandeur un peu vague - la force (qui semblait de même nature que le poids , mais , contrairement à ce dernier , ne mésurait pas la quantité de matière homogène ; en plus , sa mésure était malaisée , même en principe) , et , plus tard , Archimède a ajouté à cette liste le poids spécifique .

Les grandeurs n'étaient pas tout-à-fait indépendantes , car les Grecs de cette époque (comme , dans une certaine mésure , avant eux , les Babyloniens) avaient une " multiplication " de leurs valeurs , du moins pour les grandeurs géométriques : ainsi , indépendemment du choix des unités de mésure , l'aire d'un rectangle était considéré comme le produit des longueurs de ses côtés . C'est une question très important , mais je reserve sa discussion pour une autre occasion .

Les Grecs admettaient , au sujet des grandeurs continues , en général sans les formuler explicitement , un certain nombre de principes , dont certains étaient en contradiction avec leur croyance que tous les rapports sont rationnels mais jusqu'à la découverte des irrationnels cette contradiction passait inaperçue . Ainsi , il semble qu'il était admis que toute valeur de longueur peut se réaliser comme longueur d'un segment , toute valeur de l'aire comme l'aire d'un carré , toute valeur du volume comme volume d'un cube , toute valeur du poids comme le poids d'un corps formé d'une substance homogène arbitrairement choisie, etc. . D'autre part , les Grecs avaient , du moins en géométrie , deux " principes de continuité " , jamais explicitement formulés dans toute leur généralité , mais qui semblent découler des cas particuliers et du contexte :

a) principe de νεύσεις : si une grandeur continue varie continûment le long d'une courbe continue (dans les exemples qu'on trouve , il s'agit de la longueur du segment de droite tournant autour d'un point fixe , qui est compris entre ce point et la courbe) d'une valeur v' à une valeur v" , et si v est une valeur intermédiaire arbitraire , il existe un point de la courbe , où la valeur v est prise .

b) une ligne plane resp. surface continue fermée , qui ne se coupe elle-même nulle part , partage le plan resp. l'espace en deux régions : intérieure et extérieure , telles qu'on ne peut pas joindre deux points des régions différentes par une ligne continue ne traversant pas (c'est-à-dire n'ayant aucun point commun avec) la ligne resp. la surface considérée , tandis qu'on peut le faire pour deux points d'une même région .

Sans un au moins de ces principes , il est impossible de démontrer certains théorèmes les plus élémentaires de la géométrie , p.ex. qu'une droite ou une circonférence de rayon au moins égal à celui d'une circonférence donnée, passant par un point intérieur du cercle limité par cette circonférence , la coupe .

En ce qui concerne la logique et le raisonnement , il semble que les anciens Grecs n'ont jamais mis en doute le principe du tiers exclû , même s'agissant d'objets , caractérisés par quelque propriété , dont il n'était pas certain qu'ils forment une collection finie . Ainsi , quand il s'agissait de définitions et de démonstrations , ils usaient , semble-t-il (car on n'en a les preuves que pour l'époque plus tardive , celle d'Eodoxe et d'Euclide) sans scrupules , du quantificateur existentiel et de sa négation . Mais , en même temps , ils ne formulent jamais leurs problèmes et leurs résultats en termes existentiels et ne posent jamais les problèmes d'existence de la longueur des lignes , de l'aire des surfaces , du volume des corps (bien entendu , " limités " au sens convenable) qu'ils considèrent . Visiblement , elle leur parait évidente , allant de soi (en ce qui concerne les lignes , si jamais le doute les avait effleuré , cela pouvait leur paraître corroboré par ce qu'ils pouvaient , en imagination , dérouler un morceau d'une ligne , le long d'une droite sans le distendre ni contracter) . Il faut dire aussi qu'en fait , les géomètres de Grèce antique ne considéraient (bien qu'aucune prohibition de faire autrement n'existait) que les figures de type très étroit (pour nous) : combinaisons , sur un plan , des morceaux des circonférences et des droites ; surfaces de rotation (en général , autour d'un axe de symétrie de la figure) d'une telle figure plane ; les intersections de telles surfaces avec les plans ; les figures planes , obtenues en ajoutant aux morceaux des circonférences et des droites ceux des nouvelles courbes (sections coniques) et les surfaces de rotation de ces nouvelles figures planes . Seules échappaient à ce schéma les courbes définies " mécaniquement " par certains mathématiciens de l'époque en vue de la solution des " grands problèmes " de construction d'alors , comme la quadrature du cercle , la duplication du cube , la trisection de l'angle (que nous savons aujourd'hui irrésolubles à l'aide de la règle et du compas) , telle p.ex. la tractrisse , et l'étude de la spirale par Archimède . On a l'impression que la plupart des mathématiciens de l'époque considéraient ces courbes " mécaniques " comme des curiosités tératologiques ,et ne réconnaissaient pas comme véritables solutions des problèmes de construction celles qu'elles fournissaient . Seules les " bonnes " figures avaient , selon eux , un véritable intérêt pour la géométrie - point de vue, qui rappelle étrangement celui de Bourbaki et de ses suiveurs pour tout ce qu'ils ne connaissent ou ne comprennent pas .

§2. - Parménide et Eléates.

C'est Parménide , qui , le seul parmi les philosophes grecs , a posé (et l'a fait d'une manière incisive) le problème de l'existence et de la nature de pluralité . Pour poser un tel problème , il a fallu se placer en dehors (et , je dirais même , à l'extrême opposé) du point de vue de sens commun , et le langage habituel (et même ses formes le plus raffinées) est radicalement inadéquat à exprimer la solution (ou essai de solution) d'un tel problème quand elle nie ce point de vue . Les fragments connus de Parménide se partagent en deux parties de caractère presque opposé . La seconde partie , intitulée " physique de l'illusion " est écrite en langage habituel et semble être un exposé " sensé " d'une variante de la science de l'époque . Par contre , la première partie , appelée " voie de la vérité " , est écrite en un langage hermétique et symbolique , à peu près dépourvu de " sens commun " qui semble destiné à exprimer (pour soi-même) et , peut-être , à suggerer et à faire sentir aux autres ce qui est la réalité immédiate quand on rénonce à la déformer par des interprétations (ou misinterprétations) et à la briser , déchirer et dilater au-delà d'elle-même , comme le font le langage et les habitudes de sens commun . Les non-sens apparents et l'insolite dans le choix et les combinaisons de termes avertissent qu'il faut se mefier de leur acception commune , qui va au-delà de la réalité telle qu'elle est , et qu'il faut essayer de saisir cette réalité comme avec les yeux vierges d'un nouveau-né , le reste étant " illusion " .

Les fragments de Parménide ont suscité diverses interprétations et , je crois , sont mal compris - déjà les Eléates , qui se reclamaient de lui , comprenaient mal le fond de sa philosophie . Les historiens de philosophie , abusés , à mon avis , par les fréquents emplois du mot " être " (" l'être est , le non-être n'est pas " , etc...) , ont la tendance de voir dans la " voie de la vérité " une première description de l'idée de l'être (par opposition à celle de devenir) , et font de Parménide le fondateur de l'ontologie . Et le nom " physique de l'illusion " , donné à l'exposé d'apparence sensée de la science de l'époque , les laisse perplexes . C'est , à mon avis , un anachronisme , l'idée de l'être , comme les autres , datant de Platon . Voici l'interprétation que je propose , sans prétendre qu'elle est sûrement la bonne et sans me dissimuler que je commence par le trahir un peu, en me plaçant , pour l'interpréter , hors de ce qu'il considérait comme réalité et en me servant du langage , qui , selon lui , est celui de l' " illusion " .

Parménide se demande : " qu'est qui existe ? " . Il constate : " il existe, pour moi , mon présent tel qu' il m'est donné immédiatement , tel que je le ressens sans le déformer par quelque interprétation , et ce présent est une unité syncrétique indivise , et pas une juxtaposition de parties . Le passé existe-t-il ? L'opinion dit qu'il "a existé" et que j'en ai un " souvenir " . Mais qu'est ce " souvenir " , sinon un caractère de mon présent qu'on ne peut pas isoler vraiment de sa totalité ? Qu'est qui prouve que ce caractère provient d'un "passé " et le reflète , et qu'il y a eu ce passé ? Et même s'il y a eu ce passé , il n'est plus (même selon l'opinion) , et il y a illusion de traiter le " souvenir " comme de ce " passé persistant dans le présent " ou , même , penser que le présent puisse comporter d'une manière non-illusoire quoi que ce soit de ce " passé " , qui a cessé d'exister . D'ailleurs , les expréssions selon l'opinion : " a existé " , " n'existe plus " sont illusoires ; en vérité , le passé n'existe pas . De même , le devenir n'existe pas . Le sentiment de devenir , de changement n'est qu'un caractère du présent , et l'interpréter comme du devenir dans ce qui existe est encore une illusion . Ce qui devient n'est pas , ce qui est ne devient pas . De même , il y a illusion à interpréter (comme le fait le sens commun) certains caractères de mon présent comme " autre chose " ou " autrui " : l'idée même d' " autre chose " et d' " autrui " est illusoire , car je ne peux pas sortir de moi (et de moi présent , tel que je suis) , sauf par l'imagination illusoire , et ce qui est hors de moi n'existe pas (du moins pour moi) . Ce que l'opinion qualifie de " choses " ou " personnes " (et qui ne sont , en vérité , que des caractères de mon présent) n'ont pas (du moins , pour moi) d'existence autonome et séparée , mais existent uniquement en tant qu'ingrédients non-isolables du seul existant non-illusoire (pour moi) - mon propre présent (ou , terme peut-être plus adéquat , " moi au présent ") . Ce présent n'est pas une pluralité des parties séparées , mais une unité structurée, où tout interfère et interdepend . Pour avoir seulement l'idée de séparation et de pluralité , je dois sentir comme existant hors de moi et comme entités séparées ce qui , en réalité , est entièrement et inséparablement dans l'indivis de mon " moi " , exactement comme je ne peux pas avoir l'idée du passé qu'en res - sentant certains caractères du présent comme existant hors de ce présent . Je dois , pour cela , transcender la réalité telle qu'elle est , en quelque sorte " sauter plus haut que ma tête " , ce qui n'est possible que par illusion . Ainsi , la réalité immédiate , qui est le seul existant non-illusoire [objet " illusoire " signifiant pas seulement le prétendu " objet " d'une illusion grossière , comme , p.ex. l'image dans le miroir , mais l'objet (hypothétique et inaccéssible directement au sujet) qu'on ne peut envisager qu'à l'aide d'une intuition , dont l'actualisation exige que quelque illusion soit ressentie par le sujet comme réalité] , est une unité indivise , exclusive de pluralité et de séparation , sans devenir , intemporelle (car le passé , quand cette réalité n'existait pas , et le futur , quand elle ne sera plus , n'existent pas tant qu'elle est) , ni subjective ni objective (car elle est à la fois l'unique sujet et l'unique objet) , radicalement coupée de toute " autre chose " et de tout " autrui " . Le premier fragment de Parménide est précisément la manière métaphorique (et , par suite , inoffensive) de suggérer ce côté , en quelque sorte négatif , de cet existant . Parménide se garde d'employer à son propos , le terme de " présent de moi " , car le langage commun dit " moi " par opposition aux " choses " et à " autrui " , et dit " présent " par opposition aux " passé " et " futur " . Un tel terme serait donc entâché d'illusion , car il suggérerait qu'il existe (d'une manière non-illusoire pour le sujet) quelque chose hors du " présent " ou hors du " moi " . Comme l'existant en question est unique , Parménide l'appelle simplement " ce qui est " ou " être " (quelquefois , il parle de la " sphère " , pour souligner qu'il est clos en soi) . Mais on est bien loin de l'" idée de l'être " des ontologistes !

Si l'on se place au point de vue moins ésotérique que celui de la " voie de la vérité " , en s'accomodant des intuitions , qui ne peuvent pas éviter la contamination de l'illusoire , et en admettant (avec une dose convenable et judicieusement répartie de scepticisme) les existences hypothétiques (mais combien vraisemblables !) que ces intuitions permettent d'envisager , suggérées (quelquefois grâce aux apparences inexactes) par des interprétations (et mis-interprétations) illusoires de " ce qui est " du sujet , et , ensuite , précisées et contrôlées par notre Science , on aboutit à un schéma (partiel) de l'Univers , où il y a des multiples choses et multiples porteurs de conscience (sujets) , tout cela évoluant en fonction de temps , et ce que Parménide dit s'applique parfaitement à tout état de conscience momentané de chacun de ces sujets . Mais on s'aperçoit (par exemple , en interprétant , de ce point de vue , sa propre expérience) que ce " présent de moi " , malgré son caractère d'unité indivise , a un contenu positif extrêmement riche , constitué par une profusion et entrelacement de formes psychiques comme couleurs , sons , formes , senti - ments affectifs , volitions , sentiments du passé , du devenir , de vérité ,etc. Parménide ignore-t-il ce contenu positif de son " être " ? Je ne le crois pas . Mais sa description aurait nécéssité une analyse forcément déformateur de ce contenu , et ne pourrait être faite qu'en termes basées essentiellement sur l'illusion . Elle sortirait de la " voie de la vérité " . Parménide se borne donc, sans dire un mot tant qu'il ne quitte pas cette voie , à sentir et à contempler ce contenu positif , en se gardant de toute interprétation et de tout jugement.

