Séminaire de philosophie
et mathématiques

G. Rauzy

Nombres et jeux selon J. H. Conway

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1978, fascicule 1
« Nombres et jeux selon J.H. Conway », , p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1978___1_A1_0>

NOMBRES ET JEUX SELON J. H. CONWAY

par G. RAUZY

Marseille - Luminy

La théorie des jeux selon J. H. Conway présente un double intérêt : c'est, tout d'abord, une mathématisation agréable de certaines situations (jeux impartiaux et nombres de Grundy notamment) ; par ailleurs, l'identification de certains jeux aux nombres permet de donner une construction de la classe de ces derniers, selon une axiomatique nouvelle, s'appuyant sur une intuition différente de celle à laquelle nous sommes habitués. Ainsi, un nombre sera positif si, dans le jeu qui lui est associé, le joueur de gauche peut toujours gagner : c'est à tout le moins une manière plaisante de démontrer des inégalités ...

Je me propose ici d'exposer ce qu'est un jeu selon Conway, de décrire les relations et opérations sur la collection des jeux, et, enfin, de montrer comment une sous-collection s'identifie naturellement à la collection des nombres.

1. LA COLLECTION DES JEUX

Les jeux dont il sera question ici sont des jeux à deux joueurs, ne faisant pas intervenir le hasard et se terminant nécessairement par la victoire de l'un des deux joueurs.

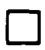
Ce sont des jeux de position : à chaque étape, le jeu est dans une position déterminée et chacun des deux joueurs que nous appellerons le joueur de gauche et le joueur de droite (ou par leurs initiales le joueur L et le joueur R) doit, si c'est à son tour de jouer, amener le jeu dans une autre position parmi une liste de possibilités fixées par la règle du jeu.

Les positions pouvant ainsi suivre une position donnée x seront appelées les options de cette position, leur ensemble étant noté $Op(x)$. En général, la règle du jeu ne sera pas symétrique, de sorte que l'ensemble $Op(x)$ sera la réunion de l'ensemble $Op_L(x)$ (options pour le joueur de gauche) et de l'ensemble $Op_R(x)$ (options pour le joueur de droite).

Un joueur a perdu (et l'autre joueur a gagné) si le jeu est dans une position telle que l'ensemble des options pour ce joueur est vide, alors que c'est à son tour de jouer.

Un exemple typique de jeu est constitué par une portion d'échiquier sur laquelle les joueurs placent alternativement des dominos rectangulaires de manière à ce qu'un domino occupe exactement deux cases contigües de l'échiquier, le joueur de gauche posant ses dominos verticalement, le joueur de droite horizontalement, les dominos ne pouvant se chevaucher.

Si la portion d'échiquier est constituée d'une seule case comme ci-dessous

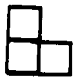


aucun des joueurs ne peut poser de domino : le joueur qui commence perd.

Si la portion d'échiquier est constituée de deux cases disposées comme ci-dessous

le joueur de gauche peut poser un domino, le joueur de droite ne le peut pas : quelque soit le joueur qui commence, le joueur L gagne.

Enfin, si la portion d'échiquier est constituée de trois cases disposées comme ci-dessous



le joueur qui commence gagne nécessairement.

Au contraire des fabricants de jeux, nous négligerons "l'habillage" du jeu pour ne retenir que la structure sous jacente, c'est à dire la manière dont s'enchainent les diverses positions : un jeu est ainsi déterminé par sa position initiale, les options de celle-ci étant de nouveaux jeux "plus simples" (cette expression sera explicitée dans la suite).

Ceci nous amène à la définition de CONWAY :

1) Un jeu est un couple (L, R) où L et R sont des ensembles de jeux,
2) Tout jeu est construit de cette manière.