Telle est la " voie de la vérité " . Mais si , cédant à la pente naturelle de notre esprit , on ressent les illusions comme réalités , en ressentant certains caractères de son propre présent comme choses et êtres , qui nous sont extérieurs , en y voyant chaises , arbres , hommes , vaches , étoiles , etc..., alors on vient à une vision du monde , qui n'est pas forcément fausse , mais qui est illusoire en ce sens qu'elle est basée sur les intuitions contaminées d'illusion , et a comme point de départ une misinterprétation de la réalité immédiatement donnée , qui empêche de la voir telle qu'elle est . Mais comme au théatre où une fois certaines conventions admises , on arrive à croire que les acteurs vivent vraiment la drame qu'ils jouent , il se peut que " la voie de l'illusion" permet de saisir , dans une certaine mésure , d'autres réalités . Quand on décrit cette (peut-être ?) réalité , il est licite de se servir de langage commun et il est sage de se ranger à l'opinion , qui semble la plus compétente . Et , malgré l'origine illusoire de cette intuition de l'Univers , il n'y a aucune raison pour qu'on y découvre des incohérences internes . Il est donc clair pourquoi Parménide a exposé la variante de la science de son temps , qui lui paraissait la plus vraisemblable , et pourquoi il l'a appelée la " physique de l'illusion .

Ainsi on voit se dessiner deux compréhensions possibles de la doctrine de Parménide - close et ouverte , selon le sens " objectif " ou " subjectif " qu'on attribue à son terme " existe " . Dans le parménidisme clos , le seul existant est sa " sphère " ou " un " , autrement dit l'état momentané de conscience tel qu' il est , et la " physique de l' illusion " (ou " selon l'opinion ") n'est qu'une erreur . Pour le parménidisme ouvert , ceci est bien la seule réalité directement accessible au sujet ; mais en la misinterprétant , en ressentant comme une réalité atteinte et actualisée ce qui n'est qu'une virtualité inaccéssible (5), en ayant le sentiment illusoire d'être grim-

(5) . *car , par exemple , quand on ressent certains caractères de son état psychique comme entités extérieures , existant séparément , bref les choses, on n' arrive jamais (même en s'y éfforçant) à les séparer complètement du reste de cet état psychique - il reste toujours un cordon ombilical , aussi mince soit-il , impossible à déchirer. Ce ne sont donc pas des actualisations véritables de l'intuition de l'extériorité , mais plutôt des virtualités qu' on réssent comme " presque " actualisées .*

pé plus haut que sa tête , il peut , en quelque sorte , ressentir comme éventuellement existantes d'autres réalités inaccéssibles directément , et appréhender (du moins , d'une manière hypothétique) quelque chose de ces autres réalités . Pour bien comprendre de quoi il s'agit , considérons une situation analogue , mais au niveau de sens commun (et descriptible par le langage commun) : supposons qu'on est un spectateur dans une salle de cinéma ou devant un poste de télévision où est projété un film , une scène jouée ou , mieux encore , une scène prise en direct . Ce qui se passe réellement sur l'écran est l'évolution avec le temps de l'éclairement (dans le cas de projection en blanc et noir) ou de l'éclairement et de la couleur des différents " points " (en réalité , des petites portions) de l'écran . Mais , d'une manière quasi-irrésistible , le spectateur ressent ce jeu de taches lumineuses sur l'écran comme les personnes , qui bougent , parlent , etc... , devine et partage leurs " sentiments " etc..., même s'il sait en même temps , par quelque coin de sa conscience que ce qu' il voit n'est que la projection d'une scène réelle ou jouée , et qu'il n'y a aucun personnage là , où il en " voit " . Toutefois , nous savons parfaitement que ce que nous ressentons devant l'écran n'est pas simplement un mensonge gratuit ,que les personnages fantomatiques qu'on voit " sur l'écran " (en réalité , au-délà de l'écran , car on les " voit " en rélief) ne sont pas de simples songes apparus on ne sait comment . Nous savons , en effet , qu'une scène assez semblable (bien que plus riche , car comportant les odeurs , les mouvements d'air , etc.. que nous ne ressentons pas) a eu ou a lieu devant l'objectif de l'appareil de prises des vues et nous est (partiellement) restituée sur l'écran , soit par la projection de la pellicule impréssionnée et devéloppée transportée jusqu'au projecteur , soit par la transmission directe quasi-instantanée , où participe, comme une phase intermédiaire , l'émission , la propagation et le captage des ondes hertziennes modulées . Eh bien , si l'on considère que la seule réalité qu'on voit est le jeu des taches lumineuses sur l'écran , et que tout le reste n'est qu'une illusion mensongère , et si on reste là , c'est l'analogue du parménidisme clos . Si , au contraire , tout en réconnaissant que ce qu'on voit est illusoire(6), on pense que cette illusion réflète et nous restitue (bien que partiellement) une autre réalité , qui ne nous est pas accéssible directément : une scène réelle , qui s'est passée ou se passe quelque part , c'est l'analogue du parménidisme ouvert . Autrement dit , on pense que cette illusion n'est pas forcement un mensonge , mais , peut-être un moyen utile pour appréhender d'autres réalités . Bien entendu , cette appréhension est hypothétique et

(6) . *il est curieux de rappeler à ce propos que les premiers cinémas apparus au temps de ma petite enfance , avant et pendant la première grande guerre , s' appelaient " Illusions " (du moins , en Russie) .*

incomplète : ainsi , il est possible , à l'aide des robots suffisemment par - faits et adéquatement programmés (ou d'autres truquages) , de créer une illusion complète du jeu des acteurs vivants , et aussi , si le film est projeté sans explications , souvent il n'est pas possible de dire s'il s'agit d'un événement réel ou d'une scène jouée , si les lieux qu'on voit sont des paysages ou des locaux réels ou les décors de studio(7). Seul le parménidisme ouvert est compatible , comme point de départ philosophique , avec la science et la mathématique(8).

Je ne sais pas si Parménide lui-même était un parménidien clos ou ouvert, quoi que j'incline plutôt vers la seconde hypothèse . En effet , si la " physique de l'illusion " n'est qu'un mensonge , pourquoi prendre la peine de l'exposer si longuement et sans conclure ? Mais ses élèves les Eléates étaient (je n'en doute pas) des parménidiens clos . Comme tous les Grecs sauf Parménide , ils ne comprenaient que le langage de sens commun , donc lisaient la " voie de la vérité " littéralement , en identifiant la " sphère " de Parménide avec l'Univers tel qu'il est réellement , et en considérant la " physique selon l'opi-

(7) . *Bien entendu , cette comparaison est assez approximative , car ce que , du point de vue de sens commun , le spectateur " voit réellement " sur l'écran (le jeu des taches lumineuses) est , du point de vue de la " voie de la vérité " (où , d'ailleurs les analogues du spectateur et de l'écran se confondent), déjà une interprétation illusoire de la réalité . Mais , quand au fond , la comparaison est juste ;*

(8) . *Voici ce que le " parménidisme ouvert " suggère pour la mathématique :une pluralité ne peut être conçue (ou appréhendée) que par une intuition entachée d'illusoire (à peu près comme les personnages qu'on " voit " sur l'écran) . Sa validité manque de certitude , et ceci indépendemment de type de pluralité : p. ex. , celle de la pluralité finie (ou , même , petite , comme 2 , 3 , 4 ,...) n'est pas plus certaine que , p.ex. , celle de la pluralité dénombrable ou continue . Dans tous les cas , nous ressentons une pluralité comme réalité par une sorte de croyance instinctive , analogue à celle , qui nous fait voir les per - sonnages dans les taches lumineuses de l'écran , mais cette croyance est pure - ment subjective .*

Supposons qu'on a une certaine intuition de pluralité . Etant donné une propriété , ou bien les objets ayant cette propriété forment une pluralité que cette intuition permet d'appréhender , auquel cas cette propriété est dite actuelle ou un ensemble pour cette intuition , ou bien ce n'est pas le cas , auquel cas elle est dite virtuelle . C'est là la base philosophique du point de vue sur les Fondéments de mathématique appelé définitionnisme . Bien entendu , le défi - nitionnisme ne se réduit pas à cette base : c'est un système formel , basé sur un langage,dont les formules peuvent être appréhendées à l'aide de la même intuition de pluralité . Quand cette intuition est celle de la pluralité finie , le système définitionniste est dit kroneckerien . C'est un système formel basé sur la pluralité finie , donc ayant le langage aux formules finies , et où seules les propriétés finies sont considérées comme ensembles , toutes les autres étant considérées comme propriétés virtuelles . Il m'est impossible d'en dire plus long ici , les lecteurs intéréssés peuvent voir mon article (avec de nombreux errata , hélas !) " Le définitionnisme " , Actes Colloque Blaise Pascal , t.I, Ann.Fac.Sc.Univ.Clermont,Num. 7,Mathématiques, 1ier fasc.,1962,p. 55-81.

nion " comme une fausse perception de cet univers , comme une erreur . Et ils ont cherché à montrer que l'image du monde , auquel cette perception conduit , est contradictoire , ce que Parménide n'a suggéré nulle part . C'est cela le but des " apories " de Zenon . Mais pour le faire , ils ont dû jeter par-dessus bord (ou passer sous silence) la partie la plus essentielle , le coeur même , de la doctrine de Parménide (que , probablement , ils ne comprenaient déjà plus) , car elle était en désaccord trop flagrant (du moment que " sphère " signifie " l'univers ") avec le témoignage de nos sens , tel que notre langage le décrit, et de concentrer leurs efforts sur un seul point : démontrer le caractère contradictoire du changement et du mouvement . En effet , tandis que , pour Parménide , la pluralité et la séparation n'étaient envisageables qu'à titre d'intuitions virtuelles entachées d'illusion , les Eléates en parlaient (du moins , quand il s'agissait de pluralité finie et de la séparation en un nombre fini de parties) comme de quelque chose de parfaitement clair . Aucune des apories de Zenon n'est dirigée contre ces notions[9]. Par contre , leur attaque contre le changement , vu que , dans la conscience du sujet , il y a une complémentarité réelle entre l'être et le devenir , l'état et le changement , ne manque pas de fondément du point de vue de sens commun , d'où la seule aporie valable de Zenon , celle de la flèche : quand on considère une flèche telle qu'elle est à un

(9) . *La philosophie de Parménide , si mon interprétation est exacte , est très apparentée , malgré des sérieuses différences , à la vedanta indienne . Pour les vedantins , la réalité véritable est exactément la même que dans la " voie de la vérité " de Parménide : c'est l'état momentané de conscience du sujet sans passé , devenir ou séparation , formant une unité syncrétique . Ils parlent , d'ailleurs , d'illusion qu'ils appellent " maya " , qui fait apparaître cette réalité autrement . Mais leurs motivations ne sont pas les mêmes que celles de Parménide : ils ne cherchent pas tellement à connaître la vérité pour elle-même, mais à la comprendre pour atteindre la sagesse personnelle . Ils cherchent donc à atteindre (ou à faire atteindre) l'état de conscience sans intuitions illusoires (qu'ils appellent " atman ") , afin de se liberer de tout désir : ils appellent cela " comprendre " . Mais (et en cela ils ressemblent aux Eléates), ils sont " réalistes " , c'est-à-dire ils considèrent que le monde objectif (cosmos , " braman ") est tel qu'il apparait au sujet ... du moins si la vue du sujet n'est pas altérée par les illusions (maya) : d'où leur identification atman = braman . Mais plus audacieux (ou plus aveuglés ?) que les Eléates , ils ne s'écartent pas d'un iota de la " voie de la vérité " de Parménide , qui, pour eux , décrit aussi le cosmos , malgré le désaccord flagrant avec l'image qu'en donne le sens commun . Bien que les germes du vedanta semblent très anciens, sa maturité date du moyen-âge (Šankara-Šarya , XIV^e siecle) , ce qui exclue l'influence mutuelle. Parménide a été , en somme , le seul philosophe " indien " de l'ancienne Grèce , et c'est pourquoi il a été si mal compris . Les philosophes occidentaux ayant quelque relation (assez lâche) avec la philosophie de Parménide sont surtout Leibniz et Kant .*

instant donné , il est impossible de distinguer si elle est immobile ou en mouvement[10]. Si Zenon était resté là , il n'y aurait rien à dire , et cette aporie , qui n'a aucun rapport avec la mathématique , ne l'aurait influencé d' aucune manière . Mais il a voulu surenchérir , en se servant , comme du moyen , des suites infinies . Il faut dire que si les Grecs arrivaient (comme Démocrite) à envisager jusqu'à là (bien qu'à contre-coeur) les pluralités infinies (l'infinité des atomes dans un univers infini) , ils ne connaissaient vraiment qu'une seule suite infinie (que , peut-être , ils n'ont jamais envisagé d' une manière actuelle) , celle des entiers , qui avait la bonne propriété qu'il n'y avait rien après . Je rappelle (en termes modernes) deux apories de Zenon , fondées sur l'emploi des suites :

Achille et tortue . Achille poursuit la tortue le long d'une droite . Soient A_o et A_1 les positions respectives d'Achille et de la tortue au début de la poursuite . On suppose , bien entendu , que les vitesses sont constantes . Soient A_2 la position de la tortue quand Achille vient en A_1 , et , généralement , A_{i+1} la position de la tortue quand Achille vient en A_i . Achille sera toujours derrière la tortue , et ne la rattrapera jamais .

Dichotomie . Le texte original un peu ambigu permet deux interprétations:
1ière interprétation . Soit un mobile allant sur une droite de point A au point B . Mais avant d'atteindre B , il doit passer par le milieu A_1 de AB , ensuite par celui A_2 de A_1B , etc... Il n'atteindra jamais B .
2ème interprétation . Le mobile avant d'atteindre B , doit atteindre le milieu B_1 de AB , et avant d'atteindre B_1 , il doit atteindre le milieu B_2 de AB_1, etc... Son mouvement n'a jamais pu commencer .