Disons comment on joue à un tel jeu $x = (L, R)$; si c'est par exemple au joueur de gauche de commencer il choisit un élément y dans l'ensemble L (si c'est au joueur de droite y est choisi dans l'ensemble R) ; y est alors un nouveau jeu c'est à dire de la forme $y = (L', R')$, c'est maintenant au joueur de droite de jouer, il choisit un élément z dans l'ensemble R' etc...
Si à un moment donné l'un des deux ensembles L ou R est vide et si c'est au joueur correspondant de jouer, il a perdu.

La première partie de la définition est ainsi claire, elle consiste à identifier un jeu et sa position initiale.

La deuxième partie demande à être explicitée ; elle permet d'assurer que tout jeu se termine par la victoire d un des deux joueurs : c'est ce que nous allons voir au paragraphe suivant.

2. RECURRENCE SUR LES JEUX

21 - Etant donné un jeu $x = (L, R)$ nous noterons encore $Op(x) = L \cup R$, $Op_L(x) = L$ et $Op_R(x) = R$ les options de x.

Si, par ailleurs, $L = \{a, \ldots, \ell\}$, $R = \{m, \ldots, r\}$ nous écrirons :

$$x = \{a, \ldots, \ell \mid m, \ldots, r\} .$$

Nous désignerons par x_L (respectivement x_R) un élément quelconque "générique" de $Op_L(x)$ (respectivement $Op_R(x)$) de sorte que x s'écrira en abrégé :

$$x = \{x_L \mid x_R\} .$$

22 - Voyons maintenant comment construire des jeux. Au départ aucun jeu n'a encore été construit, le seul ensemble de jeu que l'on connaisse est donc l'ensemble vide.

Le premier jeu que l'on puisse construire est donc le jeu $(\emptyset, \emptyset)$ c'est à dire encore $\{ \mid \}$. Nous désignerons ce jeu par le symbole 0 . Une représentation de ce jeu a déjà été donnée : dans le jeu de dominos, c'est le jeu où l'échiquier ne comportait qu'une seule case ; évidemment dans ce jeu le deuxième joueur gagne.

Maintenant, nous disposons de deux ensembles de jeux, l'ensemble vide et l'ensemble à un seul élément, l'élément 0 . Nous pouvons alors construire trois nouveaux jeux :

$$\{0 \mid \} \quad , \quad \{ \mid 0\} \quad \text{et} \quad \{0 \mid 0\}$$

que nous désignerons respectivement par les symboles :

$$1 \quad , \quad -1 \quad \text{et} \quad *$$

Nous avons déjà rencontré les jeux 1 et $*$: dans le jeu de dominos, ce sont les jeux où l'échiquier est constitué de deux et trois cases disposées comme indiqué précédemment.

Le jeu -1 pourrait aussi se représenter de cette manière, l'échiquier comportant deux cases formant un rectangle horizontal.

Nous pouvons maintenant construire de nouveaux jeux en utilisant pour L et R des parties de l'ensemble $\{0, 1, -1, *\}$ et ainsi de suite...

23 - Il est alors naturel de repérer l'étape où apparaît pour la première fois un jeu dans cette construction par un nombre que l'on appellera <u>la date de naissance du jeu</u>.

Ainsi, le jeu 0 a pour date de naissance 0 .

les jeux $1, -1, *$ ont pour date de naissance 1 .

le jeu $\{0 \mid 1\}$ par exemple a pour date de naissance 2 .

On peut ainsi définir pour tout entier positif des jeux ayant cet entier pour date de naissance.
On désignera en particulier par n le jeu de date de naissance n défini par :

$$0 = \{\ \mid\ \} \quad , \quad 1 = \{0 \mid\ \} \quad , \quad 2 = \{0, 1 \mid\},\ldots,\ n+1 = \{0, 1, \ldots, n \mid\ \}$$

et par $*n$ le jeu de date de naissance n défini par :

$$*0 = 0\ ,\ *1 = *,\ *2 = \{*0, *1 \mid *0, *1\},\ldots,\ *(n+1) = \{*0,\ldots,*n \mid *0,\ldots,*n\}$$

Remarquons que tous ces jeux ont un nombre fini de positions, et se terminent nécessairement puisqu'à chaque coup on est ramené à un jeu plus simple, c'est à dire de date de naissance antérieure au précédent. Il n'y a alors aucune raison de se limiter à des jeux où l'ensemble des positions est fini pourvu que la propriété précédente reste vraie : on va ainsi construire des jeux dont la date de naissance soit un ordinal.