Bien entendu , Achille , la tortue et le mobile sont traités dans ces apories comme s'ils étaient des points sans dimensions .

Il est un fait que ces arguments , qui ne nous paraissent guère valables ont impréssionné la majorité des philosophes et des savants (dont mathématiciens) de l'ancienne Grèce , qui y ont vu des paradoxes véritables , bien que peut-être pas tous (ils ne semblent pas avoir impréssionné Démocrite) ni tout de suite (si la théorie antiphaïrétique des irrationnels est due , comme certains pensent , à Théetète ,il n'a pas encore été impréssionné , tandis qu'Eudo-

([10]) . *Je me rappelle à ce propos qu'en 1952 , quand j'ai été visiting professor à Notre-Dame University (Indiana , U.S.A.) , feu Lefschetz est venu (je crois, pour donner une conférence) et , lors d'une reception informelle , a dit :" on dit que les germes de toutes nos idées se trouvaient déjà chez les anciens Grecs; mais si , par exemple , on prend le principe de complémentarité , les relations d'indétermination de Heisenberg , on ne trouve chez eux rien de semblable ". Or, s'il n'y avait pas chez les anciens de formules d'indétermination , la complémentarité des cas extrêmes : état - changement , position - vitesse , leur était bien connue .*

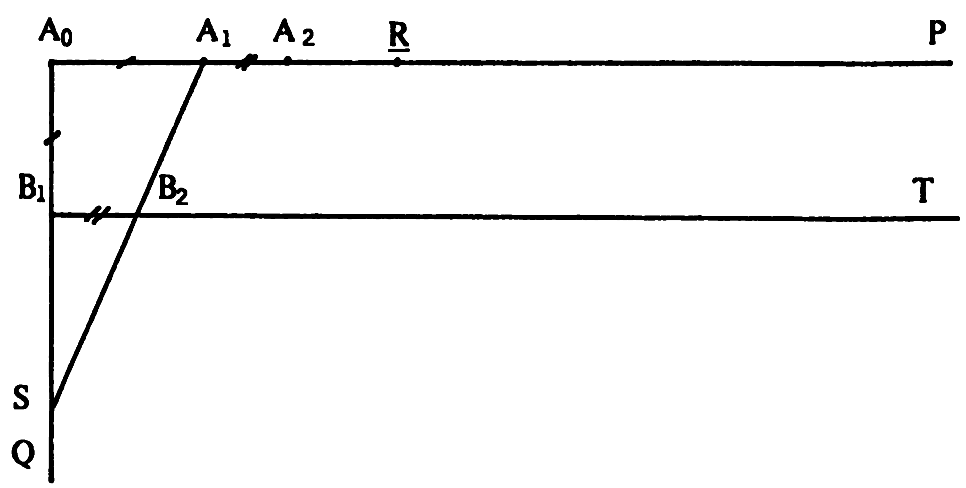
xe semble l'avoir été) . On peut se demander pourquoi ? Plusieurs explications ont été données . D'abord une , très naïve : il semble qu'au début du pythagorisme , on ne considérait pas les points comme étant sans dimensions , et un segment de droite était considéré comme formé par une juxtaposition d'un nombre fini de points . C'est vrai , mais un tel point de vue naïf , qui contredit que les rapports avec toute unité fixée peuvent avoir n'importe lesquelles valeurs rationnelles , n'avait plus cours à l'époque des Eléates . En plus , les constructions mêmes des suites conduisant aux apories auraient été impossibles , car la distance de leurs termes consécutifs tend vers 0 . Et, également , l'aporie de la flèche n'aurait aucun sens , car il importe que la flèche soit considérée en un instant sans durée , analogue temporel du point sans dimensions . M. Imré Toth fait , d'abord , une distinction entre " Dichotomie " et " Achille et la tortue " , en disant que , dans la première aporie , la limite de la suite est donnée , tandis que , dans la seconde , elle est à construire , et pense que les anciens Grecs distinguaient la limite non-atteinte et atteinte , autrement dit avaient une idée vague de nombres semi-réels[(11)]. M. Dieudonné a émis l'hypothèse que Zenon et ceux qui l'ont lu ont envisagé la possibilité qu'entre tous les éléments de la suite et sa limite se trouvent d'autres éléments , dont la différence avec la limite est infiniment petite par rapport aux longueurs habituelles , ce qui revient à supposer que les anciens Grecs ont eu l'idée des groupes (commutatifs) totalement ordonnés non-archimédiens (ou , plutôt , des parties positives de ces groupes).

D'abord , la distinction qu'invoque M. Toth entre " Achille et la tortue " et " Dichotomie " n'est qu'apparente , car , connaissant les trois premières positions A_0 , A_1 , A_2 d'Achille , il est facile de construire le point $\underline{R}$ de sa

(11) . *Soient $R°$ la droite réelle complète (c'est-à-dire incluant les éléments $-\infty$ et $+\infty$) avec son ordre habituel et Ξ l'ensemble $\{-,0,+\}$ avec l'ordre $- < 0 < +$. La <u>droite semi-réelle</u> S est l'ensemble totalement ordonné obtenu à partir de $R°\times\Xi$ ordonné léxicographiquement , c'est-à-dire $(r,\xi) < (r',\xi')$ si , et seulement si $r < r'$ ou , à la fois , $r = r'$ et $\xi < \xi'$. en lui enlevant les éléments extrêmes $(-\infty,-)$ et $(+\infty,+)$. On identifie $r \in R°$ avec $(r,0)$ et , sauf confusion possible , on écrira r^+, r^- au lieu de $(r,+)$, $(r,-)$. Si $A \subset R°$ et si a est le suprémum resp. infimum de A sur $R°$, on démontre que celui de A sur S est a ou a^- (resp. a^+) selon qu'il est atteint ou pas atteint .*

rencontre avec la tortue[12]. Il n'est pas douteux que les géomètres grecs de l'époque (ou simplement les Grecs cultivés connaissant la géométrie) étaient capables de la trouver et de prouver qu'Achille est derrière la tortue tant qu'il n'a pas atteint ce point $\underline{R}$, au même lieu que la tortue quand il vient en $\underline{R}$, et devant la tortue une fois qu'il dépasse $\underline{R}$. Quand aux explications de MM. Toth et Dieudonné , elles me semblent parfaitement anarchroniques (dont celle de M. Dieudonné une pure absurdité du point de vue historique) : comment les anciens Grecs pouvaient-ils concevoir une distinction entre les limites atteinte et pas atteinte quand l'idée même de limite et de convergence leur était étrangère sauf , peut-être , sous une forme heuristique , dans quelques cas particu - liers , chez un petit nombre de mathématiciens exceptionnels comme Archimède ? Certains croient voir une idée proche derrière la méthode d'exhaustion , mais je vais montrer plus loin qu'il s'y agissait de tout autre chose . Quant à s'imaginer que les anciens Grecs,qui ne voulaient même pas reconnaître la qualité des nombres aux rapports des grandeurs , auraient pu s'imaginer in abstracto les valeurs d'une grandeur , qui seraient infiniment petites (ou grandes) les unes par rapport aux autres , c'est presque du délire . Il est vrai qu'ils ont envisagé , à un certain moment , les angles entre les courbes (en particulier , les arcs des circonférences) tangentes , mais ces " angles " n'ont donné lieu qu ' aux discussions stériles sans jamais recevoir le statut des valeurs de la grandeur " angle " : cela aurait , d'ailleurs , été impossible pour les anciens , car ils ne pouvaient définir ni leur égalité , ni leur ordre , ni leur addition

(12) . *Voici la forme , je crois , la plus simple de cette construction (voir le dessin plus bas) : considérons , sur la demi-droite* A_oP *, dirigée dans le sens de la poursuite , les positions succéssives* A_0 , A_1 , A_2 *d'Achille . Construisons une demi-droite* A_0Q *perpendiculaire en* A_0 *à* A_0P *, et soit* B_1 *le point de* A_0Q *tel que* $A_0B_1 = A_0A_1$ *. Construisons la demi-droite* B_1T *, perpendiculaire à* A_0Q *en* B_1 *et ayant la même direction que* A_0P *. Soit* B_2 *le point de* B_1T *tel que* $B_1B_2 = A_1A_2$ *. Alors , puisque* $A_1A_2 \neq A_0A_1$, A_1B_2 *n'est pas parallèle à* A_0Q *. Soit* S *le point d'intersection de ces droites (il se trouve sur la demi-droite* A_0Q *) ; et soit* $\underline{R}$ *le point de la demi-droite* A_0P *tel que* $A_0\underline{R} = A_0S$ *. Alors ,* $\underline{R}$ *est le point de rencontre cherché .*



(entre eux , et aussi avec les angles ordinaires) . D'ailleurs , il n'existe aucun analogue linéaire de tels angles , et les anciens Grecs n'étaient pas des "axiomatiseurs " que M. Dieudonné déteste tant , et n'ont jamais envisagé des " Gedankenobjekte " gratuits (du moins , en mathématique) .

Je pense que vouloir expliquer l'impact de ces apories par des raisons techniques c'est chercher le midi à quatorze heures , et qu'il était dû aux raisons uniquement psychologiques . Aussi extraordinaire que cela puisse paraître, il semble que les anciens Grecs , y compris leurs mathématiciens , n'arrivaient pas à admettre ou bien qu'on peut parcourir (ou avoir parcouru , ceci si la seconde interprétation de la " dichotomie " est la bonne) une suite infinie de positions ou d'instants ou , du moins , qu'il puisse exister quelque chose après (resp. avant) une telle suite infinie . Bien entendu , personne sauf les Eléates n'a accepté les conclusions de ces apories : la réaction générale a été " de prouver le mouvement en marchant " , ce qui était une réponse à l'aporie de la flèche , mais aussi à celle de la dichotomie , et personne n'a admis qu'Achille ne rattrappe pas la tortue . Mais , visiblement , les adversaires de Zenon ont réconnu la " réalité " des paradoxes , et se sont posés la question : d'où viennent-ils ? En ce qui concerne " Achille et la tortue " et la " Dichotomie " , il n'y avait qu'une réponse possible : de l'emploi , dans les raisonnements des suites infinies . De lors , la réaction des philosophes et des mathématiciens de la Grèce antique a été la même que celle des mathématiciens modernes devant les paradoxes de la théorie des ensembles : malthusienne , " reflexe d'autruche " . Il fallait interdire toute expression de langage et tout raisonnement pouvant , à priori , conduire aux paradoxes (même quand il n'y conduisait pas) . On devait donc chasser des raisonnements les suites infinies et , dans le même mouvement , toutes les collections infinies d'objets individuels (car comment garantir qu'on ne pourra pas disposer en suite infinie certains d'entre eux ?). Ainsi ,a-t-on interdit de considérer , au cours d'un raisonnement , d'une manière séparée , les collections autres que finies d'objets individuels . Mais on ne pouvait pas chasser complètement l'infini , car il y avait , dans la géométrie des propriétés infinies dont on était obligé de parler,telle "être un point du segment AB " , que possédait une infinité d'objets individuels . La seule issue était d'interdire de considérer les objets de cette infinité tous séparément en même temps , mais de permettre seulement de la considérer comme un reservoir " inépuisable " de tels objets ; autrement dit , cela signifiait qu'on pouvait en sortir , pour les considérer séparément et individuellement (p.ex. , en vue d'un raisonnement) , seulement un nombre fini (quelconque) d'objets , mais qu'après cela , il resterait toujours d'autres objets , qu' on pourrait en sortir plus tard . Les infinités (ou les propriétés) ainsi considérées sont dites virtuelles[13] . Ce qu'en dit Aristote le confirme . Il dit[14] , en effet , que l'infini n'est réalisé que δύναμις (en puissance) et jamais ἐνέργεια (en acte) , et qu'il est " non pas ce , en dehors de quoi il n'y a rien , mais ce hors de quoi il y a toujours quelque chose " et que " les mathématiciens ne font point usage de l'infini , mais seulement de grandeurs aussi grandes qu'ils voudront , mais limitées " . Les philosophes traduisent le terme δύναμις indifféremment "virtuellement " ou " potentiellement " . Mais , étant donné le sens que le terme " infini potentiel " a pris dans notre mathématique (en particulier , chez Gauss) , la seconde traduction est inadéquate quand il s'agit d'infinité au sens des anciens Grecs de cette époque (en particulier , d'Aristote) . En effet , quand Aristote parle de pluralités infinies " en puissance " , cela signifie qu'on peut en extraire (du moins , en pensée) une collection finie aussi grande que l'on veut d'objets individuels (en particulier , en vue d'un raisonnement à leur sujet) . L' "acte" correspondant , du moins s'il permettait d'appréhender l'infinité en question , aurait été une telle extraction . Mais justement il ne le permet pas , car il y reste des objets en dehors de ceux qu'on a extraits . C'est donc pas vraiment un " acte " , mais , par rapport à son but , un acte " imparfait " ou " inachevé " . Quand les mathématiciens grecs raisonnent sur les objets individuels d'une pluralité infinie , ils se permettent uniquement , au cours d'un raisonnement , de faire un ou plusieurs (ce qui revient au même) " actes inachévés " de cette sorte (la lecture des " Eléments " d'Euclide et des oeuvres d'Archimède le montre clairement ; j'y reviendrai plus loin) . A une légère différence près , tout se passe donc comme si , avant le raisonnement , une collection finie arbitraire et non précisée d'objets de la pluralité infinie considérée était supposée extraite pour rester, ensuite , immuable au cours du raisonnement , lequel se ferait , à titre individuel,seulement sur les objets extraits .C'est cela infinité virtuelle (par rapport à l'intuition de la pluralité finie) . Par contre , une infinité potentielle au sens moderne est celle , dont on ne permet de considérer , au cours d'un raisonnement , que des parties finies , mais sans que ces parties finies soient , pour un raisonnement donné , fixées . Ainsi , quand on dit : " Une suite a_1 , a_2 , ... , a_n , etc.... converge vers a si , pour tout $m \geqslant 0$, il existe un entier n tel que $| a_m - a | \geqslant \varepsilon$ implique $m \leqslant n$ " , on considère cette