Ainsi on définira :

$$\omega = \{0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots\ |\}$$

$$\omega + 1 = \{0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ \omega\ |\}$$

....

$$2\,\omega = \{0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ \omega,\ \omega+1,\ \ldots,\ \omega+n,\ \ldots\ |\}\,.$$

De manière plus précise, on définit une relation fonctionnelle sur la collection des ordinaux c'est à dire qu'on fait correspondre à tout ordinal α un ensemble V_α bien déterminé, par la formule

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \underset{\sim}{P}\,(V_\beta) \times \underset{\sim}{P}(V_\beta)$$

et la définition de Conway se formalise de la manière suivante :

" x est un jeu, si et seulement si il existe un ordinal α tel que x appartient à V_α ".

La date de naissance de x est alors définie comme le plus petit ordinal α tel que x appartienne à V_α. Comme il n'existe pas de chaine descendante stricte d'ordinaux $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_n > \ldots$, un jeu se termine toujours en un nombre fini d'étapes par la victoire de l'un des joueurs.

24 - Il peut sembler artificiel et en tout cas inutile d'inclure la théorie des jeux ainsi définie dans une théorie des ensembles avec une axiomatique déterminée en passant par l'intermédiaire des ordinaux.

De ce point de vue, il peut sembler plus naturel de considérer la théorie des jeux comme un système formel avec des prédicats du type "x est un jeu", la deuxième partie de la définition constituant en quelque sorte l'axiome de fondation de cette théorie, en ce sens qu'il exprime l'impossibilité de l'existence d'une suite $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ de jeux telle que x_{n+1} est une option de x_n. La deuxième partie de la définition serait donc dans ce cas explicitée sous forme d'un schéma d'axiomes : "soit P une propriété ; si, quelque soit le jeu x, le fait que la propriété P soit vraie pour toute option de x entraine qu'elle est vraie pour x alors P est vraie pour n'importe quel jeu".

(Dans le cadre de la théorie des ensembles ce résultat se démontre par récurrence sur la date de naissance ; il est à remarquer que cette récurrence se fait sans premier terme : en effet, l'ensemble des options du jeu 0 étant vide, la propriété P est automatiquement satisfaite pour toute option de ce jeu, donc par récurrence pour ce jeu lui-même, puis pour 1, -1 et $*$ et ainsi de suite ...).

Quelque soit le point de vue adopté, une autre forme de la construction ainsi présentée va permettre des définitions par récurrence. Notons, par exemple, pour un jeu x, $J_{RL}(x)$ la propriété "dans x, si R commence, L gagne" et de même, $J_{LL}(x)$ la propriété "dans x, si L commence, L gagne".

Les collections J_{RL} et J_{LL} sont alors parfaitement définies par récurrence par les propriétés :

$$\begin{cases} J_{RL}(x) \Leftrightarrow \forall\, y \in Op_R(x) \quad J_{LL}(y) \\ J_{LL}(x) \Leftrightarrow \exists\, y \in Op_L(x) \quad J_{RL}(y) \end{cases}$$

qui signifient $J_{RL}(x)$ si et seulement si quelque soit ce que joue R, la position y à laquelle on aboutit est telle que $J_{LL}(y)$ c'est à dire que L jouant dans cette position peut gagner, et de même $J_{LL}(x)$ si L a une manière de jouer telle que la position y ainsi choisie est telle que $J_{RL}(y)$ ... Partant d'un jeu x tel que $J_{RL}(x)$ et où R commence, L est ainsi assuré de toujours pouvoir jouer quelque soit le coup précédemment joué par R : comme le jeu s'arrête nécessairement, il ne peut s'arrêter qu'à un moment où c'est à R de jouer et où l'ensemble de ses options est vide ; L gagne donc.

3. RELATIONS ET OPERATIONS SUR LES JEUX

31 - De la même manière que nous avons défini les collections J_{RL} et J_{LL}, nous pouvons définir les collections J_{LR} (quand L commence, R gagne) et J_{RR}.

Remarquons que pour un jeu x on a toujours "$J_{RL}(x)$ ou $J_{RR}(x)$" et "$J_{LR}(x)$ ou $J_{LL}(x)$" .

Il est intéressant d'expliciter les atomes de "l'algèbre" engendrée par ces collections ; nous les nommerons les <u>issues</u> du jeu :

$$\begin{cases} J_{LR} \cap J_{RR} & \text{"R gagne"} & \text{Exemple : le jeu } -1 \\ J_{LL} \cap J_{RL} & \text{"L gagne"} & \text{Exemple : le jeu } 1 \\ J_{LL} \cap J_{RR} & \text{"le premier joueur gagne"} & \text{Exemple : le jeu } * \\ J_{LR} \cap J_{RL} & \text{"le deuxième joueur gagne"} & \text{Exemple : le jeu } 0 \end{cases}$$

Par récurrence on démontrera que <u>tout jeu a une issue,</u> <u>et que les quatre issues ainsi explicitées s'excluent mutuellement.</u>

32 - Nous définissons la <u>somme</u> de deux jeux x et y de la manière suivante : supposons par exemple que ce soit au joueur R de commencer ; il choisit l'un des deux jeux x ou y , par exemple x ,et joue dedans, c'est à dire choisit un certain x_R ; c'est maintenant au joueur L de jouer, il choisit alors l'un des deux jeux x_R ou y (tels que les a laissés R) et joue dedans, il choisit donc soit x_{RL} laissant à R les deux jeux x_{RL} et y soit y_L laissant maintenant à R les deux jeux x_R et y_L , et ainsi de suite.

La somme est donc définie par récurrence par la formule :

$$x + y = \{x_L + y \ , \ x + y_L \mid x_R + y \ , \ x + y_R\}$$

Le jeu de Nim se présente ainsi comme somme de jeux plus simples : une position de ce jeu est constituée d'un certain nombre de tas de cailloux ou d'allumettes, le premier tas contient a objets, le deuxième b, ..., le k-ème m . Un coup consiste à retirer de l'un des tas un nombre arbitraire d'objets (y compris tous les objets), ce nombre devant être au moins égal à 1 . En outre, un seul tas peut être touché à chaque coup.

Quand tous les tas sont vides, le joueur dont c'est le tour de jouer a perdu. (Une variante plus souvent jouée consiste à jouer à qui perd gagne : le joueur retirant le dernier objet du dernier tas non vide a perdu).

Si l'on note $*a$ le jeu de Nim à un seul tas contenant a objets, on voit que le jeu de Nim général est une somme $*a + *b + \dots + *m$, de jeux à un seul tas.

33 - Dualité. Une dualité s'introduit naturellement dans la collection des jeux qui consiste à intervertir le rôle de la droite et de la gauche. Le jeu ainsi obtenu à partir d'un jeu x sera noté $-x$ pour des raisons qui apparaitront dans la suite, et sera donc défini par récurrence par la formule :

$$-x = \{-x_R \mid -x_L\}$$

Ainsi $-0 = 0$, -1 est le jeu précédemment noté de cette manière, $-* = *$ (plus généralement, si x est un jeu de Nim $-x = x$).

Notons encore que quelque soit le jeu x , dans le jeu $x + (-x)$ le deuxième joueur gagne puisqu'il peut répondre à n'importe quel coup joué par le premier joueur dans l'un des jeux x ou $-x$ par le coup symétrique joué dans l'autre jeu.