(13) . *Il s'agit bien de la virtualité par rapport à l'intuition de la pluralité finie telle qu'elle a été décrite dans la Note (13) . On remarque à quel point la base philosophique de la mathématique grecque en ce qui concerne la pluralité était semblable à celle du système définitionniste kroneckerien .*

(14) . *Je cite d'après J.Dhombres , " Nombre , mésure et continu " , Cedic / Fernand Nathan , Paris 1978 , p. 64*

suite (arbitraire) comme un infini potentiel . Par contre , quand , pour une suite bien déterminée , définie par une loi de réccurence $a_n = f(a_{n-1},n)$, on dit : " S'il n'existe aucun nombre positif m pour lequel il n'existe aucun entier n tel que $|a_m - a| \geqslant \varepsilon$ implique $m \leqslant n$, alors la suite considérée converge vers a " (d'une manière plus précise , il faudra dire , au lieu de " $|a_m - a| \geqslant \varepsilon$ " , " $a_2 = f(a_1,2)$, $a_3 = f(a_2,3)$, etc ... , $a_m = f(a_{m-1},m)$ et $|a_m - a| \geqslant \varepsilon$ ") , on considère cette suite (fixée) comme une infinité virtuelle , et on constate qu'elle converge vers a . Ainsi , la considération potentielle des infinités permet de définir la convergence d'une suite arbitraire vers a , et leur considération virtuelle seulement de constater une telle convergence pour une suite bien déterminée , donnée par sa loi de formation . La marque de l'infini potentiel est l'écriture a_1 , a_2 ..., a_n , etc... avec etc... " extrapolatif " , tandis que l'infini virtuel ne permet que l'emploi d'etc... " interpolatif " a_1 , a_2, etc..., a_n . Quant à l'infini actuel , son écriture typique , dans cette situation , serait $(a_n \; ; \; 1 \leqslant n < +\infty)$. Il est clair que l'infinité non actuelle des mathématiciens de l'époque moderne (à partir du XVI^e siècle) , depuis qu'ils manient les suites et les séries , était bel et bien l'infinité potentielle . Elle se situe entre l'infinité virtuelle et l'infinité dénombrable actuelle . Ils l'employaient avec l'idée derrière la tête sinon d'aller dans l'infinité dénombrable , mais du moins de venir " en contact " avec elle à l'aide du fini , ce qui n'était pas du tout le cas pour l'infinité virtuelle . Celle des anciens Grecs (de l'époque considérée) était certainement virtuelle(15), car , dans aucun de leurs écrits , on ne trouve de moindre trace d'un équivalent verbal d'"etc..." extrapolatif , et tous leurs énoncés , sauf

(15) . *Citons à ce propos (en traduisant en français le texte d'une partie du commentaire 8 au livre X de sa traduction russe des livres VII-X des " Eléments " d'Euclide , Editions d'Etat de Litt.Sc. et Techn. , Moscou-Leningrad 1949 , p.366) D.D. Mordoukhaï-Boltovskoï , qui semble être le seul traducteur d'Euclide ayant réflechi à ce côté de la question : "Bien que certains auteurs s'efforcent de voir dans "ἐφοδικόν" d'Archimède et dans le texte pseudo-aristotélicien " Sur les lignes indivisibles " quelque chose comme l'infiniment petit actuel dans le nombre actuellement infini , autrement dit les indivisibles de Kepler et de Cavalieri , on ne trouvera , en penetrant plus profondément dans la pensée antique , rien qui temoigne clairement en faveur d'un tel point de vue,.. On peut dire la même chose au sujet de l'infini potentiel que comporte la notion de limite . Je ne vais pas discuter la question assez délicate de la différence entre la notion aristotélicienne de puissance et la possibilité simplement logique , qui entre dans la notion l'infini potentiel mathématique au sens de d' Alembert et au sens moderne . Je vais seulement faire remarquer que , dans la notion aristotélicienne de l'infini potentiel , seule est supposée la possibilité de dépassement de toute limite imposée , mais que cette notion ne contenait même une trace de tendance (d'approche ?) vers quelque but determiné (le mot russe que je traduis , dans le contexte , plutôt par " tendance " que par " approche " est , au génitif , " приближения ") .*

raccourcis et négligences , sont écrits en accord avec la virtualité : de ce point de vue , la manière , dont Euclide formule son théorème qu'il y a une infinité de nombres premiers , est typique . M. André Weil , dans la conférence qu'il a donnée au Congrès Intern. des Mathématiciens , Helsinki 1978 , a dit que peu de pages après cette démonstration , Euclide parle de l'infini , ce qui semble être , pour lui , une preuve que les mathématiciens de l'ancienne Grèce employaient l'infini . Oui , ils l' "employaient " (ou , plutôt , le mentionnaient) , mais d'une manière strictement virtuelle . L'énoncé dont parle M. Weil est certainement la définition 3 du livre X , ou Euclide dit que , pour un segment (en terminologie grecque " droite " , en grec ancien εὐθεία) donné ,ὑπάρχουσιν εὐθειαι πλήθει ἄπειροι aussi bien commensurables qu'incommensurables (je simplifie la fin) . Heath , dans le commentaire (vol. 3, p. 11 de la seconde édition de sa traduction des "Eléments " d'Euclide) de cette définition, souligne le caractère élliptique de la fin de cette phrase , mais je pense que sa partie citée en grec l'est aussi (Heath ne l'a pas remarqué faute de compétence en philosophie mathématique) . Pour M. Weil , le sens de ces quatre mots semble être " il y a une infinité de segments " . Heath traduit d'une manière plus fine : " there exist straight lines infinite in multitude ..." , qui n'est pas vraiment fausse si l'on traite cette " infinite multitude " d'une manière virtuelle , auquel cas elle signifie , sous une forme élliptique , exactement la même chose que l'énoncé correspondant au sujet des nombres premiers : quel que soit la collection finie d'objets de cette multitude , il en reste encore en dehors de cette collection . Mais , destinée au lecteur d'aujourd'hui , cette traduction est abérrante , car il aura la tendance de donner aux mots " multitude " et " infinité " leur sens moderne plus ou moins ensembliste et les percevra avec un " parfum " extensionnaliste [16] et actualiste . La traduction de Mordoukhaï-Boltovskoï (que je traduis en français) est encore plus inadéquate (et, même , fausse) : " il existe une quantité infinie de droites ...", car πλήθει n'est pas ici un substantif et ne signifie certainement pas " quantité " . Je propose la traduction par des termes plus neutres : " existent les droites en pluralité sans fin " (ou " illimitée " ?) ... En tout cas , les deux énoncés d'Euclide sont , en ce qui concerne l'infini , du même type , et l'opposition entre eux que M. Weil croit deceler est fondée sur un malentendu .

Il y a un certain nombre de principes antérieurement admis , qui ont passé indemnes à travers la crise éléatique . C'est , tout d'abord , le principe de contradiction et celui du tiers exclu que jamais les anciens Grecs n'ont mis en doute . Egalement , toutes les autres règles du calcul propositionnel , codifi-

(16) . *au sens moderne , car l'"extension" au sens d'Aristote était virtuelle .*

ées , d'ailleurs , par Aristote . Ainsi , ils ont continué à employer la négation ($\neg$) sans aucune restriction . Ils ont continué , également , à employer le quantificateur existentiel [($\exists$ ..)] , car , dans la question : " existe-t-il, parmi les objets considérés , un , qui a la propriété donné p ? " , on ne parlait que d'un seul objet , et la réponse devait exister en vertu du tiers exclu. La réponse effective à cette question n'était pas toujours possible quand les objets considérés formaient une infinité . Quand on la trouvait , c'était soit par construction d'un exemple , soit par une démonstration irréprochable du point de vue de la logique grecque , soit comme évidence à partir de certains principes admis implicitement ou explicitement (p.ex. , l'existence d'un segment de droite de même longueur qu'une circonférence donnée) . On aurait pu penser que la question d'existence n'était posée que quand , d'avance , on en connaissait la réponse positive . Mais tel n'était pas le cas , car le quantificateur existentiel était aussi employé dans les définitions , par exemple dans celles de l'égalité et de l'ordre des rapports dans la théorie d'Eudoxe (ce qui constitue , d'ailleurs , la preuve la plus évidente de l'emploi de ce quantificateur après les Eléates) . Par contre , le quantificateur universel ne pouvait pas être directement employé , et la question " est-ce que tous les objets considérés ont la propriété p ?" ne pouvait pas être posée quand il s'agissait d'une infinité d'objets . Mais elle était remplacée par la question , pour nous équivalente : " est-ce que , parmi les objets considérés , il n'existe aucun objet n'ayant pas la propriété p ? ",combinaison du quantificateur existentiel et de la négation (c'est ainsi dans la méthode d'exhaustion) , ou bien (et c'est le cas de presque tous les théorèmes des " Eléments ") , au lieu de chercher à prouver que tous les objets d' une certaine sorte (dont il y a infinité) ont une certaine propriété , on considère un seul objet arbitraire de cette sorte et on prouve qu'il a la propriété considérée (en langage de la logique symbolique , cela revient à remplacer la démonstration de la vérité de $(\forall x)P(x)$ par celle de la vérité de $\neg(\exists x)[\neg P(x)]$ ou par celle de la vérité de $P(x)$ indépendemment de x) . Il faut dire que , dans un nombre assez réduit d'énoncés des " Eléments " d'Euclide et des Oeuvres d'Archimède on rencontre (en général , au début) les expressions " tous les (objets)..." (nulle part dans les " Eléments " , formulation de l'axiome d'Archimède et Prop. 9 de " Sur la sphère et le cylindre II " dans Archimède) , " les (objets)..." (livre II , Prop. 12 , 13 ; III , 22 , 26 , 27 , 28 , 29 ; VI , 19 , 20 , 21, 23 , 31 , 33 ; VII , 20 , 21 , 22 ; VIII , 5 ; XI , 9 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 ; XII , 1 , 2 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 11 , 12 , 14 , 15 , 18 des " Eléments " , Prop. 6 de " sur les conoïdes et sphéroïdes " , Postulats 1 , 5 et Prop. 1 , 2 , 3 , 6 , 7 de " Sur l'équilibre des plans " , livre 1 et Prop. 7 du " livre des lemmes " , chez Archimède) et " chaque (objet) ..." (livre VI , Prop. 24 ; VII , 4 , 31 , 32 ; XI , 21 , 29 ; XII , 3 , 10 des " Eléments " , Prop. 13 ,14, 15 , 18 , 34 de " Sur la sphère et le cylindre I " , Prop. 4 , 18 , 21 , 22 ,25, 26 , 27 , 28 , 29 , 30 de " Sur les conoïdes et spheroïdes " , Prop. 8 , 13,14 de " Sur l'équilibre des plans " , livre 1 , et Prop. 4 du livre 2 , Prop. 24 de " Quadrature de la parabole " , Prop. 2 , 3 , 5 de " Sur les corps flottants I " et les Prop. 2 , 4 , 6 , 7 , 9 de la " Méthode " chez Archimède). Mais quand on regarde les démonstrations , qui suivent , on constate qu'il s'agit d'abus de langage .

Ce qui précède montre à quel point est mal fondé le rapprochement de la mathématique grecque avec l'intuitionnisme et constructivisme contemporain , qui a été , en particulier , tenté par M. Imré Toth . Les anciens Grecs n'ont jamais douté de tiers exclu et employaient le quantificateur existentiel de manière nettement " platonicienne " . Ils étaient " virtualistes " , tandis que les intuitionnistes et les constructivistes sont plutôt " potentialistes " : ils n'interdisent pas l'emploi des suites infinies et de leurs limites , mais demandent seulement qu'elles soient " constructibles " par la donnée d'un procédé de récurrence permettant d'en déduire chaque terme à partir des précédents . Mais les suites de l'"Achille et la tortue " et de la " Dichotomie " le sont . Donc , ces écoles ne sont d'aucun sécours contre ce que les Grecs considéraient comme paradoxal dans ces apories . Sans doute les géomètres de l'ancienne Grèce faisaient beaucoup de constructions , mais le but de ces constructions était ou bien la détermination d'un objet , dont l'existence a déjà été admise auparavant pour d'autres raisons , ou bien une approximation suffisante d'un tel grandeur ou rapport (par exemple , l'approximation de π par Archimède ; l'existence de π était admise parce que les géomètres grecs considéraient comme évident que tout morceau d'une ligne au sens intuitif grec avait une longueur , et que cette longueur était égale à celle d'un segment convenable de droite , car on pouvait toujours " tendre " du moins , en pensée un morceau de courbe le long d'une droite ; et les approximations succéssives d'Archimède ne pouvaient pas servir de démon - stration de l'existence de π , car cela conduisait tout droit au paradoxe d'Achille) , ou quand il s'agissait de trancher la question d'existence d'un objet d'un certain type , les doutes à propos de cette existence étant de nature uniquement technique ; dans ce dernier cas , la solution du problème prenait la forme des conditions de la possibilité (διορισμός) d'une certaine construction (exemple : construction d'un triangle avec trois côtés donnés ; διορισμός : chaque côté doit ne pas dépasser la somme de deux autres) . Jamais les existences pour ainsi dire " fondamentales " (celles des longueurs des courbes , des aires des surfaces , des volumes des corps , des tangentes , des points d'intersection des droites et des circonférences , etc...) , n'étaient prouvées par une construction . Ainsi , la géométrie grecque était très constructive , mais pas constructiviste .

Montrons maintenant que la méthode d'exhaustion ne comportait (du moins , dans sa partie démonstrative) aucun emploi de convergence et de limite , et était en accord avec la virtualité de l'infini . En quoi consiste-t-elle ? On cherche la valeur m d'une grandeur M attachée à un objet (p.ex. , le volume v d'une sphère) comme fonction $m(a,b,...)$ de certains paramètres a , b , ... caractérisant cet objet (p.ex., le rayon r de cette sphère) . On commence de chercher , par des considérations heuristiques , la valeur plausible de m . Supposons qu'on ait ainsi arrivé à la conviction (ou bien qu'il semble plausible) que cette valeur est $m_o(a,b,...)$. Mais , maintenant , il faut essayer de prouver que , pour toutes les valeurs des paramètres a , b , ... , on a $m(a,b,...) = m_o(a,b,...)$, ou plutôt , pour parler le langage conforme à la virtualité de l'infini , qu'en fixant n'importe comment a , b , ... (autrement dit, en fixant arbitrairement un objet de la sorte considérée) , on a cette égalité. On commence par dire : " Soit $\underline{o}$ un objet de la sorte considérée , dont a , b, ... sont les valeurs des paramètres . Supposons que $m(a,b,...) \neq m_o(a,b,...)$. Alors , ou bien $m(a,b,...) < m_o(a,b,...)$ ou bien $m(a,b,...) > m_o(a,b,...)$ " . On considère d'abord le premier cas . Alors , en vertu de la théorie d'Eudoxe , il existe une valeur e de M telle que $m_o(a,b,...) - m(a,b,...) > e$ (à remarquer que la théorie d'Eudoxe , et la mathématique grecque en général, n'admet pas la valeur 0 des grandeurs) . Considérons un e arbitraire . D'autre part en prenant un i arbitraire , on trouve , par une recurrence convenable (en général , par une construction) , pour tout $j \leq i$, une valeur $m_j^{(i)}$ de M , dont on peut prouver que $m_j^{(i)} \leq m(a,b,...)$. On calcule, en fonction de i , une majorante de $m_o(a,b,...) - m_i^{(i)}$. Si , en plus , on prouve que , e étant fixé n'importe comment , il existe un $i = i(e)$ tel que $m_o(a,b,...)- m_i^{(i)} < e$, l'impossibilité de ce premier cas est prouvé , car on a une contradiction pour $e < m_o(a,b,...) - m(a,b,...)$, et un tel e existe . Le second cas se liquide (si possible) d'une manière analogue . Enfin , on peut aussi prendre e inférieur à la différence de $m(a,b,...)$ et de $m_o(a,b,...)$ quelque soit son sens , et de chercher les $m_i^{(i)}$ dont les différences avec $m(a,b,...)$ et $m_o(a,b,...)$ soient toutes les deux $< \frac{1}{2} e$.

On voit que , dans ce type de raisonnement , toutes les infinités , qui y interviennent , sont traitées d'une manière virtuelle , et qu'autrement n'y interviennent que les négations , les quantificateurs existentiels et certaines recurrences finies et fixées dans le raisonnement , qui les concerne . Les notions de convergence et de limite n'y interviennent pas . Elles peuvent bien entendu , intervenir dans la recherche heuristique préliminaire de $m_o(a,b,\ldots)$ (et d'autant plus que , de notre point de vue moderne , cette méthode semble les suggérer) , mais cette recherche reste dans la tête du chercheur , et , s'il est un mathématicien grec (de l'époque considérée) bien orthodoxe , il la considère comme pas rigoureuse , et la garde pour lui . Tel était le cas d'Archimède , sauf qu'il a osé d'en parler dans sa " Méthode " [17].

Les " principes de continuité " ont aussi passé tels quels le cas d'éléatisme . En effet , " le mouvement ayant été démontré en marchant " , il n'y avait aucun obstacle à ce qu'un point puisse parcourir un morceau de ligne d'un unique mouvement continu en passant par tous les points intermédiaires . On pouvait , d'ailleurs , décomposer ce mouvement en un nombre fini de mouvements partiels successifs , mais il était interdit de le considérer comme décomposé en un nombre infini de mouvements partiels ou éffectue par des " sauts de puce " de plus en plus petits vers la limite [18].

Dans sa conférence mentionnée , M. André Weil a dit (je cite de mémoire , et peut-être pas littéralement) : " Une idée ne devient une idée mathématique que le jour , où elle a des conséquences mathématiques , c'est-à-dire conduit aux théorèmes . Ainsi , l'idée de l'infini n'est devenue une idée mathématique qu'à partir de Cantor . " C'est , à mon avis , exact quant au fond , mais exprimé d'une manière trop restrictive . Une idée peut avoir une influence sur la mathématique sans conduire directement aux théorèmes , soit qu'elle impose certaines manières de faire les démonstrations , soit qu'elle bloque ou freine certaines théories peu compatibles avec elle , donc empêche l'eclosion de certains théorèmes , soit qu'elle stimule le developpement de certaines théories . Tel a été le cas de l'idée d'infiniment petit (dont on sait , après les recherches d' A. Robinson , qu'elle n'était pas si complètement fausse qu'on pensait auparavant), qui a stimulé pendant le 18^e siècle et le début du 19^e , grâce au bon système des notations de Leibniz qu'elle a suggéré et aux images intuitifs qu'elle fournissait , le developpement des calculs différentiel , integral et des variations, ainsi que de leurs applications . Il est difficile de ne pas considérer cette idée comme une idée mathématique , bien qu'elle n'a conduit directement à aucun

(17) . *Mais , contrairement à ce qu'affirme Heath , c'est Archimède qui a raison , quand il considère les raisonnements de sa " Méthode " comme non rigoureux. En effet , pour les rendre rigoureux , il aurait fallu soit introduire la notion de limite , ce que la philosophie de l'époque interdisait , soit se placer dans l'analyse non-standard de A. Robinson , ce qui était impensable pour Archimède .*

(18) . *C'est ce que veut dire Aristote quand il affirme que l'infini " par division " (διαίρεσις) est aussi un infini en puissance .*

nouveau théorème . Il est exact que l'infini n'était pas une idée mathématique jusqu'à Cantor à condition d'entendre par " infini " l'infini actuel général . Par contre , l'infini dénombrable potentiel et actuel l'a été depuis qu'on s'est occupé des suites , des séries et de leur convergence (même s'agissant seule - ment des suites et des séries particulières) . Quant à l'infini virtuel , a-t-il été une idée mathématique en mathématique grecque antique ? Je pense que oui . Je crois avoir suffisemment montré comment il a influencé la forme des démonstrations . Il est vraisemblable que c'est lui , qui a empêché l'apparition de la théorie de convergence . Car il est difficile de penser qu'un ma - thématicien comme Archimède , qui a tant manié la méthode d'exhaustion , n'a pas eu l'idée de convergence des suites et des séries . Par contre , il n'est pas impossible (comme je vais le montrer plus loin) que la virtualité de l'infini ait stimulé l'apparition de la théorie des rapports d'Eudoxe .

Avant de quitter la philosophie et passer à la crise des irrationnels et ses conséquences , regardons brièvement la suite des événements , car certains ont influencé la mathématique . Premièrement , on constate le retour complet au point de vue de sens commun . De nouveau , le monde , les choses c'est ce qu'on sent , et ils sont comme on les sent . Quand Socrate cite l'exemple de la di - sparition d'une chose vue quand on ferme les yeux , il y voit la preuve pas de ce que la chose vue ne coïncide pas avec ce qu'on voit , mais de ce qu'on ne peut pas connaître complètement la chose par ce qu'on en sent : le problème métaphysique se mue , chez lui , en problème gnoséologique . On lisait encore Parménide , mais à la manière des Eléates - littéralement et sans rien comprendre . Le problème central de la philosophie devient celui de l'opposition entre l'être immuable , considéré comme seul intelligible (et là , presque tous les philosophes ont adopté le point de vue des Eléates) et l' " incompréhensible " devenir dont la réalité est pourtant attestée par nos sens , par notre monde " sensible " . La " sphère " de la " voie de la vérité " n'est pas comprise comme l'état momentané de conscience du sujet , formant une unité syncrétique inséparable et close en soi sauf par intuitions illusoires , mais comme la description de l' " être " abstrait incompatible avec le devenir . C'est ainsi que Parménide commence à apparaître comme le fondateur de l'ontologie , ce qui le fait classer plus tard , d'une manière érronée , parmi les " idéalistes " (19). Il s'agissait , du moins pour ceux qui ne voulaient pas nier la réalité du monde sensible , de montrer la compatibilité de l'être et de devenir , d'expliquer le devenir à partir de l'être . Ainsi , le problème de l'existence de la pluralité (du moins , finie) s'efface (car la pluralité existe sûrement dans le monde sensible interprété du point de vue du sens commun) , et se remplace par celui de la dérivation de la pluralité (et du monde sensible en général) à partir de " un " (qui coïncide avec l'"être" intélligible) , ce qui donne lieu aux spéculations mystiques chez Platon et , surtout , plus tard, chez les Néoplatoniciens , qui ressemblent étrangement aux mythes héllènes le plus primitifs .

Les philosophes , qui ont relevé le défi éléate - Anaxagore , Empedocle , Démocrite - considéraient que le monde est formé des entités homogènes , ayant tous les attributs de l'"être" (en particulier , chez Démocrite c'étaient des atomes) , tout devenir étant dû à leur mélange (ou séparation) ou à leurs mouvements . Leur philosophie est sans intérêt pour cette étude excepté la remarque que Démocrite continue à ne pas craindre l'infini malgré les apories de Zenon . D'autre part sont apparus les philosophes en quelque sorte antimétaphysiques , ennemis d'abstraction , se fiant uniquement au sens commun et au langage - Sophistes et Socrate . C'était le commencement de la philosophie discursive , qui , le plus souvent , se " paie de mots " , croyant résoudre ainsi les difficultés , bien qu'il lui arrive parfois de parler de vrais problèmes . Dans le sillage de Socrate , vint Platon .

Platon suggère , d'abord , par son " mythe de la caverne " , que le monde

(19) . *En fait , la philosophie de Parménide , surtout sa " voie de la vérité ", est indifférente par rapport au couple idéalisme-matérialisme , qui se situe au-delà de la charnière " voie de la vérité "-parménidisme ouvert . En effet , une fois se trouvant sur le terrain du parménidisme ouvert , on peut adopter un des trois points de vue suivants : 1) il n'existe , dans l'univers , que des sujets avec seulement leur conscience , et les " choses " ne sont que des constructions à partir des contenus de leurs états psychiques . C'est le point de vue subjectiviste , qui semble être , dans une certaine mésure , celui de Leibniz , et auquel appartiennent Berkeley , Mach , Husserl et phénoménologistes , etc... 2) l'univers se sépare en deux composantes de nature différente : l'esprit et la matière . Les consciences et le psychisme sont de l'ordre de l'esprit , tandis que les entités materielles en sont dépourvues . Les sujets réels sont formés par l'union d'un " corps " matériel et d'une " âme " spirituelle (la formation et le fonctionnement de cet union n'ayant jamais été expliqués) , qui le dirige . C'est le point de vue dualiste , dont le représentant le plus typique semble être Descartes , mais qui a été celui de beaucoup de philosophes ; 3) l'univers ne se sépare pas en un monde d'esprit et un monde de la matière . Il n'y a pas de psychisme sans support matériel . Ce point de vue est dit matérialiste, et par opposition à lui , on range souvent les deux autres points de vue ensemble sous le nom d'idéalisme . On voit que le parménidisme ouvert est compatible avec chacun de ces points de vue , et que la " voie de la vérité " est sans rapport avec eux .*

sensible en devenir n'est pas la réalité la plus profonde , mais seulement le reflet d'un autre univers , celui de l'être . Par cette démarche , Platon apparait comme un lointain prédécesseur de Kant . Comme Kant (et contrairement à Parménide) , il ne place pas cet autre univers ni dans la conscience du sujet (qui correspond à l' "observateur transcendental " de Kant) , ni dans le "monde sensible" (qui correspond aux " phénomènes " de Kant) , mais au-delà . Mais là finit la ressemblance . Tandis que , chez Kant , cet autre univers est sa " noumène " , où , grosso modo , à tout objet du monde sensible (" objet phénoménal ") correspond un " objet en soi " inaccéssible au sujet , chez Platon c'est l'univers des " idées " , en relation à la fois avec le sujet et le monde sensible , l'idée ne correspondant pas à un objet sensible , mais à autre chose, qui peut être une catégorie de tels objets . Qu'est qu'une idée chez Platon ? Prenons , par exemple , l' "idée de triangle" . Premièrement , c'est la manière de sentir du sujet , qui lui permet de saisir cette notion , autrement dit , du point de vue parménidien , l'intuition (illusoire) de triangle . Deuxièmement, c'est la propriété , pour un objet du monde sensible , d'être un triangle . Troisièmement , c'est un prototype idéal de tout triangle " sensible " , qui en est une réalisation imparfaite . Jusqu'à là , chacun de ces sens nous est compréhensible , et seule leur amalgamation en une entité unique heurte nos habitudes mentales (il faut dire , toutefois , que dans la théorie des ensembles il y a des glissements analogues : ainsi , la notion de cardinal de Cantor , qui est la propriété commune des ensembles pouvant être mis en correspondance bijective , a été remplacée , dans le point de vue de von Neumann , par un prototype , qui est un ensemble bien ordonné particulier de cette classe). Mais , ensuite , on quitte le terrain de ce qui nous semble " rationnel " , car non seulement les objets sensibles sont les copies imparfaites de leurs idées , mais ces idées sont , en quelque sorte , la cause de leur existence comme les entités externes sont la cause des ombres dans la caverne . Les idées , étant intemporelles et immuables , ont tous les attributs de l'"être" . Elles forment aussi toute une hiérarchie que Platon considère comme intélligible , et , en particulier , il peut y avoir pas seulement les idées des choses sensibles , mais aussi les idées des idées , les idées des idées des idées , etc...,ce qui , si l'on donne à l'"idée" son second sens " propriété " , fait de Platon un lointain prédécesseur de Cantor et Frege.. avec l'extension en moins . Si réellement Platon aurait pu expliquer comment les idées engendrent les choses et leur changement , il aurait expliqué comment le devenir sensible provient de l'être intélligible . Le moins qu'on puisse dire est qu'il n'y a pas réussi . Mais , fortement influencé par la tradition pythagoricienne et par " tout est nombre " de Pythagore , il a cherché à le faire avec l'aide de la mathématique et de ce qu'il considérait comme idées mathématiques . C'est pourquoi , en philosophie de Platon , la mathématique apparait comme la première des sciences , et la plus nécéssaire aux philosophes . De là vient l'impulsion que Platon , qui s'est entouré des plus brillants et profonds mathématiciens de l'époque , a donné au développement de la mathématique grecque . C'est autour de lui que le mystère des rapports irrationnels a été éclairci successivement par deux voies différentes : la théorie antiphaîrétique (que certains attribuent à Théetète) et la théorie des rapports d' Eudoxe , qu'on a trouvé tous les corps réguliers , et qu'on a cherché à résoudre deux " grands problèmes "de l'antiquité (que nous savons irrésolubles par la règle et le compas): la duplication du cube et la quadrature du cercle . Mais , en dehors des idées des figures spatiales , quelles étaient les " idées " mathématiques de Platon? C'est , d'abord , l'idée de " Un ". A première vue , c'est la propriété d'être un objet individuel et le prototype idéal d'un tel objet : il est donc , par nature , insécable et ne manifeste aucune qualité particulière . Mais Platon a lu Parménide , bien entendu sans le comprendre , et il est persuadé que Parménide a dit des choses profondes (bien que peut-être trop absolues) et nullement des absurdités . Ainsi , Platon identifie son " idée de Un " avec " Un " de Parménide (dont il a , d'ailleurs , les caractères formels) . Comme Parménide dit que ce " Un " est le seul existant , donc (si l'on lit Parménide littéralement) équivaut à l'Univers , Platon considère l'idée de " Un " comme une idée suprême et construit toute une théorie mystique de génèse graduelle , dans le monde des idées , de toute pluralité (finie) et de toutes les idées à partir de celle de " Un " . Cette théorie ne nous intéresse pas ici , car elle n'a eu aucune influence sur la mathématique grecque [20]. Par contre , les idées des nombres , c'est-à-dire des entiers positifs , ont eu une telle influence . Qu'est l'idée de nombre $n > 0$ chez Platon ? C'est le prototype idéal de ce nombre , c'est-à-dire la collection de n " unités " , autrement dit de n objets, privés de toutes leurs qualités sauf l'individualité . Il est clair que les fractions rationnelles ne répondent pas à une telle idée de nombre , car l'unité , par sa nature , ne peut pas se partager . La seule idée des fractions admissible pour Platon était celle (déjà adopté par les pythagoriciens) de rapport des entiers . C'est pourquoi les mathématiciens de l'entourage de Platon se moquaient des calculateurs (" logisticiens ") " qui changent l'unité pour de la ménue monnaie " . Ainsi , avec Platon , les fractions ont perdu (pour 150 ans

(20) . *Toutefois , la génération graduelle des pluralités , qui est comme suit : la "dyade" fait passer de un à deux , de deux à trois , etc... , a eu des imitateurs à notre époque : il s'agit de la définition ordinale des cardinaux finis. Cette construction a été reprise telle quelle dans l'intuitionnisme de Brouwer, et le "prim" de Peano n'est pas autre chose que la "dyade" de Platon .*

environ) leur statut des nombres (et , même , d'opérateurs des grandeurs)et sont devenus un cas particulier des rapports [21]. Egalement , rien ne correspondait , dans le monde des idées de Platon , à la multiplication des segments qui

(21) . *La plupart des auteurs affirment que déjà l'école pythagoricienne , à cause de l'insécabilité de l'unité , a banni les fractions de la mathématique , en n'admettant que les rapports des entiers (positifs) , considérés comme radicalement différents des fractions correspondantes . Ils affirment que cet état de choses a duré jusqu'à Archimède . Mais certains de ces auteurs indiquent des faits , qui obligent à nuancer ces affirmations . Il est certain que les anciens Grecs donnaient le nom d' " ἀριθμός " seulement aux entiers > 1 , mais , en fait , les fractions de la " logistique " étaient aussi réssenties comme une sorte de nombres , car c'étaient des objets , avec lesquels on opérait , et qui servaient d'opérateurs de grandeurs . Ce sont bien les pythagoriciens , qui semblent avoir introduit la notation m/n des fractions , et qui , dés le début (vers 550 av. J.C.) , ont considéré les rapports des entiers . Mais il ne semble pas qu'ils opposaient ces rapports et les fractions correspondantes comme entités de nature différente (relations et objets) , mais , plutôt qu'ils les identifiaient . Déjà Pythagore lui-même , en règlant la longueur de la corde pour obtenir le son de hauteur donnée par rapport à celui , émis par une corde fixe , faisait jouer aux rapports le rôle des opérateurs des longueurs . Sans doute , à un certain moment , les pythagoriciens se sont aperçus que la notion de fraction des " logisticiens " en tant que " parts de l'unité " était incompatible avec l'indivisibilité de l'unité , et vers 400 av. J.C. (voir , p.ex.; B. L. van der Waerden , "Ontwakende Wetenschap" , chap. V , Nordhoof , Groningen 1950 ; I.G. Bachmakova , "Leçons de l'histoire des mathématiques dans l'ancienne Grèce" (en russe) , Leçon 2 , §1 , p.246 , Etudes historico-mathématiques (en russe) , n° 11 , Moscou 1958) , ils ont construit une théorie des rapports rationnels (devéloppée et perfectionnée par Archytas et Théetète) , qui ne contredisait pas cette indivisibilité . Mais cette théorie (qui était de 150 ans environ postérieure au début de l'école) n'était pas créée pour bannir les fractions , mais pour rendre leur théorie et leur usage plus rigoureux . Citons I. G. Bachmakova (ibid. , leçons 5-6 , §6, p. 322) : " En ce qui concerne les rapports d'entiers , il n'est pas douteux qu'en fait on les considérait toujours comme nombres généralisés en les identifiant avec les fractions . Ainsi faisait déjà Archytas , en passant , dans sa " théorie de l'harmonie " , des rapports des entiers à leurs " parts " (c.à.d. , parts fractionnaires) "... " Archimède , dans " La mésure du cercle " , aussi passe librement des rapports des entiers aux fractions " . Je ne suis pas d'accord avec " toujours " , car Platon (suivi par Aristote) a nettement opposé les rapports aux fractions comme entités de nature différente , et a banni les fractions de la mathématique théorique pour au moins 150 ans (450-300 av. J.C.) , car Euclide observe son interdit , et pas Archimède . C'était donc une éclipse temporaire de leur rôle de nombres , et nullement la réconduction d'un interdit pythagoricien . Archimède , dans presque tout son oeuvre , emploie les fractions comme opérateurs de grandeurs , mais aussi (et tout particulièrement dans sa "Mésure du cercle") effectue les opérations rationnelles sur les fractions , le plus souvent la multiplication , mais aussi l'addition et la division . Si l'on se souvient à quel point Archimède a été attaché à la rigueur (il n'a jamais voulu considérer comme rigoureuses les démonstrations de sa "Méthode") , il semble qu'il considérait cette manière de faire comme irréprochable . Il parait (voir E. Kolman , "Histoire de mathématique dans l'antiquité" (en russe) , p.74 , Moscou 1961) qu'Archimède et les mathématiciens plus tardifs répondaient à ceux , qui le leur reprochaient , en disant que déjà les " anciens " (c'est-à-dire , les pythagoriciens) procédaient ainsi .*

fut aussi interdite en tant que méthode de raisonnement .

Il est difficile de dire quel a été l'impact des apories de Zenon sur Platon et son école , et , en particulier si , et à partir de quand , l'emploi des suites infinies a été interdit . Il y a eu , dans l'école de Platon , deux théories des rapports irrationnels : la plus ancienne - antiphaïrétique , emploie de telles suites , tandis que la plus jeune , celle d'Eudoxe , se conforme strictement à l'interdit d'un tel emploi . Peut-être a-t-on refléchi , dans cette école , sur les apories , et en a-t-on tiré les conséquences un peu avant la théorie d'Eudoxe ?

Que dire d'Aristote , philosophe myope , mais homme de science remarquable[22]? Il a codifié les règles de la logique , mais on en usait en pratique avant lui . Il a souligné et précisé , grâce à ses concepts d'acte et de puissance , la virtualité de l'infini . Il a retréci la notion trop large d'idée , en ne parlant que des prédicats concernant les choses concrètes . Mais en ce qui concerne la mathématique , il n'a fait que cristalliser ce qui était déjà admis avant , bien qu'il ne faut pas sous-estimer l'influence de cette cristallisation sur les mathématiciens comme Euclide . Quant à sa " loi de compréhension et d'extension " , c'est une banalité , où le mot " extension " n'a pas du tout le sens qu'il a actuellement en logique : elle veut dire que si l'on restraint réellement un prédicat en y ajoutant une condition supplémentaire , tout objet satisfaisant au nouveau prédicat satisfait aussi à celui de départ , tandis qu'il existe des objets satisfaisant au prédicat de départ , mais pas au nouveau .

(22) . *Sans doute , a-t-il été trop souvent trompé par les apparences , surtout quand il voulait trop expliquer . Mais certains reproches qu'on lui fait sont fallacieux . Ainsi , sa mécanique , bien que fausse , n' est pas tout-à-fait absurde , car elle contient la théorie , exacte en première approximation , du mouvement uniforme d'un mobile dans un milieu avec frottement . Il a , certes , manqué celle du mouvement non-uniforme , qui est à la base de la mécanique de Newton . Mais pouvait-il y penser , vu que les Grecs considéraient le mouvement non-uniforme comme hautement inintelligible ? On lui a reproché d'avoir oublié dans sa logique les quantificateurs . Mais la virtualité de l'infini lui interdisait d'envisager (sauf pour les collections finies fixées) le quantificateur universel .*

§3. - Crise des irrationnels.

Comme on a déjà dit , c'est dans l'entourage de Platon qu'on a tenté et réussi à surmonter la crise declanchée par la découverte des rapports irrationnels , en les intégrant dans un système des notions cohérent . La première solution (que certains attribuent à Théetète) a été la théorie " antiphaîrétique " de ces rapports . Elle consiste à appliquer aux deux grandeurs , dont on considère le rapport , l'algorithme d'Euclide , ce qui revient , de notre point de vue , à dévélopper ce rapport en fraction continue

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

et de faire correspondre à ce rapport la suite (finie s'il est rationnel , infinie s'il ne l'est pas) a_0 , a_1 , a_2 ,... des éléments de ce dévéloppement , qu'on appelait son " antiphaîrésis " . Deux rapports sont considérés comme égaux s'il leur correspond une même suite d'entiers ainsi définie , et l'inégalité des rapports est déterminée , d'une manière évidente , par la parité de premier indice , à partir duquel leurs antiphaîrèses différent et par le sens de l'inégalité des éléments correspondants de leurs suites . Si l'on munit (de notre point de vue) les suites (a_i) des entiers de topologie de leur convergence formelle (deux suites étant d'autant plus proches que le premier indice , à partir duquel elles diffèrent est plus grand) et les rapports de la topologie usuelle des nombres réels , l'application précédente $\alpha \to (a_0,a_1,a_2 \dots)$ n'est pas continue , et ses points de discontinuité sont les rapports rationnels . Ce fait a créé , aux mathématiciens grecs , des difficultés énormes (et plus que techniques) quand ils ont cherché à fonder la théorie des irrationnels sur cette base : ils ont été obligés à recourir aux procédures non bornées et , même infinies , en particulier pour démontrer certains théorèmes (comme $(A:B) = (C:D) \Rightarrow (A:C) = (B:D)$) ou définir certaines opérations comme celle de composition $\alpha\beta$ des rapports α , β . En effet , si (a_i) , (b_i) , (c_i) sont les antiphaîrèses de α , β , $\alpha\beta$ respectivement , un c_i n'est determiné , en général , que par la donnée des a_q , b_q , q parcourant tous les indices $\leq j$, où $j \geq i$ dépend des α , β et n'est pas borné en fonction de i ; et si $\alpha\beta$ est rationnel sans que α (et β) le soit , ce fait ne peut être établi et les c_i (ou , même , un c_i particulier) ne peuvent se calculer qu'en utilisants les antiphaîrèses (a_i) et (b_i) en totalité . Il est vraisemblable que ce sont ces difficultés , qui ont incité les mathématiciens amis de Platon à prendre au sérieux les apories de Zenon et les ont incité à chercher une autre théorie des irrationnels n'employant pas les suites infinies [23].

Cette autre théorie , celle d'Eudoxe , est trop connue pour qu'on doive y insister beaucoup . C'est la théorie des coupures , mais dans le cadre de l'infini virtuel . Deux rapports (A:B) et (C:D) (où A, B sont des valeurs d'une même grandeur , et aussi C , D , mais ces deux grandeurs peuvent être différentes) sont égaux s'il n'existe aucun couple m , n d'entiers tels que $mA<nB$ et $mC>nD$ ou $mA>nB$ et $mC<nD$. On a $(A:B) < (C:D)$ s'il existe un tel couple avec $mA<nB$ et $mC>nD$, et on a $(A:B) > (C:D)$ s'il en existe un avec les inégalités inverses . Bien entendu , cela exige la démonstration (assez facile à faire) que les deux cas ne peuvent pas se présenter (avec les couples (m,n) différents) en même temps . Comme on voit , cette définition , qui n'emploie que le quantificateur existentiel et sa négation , et ne considère que les collections finies d'objets individuels , est en accord avec la virtualité de l'infini (mais nullement avec l'intuitionnisme ou constructivisme !) .

Euclide (à la suite d'Eudoxe) définit , à partir d'un rapport α , un certain nombre d'autres rapports qu'on écrirait aujourd'hui $1+\alpha$, $\alpha-1$ (si $\alpha>1$), $1/\alpha$, $\alpha/(\alpha-1) = 1/(1-(1/\alpha))$ (si $\alpha > 1$), α^2 α^3 , et , si α , β sont deux rapports , le " rapport composé " $\alpha\beta$. Les anciens Grecs ne considéraient pas les rapports comme nombres (surtout quand on comprenait le mot "nombre" au sens si restrictif de Platon) . Ce n'étaient même pas les objets , mais les relations d'objets , les seuls objets véritables étant les valeurs des grandeurs. C'est pourquoi les mathématiciens grecs répugnaient à opérer avec les rapports et , même , de les employer dans les démonstrations (bien que c'est arrivé parfois à Archimède) , où , sauf rares exceptions , on raisonnait directement sur les valeurs des grandeurs : ils servaient essentiellement pour exprimer les résultats finaux des théorèmes . C'est pourquoi il est anachronique de considérer $1+\alpha$,$\alpha-1$, $1/\alpha$, etc... comme opérations unaires et $\alpha\beta$ comme opération binaire: ce n'étaient que des constructions (ou définitions) en vue d'énoncés . Ceci dit , si l'on regarde , comme nous le faisons , les rapports comme nombres réels positifs , et les constructions précédentes comme les opérations sur ces nombres, toutes les opérations rationnelles peuvent s'en déduire : en effet , on a $\alpha+\beta = \alpha[1 + (\beta (1/\alpha))]$, $\alpha-\beta = \alpha [1 - (\beta (1/\alpha))]$ ($\alpha > \beta$) , $\alpha\beta$ est déjà défini et $\alpha/\beta = \alpha (1/\beta)$.

(23) . La théorie antiphaïrétique a , toutefois , laissé des traces dans les " Eléments " d'Euclide sous la forme de la proposition 2 du livre X . Toutefois , si l'on examine la démonstration d'Euclide , on constate que , malgré l'emploi du terme " jamais " dans l'énoncé , il l'a mise en accord avec les exigences de la virtualité de l'infini .

L'éxégèse de la théorie des rapports d'Eudoxe par les mathématiciens et les historiens des mathématiques actuels a posé un certain nombre de problèmes, auxquels , le plus souvent , ils ont donné des réponses anachroniques (parfois d'un anachronisme desarmant) , car ils se sont placés d'emblée au point de vue ensembliste , totalement étranger et , même , contraire à la mathématique de l'ancienne Grèce . Passons en révue ces problèmes :

1) Les rapports d'Eudoxe formaient-ils le demi-corps positif d'un sous-corps du corps réel (ordonné) ? La réponse catégorique est : non , et ceci pour plusieurs raisons : a)A cause de la virtualité de l'infini , le système de tous les rapports ne pouvait pas être envisagée par les anciens Grecs[24]; b) les rapports n'étaient pas des objets , mais des relations d'objets ; c) selon toute vraisemblance , les anciens Grecs n'ont jamais envisagé les constructions des rapports (y compris leur " composition ") comme opérations : en effet , comment se permettre d'opérer avec les entités qu'on ne considère pas comme des objets ? Par contre , l'absence de la définition explicite de l'addition $\alpha+\beta$ des rapports me parait plutôt une imperfection technique de la construction d'Eudoxe qu'une différence essentielle entre les rapports et les nombres réels : en effet, $\alpha+\beta$ est une superposition des $1+\alpha$, $1/\alpha$ et $\alpha\beta$, qui sont définies , donc peut être considérée comme définie implicitement . Ainsi , on peut dire que , malgré ce que les rapports et leurs propriétés prouvées par Eudoxe constituaient potentiellement le demi-corps positif d'un sous-corps du corps réel (du point de vue technique , la théorie d'Eudoxe contenait tout ce qu'il fallait pour cela) , Eudoxe , pour des raisons philosophiques , ne l'a construit qu'en "pointillé"[25].

(24) . *Ils ne pouvaient envisager que la propriété virtuelle d'être un rapport. On peut envisager les structures (forcement de premier ordre et d'arité finie) sur de telles propriétés virtuelles , mais définies virtuellement . Ainsi , si* p *est une telle propriété virtuelle , une loi de composition interne et binaire n'est pas une application de* $p\times p$ *dans* p *(cela n'a pas de sens) , mais un procédé faisant correspondre à un couple arbitraire d'objets* (x,y) *ayant la propriété* p *un objet* $f(x,y)$ *ayant la même propriété . Et une relation d'arité* n *n'est un sous-ensemble de la puissance cartésienne* p^n *de* p *(elle est aussi virtuelle) , mais , pour un* n*-uple arbitraire* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *d'objets ayant la propriété* p *, le critère pour qu'il satisfasse à ladite relation .Bien entendu , les axiomes de telles structures virtuelles ne doivent employer que la logique du premier ordre sans usage explicite du quantificateur universel . On voit à quel point sont inadéquates , pour de telles structures virtuelles et leurs supports (et anarchroniques quand il s'agit des rapports et des valeurs des grandeurs chez les anciens Grecs) les termes comme "forment" , "ensemble" , "système" , "domaine" employés par A. Youchkévitch , S. Zervos , N. Bourbaki , etc...*

(25) . *A. Frenkel et I.Bar-Hillel ont écrit , dans leurs " Foundations of the set theory " , " La théorie des proportions aurait pu donner aux Grecs la possibilité de définir la notion de* <u>*nombre irrationnel*</u> *et de dévélopper la théorie arithmétique du* <u>*continu*</u> *; pourtant , on ne sait pas pourquoi , ils ne l'ont pas fait." . Je pense qu'on sait très bien pourquoi .*

La répugnance des mathématiciens grecs à calculer avec les rapports (qu'il est difficile d'expliquer par les seules raisons techniques) se constate facilement . Ainsi , Euclide n'emploie que deux fois le rapport composé : dans la proposition 23 du livre VI et dans son analogue pour les rapports des entiers, qui est la proposition 5 du livre VIII . Encore n'en use-t-il que pour formuler les énoncés , et nullement dans les calculs .A. Youchkévitch affirme (p.101 du t. I de son " Histoire de la Mathématique ") qu'"Archimède a calculé avec virtuosité " à l'aide des rapports . Mais si l'on regarde de plus près , on constate que , sauf dans un petit nombre de cas [11 endroits (pp. 64 ,65 , 88, 116, 118 , 135 , 136 , 148 (2 fois) , 219 , 285) sur 326 pages du texte anglais (traduction de Heath de 1897 réédité par Dover Publications) de ses Oeuvres], Archimède n'use que l'égalité et l'inégalité des rapports pour exprimer les résultats de ses calculs , mais ces calculs (en effet , pleins souvent de virtuosité) sont faits directement sur les valeurs des grandeurs grâce à la " multiplication des segments " . Et dans le petit nombre d'endroits cités , où Archimède s'est servi des rapports composés , il l'a fait probablement parce qu'il a eu l'opportunité d'arriver rapidement au but par application évidente de leur définition (A:B)(B:C) = (A:C) .

Un point de vue particulièrement anti-historique a été exprimé par N.Bourbaki (Topologie générale , chap. IV (Nombres réels) , Note historique , p. 144-145 ,Hermann ,Paris 1942) . Il affirme que les rapports quelconques (comme c'est effectivement le cas pour les rapports rationnels , du moins quand ils étaient identifiés avec les fractions) ont joué le rôle des opérateurs des grandeurs continues quelconques (citons : "On notera que , pour Eudoxe , les grandeurs d'une espèce donnée forment un système à <u>une</u> loi de composition interne (l'addition) , mais que ce système possède une loi de composition <u>externe</u> avec pour opérateurs les <u>rapports de grandeurs</u> ... " Que ces rapports forment un <u>domaine d'opérateurs</u> pour toute espèce de grandeur ..."..." Ainsi , l'idée géniale d'Eudoxe permettait d'identifier entre eux les domaines d'opérateurs définis pour toute espèce de grandeur .") . Or , du point de vue historique , cette affirmation , indépendamment de sa formulation en langage ensembliste inadéquat , est une bourde monumentale . En effet , s'il en était ainsi , on aurait dû rencontrer , dans les textes mathématiques grecs , les expressions de la forme (A:B)C (où A , B , C sont des valeurs des grandeurs , dont A , B d'une même grandeur et telles que (A:B) ne soit pas supposé rationnel) ou , tout au moins, (A:B)B (qui est = A) . Or , on ne trouve rien de semblable ni dans Euclide , ni , sauf si (A:B) est un rapport numérique rationnel , dans Archimède . Pourtant , l'oeuvre d'Archimède pillule de produits des grandeurs géométriques par les fractions rationnelles , de produits de segments ou d'un segment par une aire , et on y rencontre aussi les sommes et les produits des fractions et les composés (A:B)(C:D) des rapports . Aucun commentateur n'en parle non plus . Ainsi , les rapports n'ont jamais été employés comme opérateurs de grandeurs par les mathématiciens grecs , sauf dans l'imagination collective de M. Bourbaki.

La suite n'est pas tellement mieux . Bourbaki continue : " Le domaine d'opérateur universel ainsi construit , était donc pour les mathématiciens grecs, l'équivalent de ce qu'est pour nous l'ensemble des nombres réels ; il est clair d'ailleurs qu'avec <u>l'addition</u> des grandeurs et <u>la multiplication</u> des rapports de grandeurs , ils possedaient l'équivalent de ce qu'est pour nous le <u>corps</u> de nombres réels , bien que sous une forme beaucoup moins maniable .". Il est éxagéré de dire que les rapports étaient , chez les anciens Grecs , analogues à nos nombres réels , car ils n'en assumaient que très partiellement le rôle (en particulier , ils n'étaient pas les opérateurs de grandeurs) . Par ailleurs , pour des raisons métaphysiques : virtualité de l'infini , non-opérabilité des rapports (considérés comme relations et pas comme objets) ils ne constituaient pas une véritable structure , un "système" . Mais pourtant la théorie d'Eudoxe définit le produit (explicitement , sous le nom du "rapport composé") et la somme (implicitement , comme une superposition des $1+\alpha$, $1/\alpha$ et $\alpha\beta$) de deux rapports α , β . Ainsi , si l'on se place , comme Bourbaki , au point de vue ensembliste , la construction d'Eudoxe fournit une structure équivalente à la partie positive d'un corps de nombres réels . Bourbaki ne le remarque pas car , pour des raisons dogmatiques (dans son "Algèbre" , il ne considère comme lois de composition que les seules lois de compositions binaires) , il ne remarque pas la présence , dans cette structure , des lois de composition unaires $1+\alpha$, $1/\alpha$, etc... (dans son "Algèbre" , il camoufle , pour rester fidèle à son idée fixe, les ensembles des lois de composition unaires en une "loi de composition externe" , notion d'ailleurs utile dans certains cas) . Ainsi , si les Grecs n'avaient pas de structure des nombres réels , cela n'était pas dû aux raisons techniques , mais uniquement métaphysiques , qui empêchent aussi bien de jouer un tel rôle à son substitut que Bourbaki suggère , et qui est , au fond , parfaitement inutile . D'aillers , aucun mathématicien grec n'en a eu l'idée et ne s'en est jamais servi . Qu'est ce substitut ? S'il s'agit d'une seule grandeur avec les rapports comme opérateurs , c'est (du point de vue ensembliste) une structure équivalente à la partie positive d'un espace vectoriel totalement ordonné sur un corps de nombres réels , qui , à l'isomorphie près , ne depend pas du choix de cette grandeur ; et s'il s'agit du système de toutes les grandeurs connues aux Grecs avec les rapports comme opérateurs et , en plus , les opérations comme multiplications des segments , il s'agit d'une partie d'une structure appelée corpoïde (j'y reviendrai dans un autre article) .

2) Etant donné deux valeurs arbitraires A , B d'une grandeur et une valeur C d'une grandeur pouvant être différente , existe-t-il (ou , du moins , est pensable) toujours la valeur D de la seconde grandeur telle que (A:B) = (C:D)? (bien entendu , cette question concerne la mathématique grecque , et les grandeurs en question sont supposées "continues" au sens grec) ? Cette question peut être formulée comme suit "de l'extérieur" en langage ensembliste : l'ensemble des mésures à l'aide d'une unité fixée de toutes les valeurs possibles d'une grandeur ("continue") est-il indépendant du choix de la grandeur et de celui de l'unité de mésure ? Bien que cette affirmation n'est nulle part formulée , l'étude attentive des textes (surtout , des démonstrations) mathématiques grecs (en particulier , d'Euclide) ne laisse pas de doute que la réponse est : oui , et c'est l'avis à peu près général (formulé avec plus ou moins de conviction) des historiens de mathématique . Mais l'unanimité cesse quand on demande pourquoi les anciens Grecs ont adopté ce principe . En particulier , MM. H. Hasse et H. Scholz avancent l'explication , qui est , grosso modo , la suivante : ces auteurs supposent qu'étant donné deux suites $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ et $V_1, V_2, \ldots V_n, \ldots$ de valeurs d'une certaine grandeur , dont la première croissante et seconde décroissante , et telles que n'importe lequel terme de la seconde suite soit superieur à n'importe lequel terme de la première , les anciens Grecs considéraient comme évident qu'il existe une valeur de cette grandeur séparant les deux suites (ils n'affirment pas , d'ailleurs , que les Grecs l'ont formulé comme un principe explicite , mais seulement qu'ils l'appliquaient dans des cas particuliers , qui se présentaient) . Ceci posé , entourons la valeur B de la première grandeur des suites $\alpha_1 A$, $\alpha_2 A$, ..., $\alpha_n A$,.et $\beta_1 A$, $\beta_2 A$,..., $\beta_n A$,... des multiples rationnels de A , la première suite tendant vers B en croissant, et la seconde en décroissant , ce qui s'exprime par la condition que $\beta_n A - \alpha_n A$ devient inférieur à toute valeur fixée de la grandeur pour n assez grand . Alors , $\alpha_1 C$, $\alpha_2 C$,..., $\alpha_n C$,... et $\beta_1 C$, $\beta_2 C$,..., $\beta_n C$,... sont des suites analogues pour la seconde grandeur , et on montre facilement , que la valeur séparante D , dont l'existence est assurée par le principe énoncé , est unique , et que (A:B) = (C:D) . Supposons qu'un tel raisonnement ait réellement existé , il ne pouvait pas apparaître avant que la notion des rapports irrationnels ait été un peu éclaircie , c'est-à-dire pas avant le début du 4^{me} siècle av. J.C., seulement au temps de Platon . D'autre part , à l'époque de la théorie d'Eudoxe, une telle démonstration de l'existence de D n'aurait pas été admissible , car l'emploi des suites infinies était proscrit . Il est vrai qu'on peut modifier le raisonnement précédent en le rendant compatible avec la virtualité de l'infini : en effet , si (A:B) est irrationnel , B n'est pas parmi les multiples rationnels αA de A , mais définit une coupure parmi ces multiples , et $\alpha A \to \alpha C$

transforme cette coupure en une des multiples rationnels de C . Cette coupure peut être définie à partir de celle de départ à l'aide seulement des quantificateurs existentiels et des rapports des entiers , et on aurait une démonstration , compatible avec la virtualité de l'infini , en adoptant , pour cette coupure particulière , le principe de l'existence d'une valeur séparante ses deux classes . Mais si tel était le cas , Platon et surtout Euclide aurait dû parler de cette démonstration . Or , ce n'est le cas , et on ne trouve dans aucun texte mathématique ou philosophique la plus faible allusion à ce sujet . Ainsi , l'explication de MM. Hasse et Scholz est une hypothèse gratuite , ne s'appuyant sur aucun texte et n'ayant pas de base historique . Tout au plus pourrait-on supposer qu'un tel raisonnement ait pu être formulé au temps de la théorie antiphaïrétique , mais sans avoir jamais pris la forme pouvant lui donner ultérieurement une valeur démonstrative . Mais même cela est très douteux , car rien ne prouve que les anciens Grecs admettaient (ou , même , ont envisagé) , même dans des cas particuliers , le principe de "complétude dedekindienne" que ces auteurs leur attribuent . Et , d'autre part , il existe l'explication plus simple et naturelle que voici , qui ne fait intervenir aucun procédé infini , de ce qu'ils admettaient l'existence de la quatrième proportionnelle : a) avant la découverte de l'incommensurabilité , les fractions étaient considérées , dans l'école pythagoricienne comme opérateurs des grandeurs divisibles , et , ainsi , les rapports des valeurs d'une grandeur quelconque à une unité arbitrairement fixée étaient tous les rapports des entiers ; b) pour des raisons heuristiques , dont nous ignorons les détails, les mathématiciens grecs ont dû avoir la tendance de penser qu'il en est de même pour les rapports quelconques , c'est-à-dire qu'il n'y a aucune raison pour que les valeurs possibles des rapports dependent de grandeurs et de l'unité choisie ; c) et , surtout , cette intuition était confirmée par les faits , car , pour toutes les grandeurs connues de Grecs , elle pouvait être démontrée ; en effet : α) ceci est vrai pour les longueurs , car si , sur une droite ox , on prend les segments oa , oc de longueurs respectives A , C , et si sur le perpendiculaire ap à ox on prend un segment ab de longueur B , ob coupe le perpendiculaire cq à ox en un point d , tel que , si D est la longueur de cd , on ait (A:B) = (C:D) ; β) considérons les rectangles d'une hauteur fixée . Le rapport de leurs aires est le même que celui des longueurs de leurs bases . Donc , tout rapport des longueurs est parmi ceux des aires . Vice versa comme les Grecs admettaient que toute aire est l'aire d'un carré convenable , considérons deux carrés , dont les aires soient l'unité choisie d'aire et une aire choisie. Remplaçons , à l'aide d'une constructuction bien connue , le second carré par un rectangle de même aire , dont la hauteur est égale au côté du premier carré. Alors , le rapport de l'aire du second carré à celui du premier est égal à celui de la base du rectangle au côté du premier carré , donc est parmi les rapports des longueurs ; γ) par des constructions analogues un peu plus compliquées , on prouve que les rapports des volumes sont les mêmes que ceux des segments ; δ) les Grecs admettaient qu'on peut réaliser (du moins , en pensée) tous les poids à l'aide d'une même substance homogène , auquel cas les rapports des poids des corps sont les mêmes que ceux de leurs volumes ; ε) si l'on considère un mobile parcourant une droite ou une circonférence avec une vitesse constante (tel était , par exemple , le mouvement apparent des étoiles fixes dans le ciel) , le rapport des temps de parcours est le même que celui de leurs longueurs ; ζ) on considère les mobiles parcourant , d'un mouvement uniforme , pendant un temps fixé , une portion de droite ; alors , les rapports de leurs vitesses sont les mêmes que ceux des chemins parcourus ; on peut , d'ailleurs , s'imaginer un mobile , qui , pendant le temps fixé , parcourt , d' un mouvement uniforme , une longueur assignée ; η) si l'on admet , comme les Grecs le faisaient , la physique d'Aristote , et si l'on a les forces qu'on peut appliquer aux mobiles identiques se deplaçant dans un même milieu , et restant constantes assez longtemps pour que le mouvement uniforme soit atteint, les rapports de ces forces seront les mêmes que celles des vitesses finales des mobiles correspondants ; ϑ) les rapports des angles seront les mêmes que ceux des longueurs des arcs qu'ils découpent sur les circonférences d'un rayon fixé; ι) les rapports des poids spécifiques des substances (réelles ou imaginées) sont les mêmes que ceux des poids des corps de volume fixé , faits avec ces substances .

3) Si l'on regarde les rapports grecs "du dehors" en se plaçant au point de vue ensembliste , c'est-à -dire si l'on fait "notre" métamathématique de la mathématique grecque , on remarque , d'abord , qu'on peut faire correspondre canoniquement et injectivement à tout rapport un nombre réel , et que si l'on considère cette correspondance comme une identification , l'ensemble des rapports grecs devient la partie positive d'un sous-corps du corps réel , où la théorie d'Eudoxe définit une structure équivalente avec celle qu'y induit la structure du corps réel . On peut poser la question : quel est ce sous-corps ? est-il complet? Il est à remarquer que si le mot "complet" est compris dans le sens de notre mathématique classique , la réponse positive à la seconde question équivaut à ce que ce sous-corps (qu'on appelera le"corps réel grec") coïncide avec notre corps réel .

Comme on sait , la source de toute la mathématique était , pour les anciens Grecs , l'espace , dont ils croyaient avoir une intuition parfaite , comme nos mathématiciens classiques croient avoir une intuition parfaite des suites infinies des entiers et de leur ensemble , c'est-à-dire du corps réel . En fait les deux intuitions sont également illusoires (sauf que la nôtre est de nature plus générale et abstraite) . Certes , le corps réel grec contient tous les nombres réels , qui correspondent aux rapports que les mathématiciens grecs ont défini ou que la mathématique grecque est susceptible de définir à titre individuel - disons qu'ils sont nommables au sens grec ou forment le demi-corps réel nommable grec - mais au delà les deux intuitions sont sinon divergentes , du moins incommunicables , et on peut dire que le corps réel grec est un corps intermédiaire totalement indéterminé , en quelque sorte complètement flou , entre leur demi-corps réel nommable et notre corps réel .

Le corps réel grec est-il complet ? Il l'est certainement au sens grec , car , de leur point de vue , il contient tout rapport imaginable . Comme on a vu, on ne peut pas dire s'il est complet au sens de notre mathématique classique : à vrai dire , la question est dépourvue de sens (la logique contemporaine connait des sous-corps du corps réel , qui sont complets en un certain sens propre, sans l'être au sens de la mathématique classique : tels sont le corps des nombres réels constructibles , qui est complet au sens constructif , le corps réel du système définitionniste kroneckerien , qui est le corps des nombres pouvant être définis dans un certain système de définitions , qui l'est au sens de la nommabilité correspondante ; mais on peut prouver qu'ils ne sont pas complets au sens dédékindien) . La notion générale de coupure ne pouvant pas être définie en mathématique grecque à cause de la virtualité de l'infini , on ne peut pas poser , dans le cadre de cette mathématique , la question de complétude dédékindienne intrinsèque des rapports grecs (ou , ce qui revient au même , des valeurs d'une grandeur) . Mais , du dehors , on peut poser cette question , qui est alors la suivante : peut-on définir , dans le corps réel grec , par les moyens de la mathématique grecque , une coupure , qui soit une lacune ? Comme toute coupure du corps réel grec est déjà définie par sa trace sur le demi-corps réel nommable grec et comme un élément du corps réel grec définissant une coupure nommable de ce corps est unique , donc nommable , on peut remplacer cette question par celle de l'existence des lacunes nommables du demi-corps réel nommable grec. Cette question est susceptible d'avoir une réponse de principe , et je pense que de telles lacunes n'existent pas . Mais je n'en ai pas de démonstration , et cette question n'est pas triviale (car on a vu , en discutant le problème de la quatrième proportionnelle , qu'il existe , en mathématique grecque , des moyens de définir les coupures autrement que par la donnée d'un élément définissant) , ni facile , (car elle exige une étude approfondie de la définissabilité en mathématique grecque) , ni , peut-être résoluble . Elle mériterait peut-être l'attention des logiciens et des historiens de logique .

Quels ont été les changements apportés par les mathématiciens du point de vue qui nous intéresse , après Platon et Eudoxe ? On a déjà assez parlé d'Euclide, pour qu'il soit suffisant de souligner l'importance et la perfection , du point de vue grec , de sa construction axiomatique et déductive de toute la mathématique de son époque , et de le laver de quelques reproches immérités . On dit souvent que son système des axiomes était incomplet et ses définitions déscriptives parasites . Mais , pour les anciens Grecs , la base , en particulier démonstrative , de la mathématique était l'espace , qui était un donné à la fois intuitif et réel et dont les objets devaient , selon Platon , être appréhendés grâce à leurs idées . Les définitions descriptives d'Euclide servaient précisement à éveiller ces idées , et ses récours à l'intuition spatiale pour certaines questions (position , intersections) étaient légitimes de ce point de vue .

J'ai déjà beaucoup parlé d'Archimède . Sans parler de ses découvertes proprement mathématiques , qui en font probablement le plus grand mathématicien de l'antiquité , on remarque ceci du point de vue , qui nous intéresse : on voit , dans son oeuvre , une véritable réssurection des fractions dans leur rôle de nombres et aussi celle de la multiplication des segments , toutes les deux employées massivement . Ou bien il a osé braver les interdits les plus dogmatiques de Platon , ou bien ces interdits étaient déjà caduques à cette époque . En plus , il a défini dans "Sur les spirales" , ou il a osé de s'occuper d'une courbe non classique , la notion de l'angle de rotation (positive) , qui permet de donner aux rapports des valeurs de cette grandeur toutes les valeurs possibles (pour les Grecs) . Enfin , il a défini une nouvelle grandeur-le poids spécifique[26].

En ce qui concerne Diophante, sa pratique des fractions ne diffère pas tellement de celle d'Archimède , sauf qu'il leur a donné explicitement le nom de nombres et les a détaché de leur rôle des opérateurs de grandeurs , qui est prépondérant chez Archimède . Et , pendant les derniers siècles de l'Empire romain, s'efface la séparation entre la "mathématique théorique" et la "Logistique", et réapparait (comme écrit Bourbaki) , ou , peut-être simplement apparait , surtout chez les mathématiciens appliqués comme Ptolomée , la notion "naîve" du nombre réel , ce qui était , peut-être , une amorce de l'évolution , chez les Arabes et les mathématiciens occidentaux , vers la transformation des rapports irrationnels en nombres .

(26) . *Je n'ai pas lu , en traductions de l'original , les oeuvres d'Eratosphène et d'Appolonius . Il serait utile de vérifier qu'elles n'infirment pas les affirmations de cet article et , en particulier , qu'elles ne comportent pas d'expressions de la forme (A:B)C , où (A:B) est un rapport irrationnel , et que la composition des rapports y est rare .*