4. RELATION D'EQUIVALENCE ET RELATION D'ORDRE SUR LES JEUX

41 - Evidemment, ce qui nous intéresse tout d'abord pour un jeu déterminé est de connaître son issue. Mais, ayant défini plusieurs transformations sur les jeux dans le paragraphe précédent, nous sommes amenés plutôt à examiner dans quelle mesure ces transformations influent sur l'issue des jeux auxquels on les applique.

Ainsi, il apparaît naturel de considérer comme équivalents deux jeux x et y si, quelque soit le jeu z , les jeux $x + z$ et $y + z$ ont mêmes issues.

Remarquons tout d'abord que, quelque soit le jeu z , $0 + z$ et z ont même issue. Ainsi x sera équivalent à 0 si quelque soit z $x + z$ et z ont même issue ; en particulier $x + 0$ et 0 devront avoir même issue, donc dans x le deuxième joueur gagnera.

Il n'est pas difficile de voir que la réciproque est vraie, c'est à dire que x est équivalent à 0 , si, et seulement si, dans x le deuxième joueur gagne.

Plus généralement, x et y sont équivalents si et seulement si le jeu $x + (- y)$ qu'on notera $x - y$ est équivalent à 0 .

Dans une théorie formelle, plutôt que de parler d'équivalence, on parlera d'égalité de deux jeux (on définira la relation $x = y$), un élément (L, R) de la classe d'équivalence du jeu x étant alors appelé une forme du jeu x .

L'égalité étant ainsi définie, on vérifie aisément que la collection des jeux munie de la loi $+$ satisfait aux axiomes définissant sur les ensembles la structure de groupe abélien, l'élément neutre étant le jeu 0 , le symétrique de x étant le jeu $-x$.

On dira que la collection des jeux munie de cette loi $+$ forme un «groupe abélien» , les guillemets rappelant qu'il s'agit d'une collection et non d'un ensemble.

Remarque : D'autres transformations s'introduisent de manière plus ou moins naturelle sur les jeux : la plus simple étant le jeu «à qui perd gagne» ; on peut se demander si les classes d'équivalence que nous avons introduites se conservent dans cette transformation. On voit aisément qu'il n'en est rien et l'on pourrait être, de ce fait, tenté d'introduire d'autres notions d'équivalence : l'expérience de quelques jeux de position montre néanmoins que la transformation «qui perd gagne» affecte en général profondément la structure d'un jeu.

42 - Dans le cadre du programme tracé en début de ce paragraphe, une dissymétrisation des rôles joués par la droite et la gauche va permettre d'enrichir la structure de la collection des jeux. Pour cela nous introduisons une relation de préordre :

"$x < y$ si, quelque soit le jeu z , dans $x + z$ L gagne alors il en est de même dans $y + z$ " .

Comme précédemment, on commence par chercher les jeux x tels que $0 < x$, c'est à dire encore les jeux x tels que, quelque soit le jeu z dans lequel L gagne, il en est de même dans le jeu $x + z$.

Supposons alors que x est un tel jeu et que dans x, si R commence, R peut gagner. Prenons pour z le jeu $\{0 \mid -x\}$. Dans z, quelque soit le joueur qui commence, L peut gagner (si L commence c'est évident, si R commence c'est au tour de L à jouer dans $-x$ dans lequel il peut gagner par définition de la dualité). Par contre, dans $x + z$, si R commence il peut choisir de jouer dans z, laissant ainsi à L la position $x - x$ dans laquelle, comme on l'a déjà remarqué, le deuxième joueur c'est à dire R peut gagner.

Donc, nécessairement dans x, si R commence, L gagne. Il est aisé de montrer la réciproque et par conséquent $0 < x$ est équivalent à l'énoncé "dans x si R commence, L gagne" c'est à dire, encore à la réunion des deux issues "L gagne" et "le deuxième joueur gagne", la relation $x < y$ étant évidemment équivalente à la relation $0 < y - x$.

Il résulte de ce qui précède que la relation d'équivalence associée à la relation de préordre, c'est à dire la relation "$x < y$ et $y < x$", est précisément la relation d'équivalence définie dans le paragraphe 41 et que nous avons appelé égalité. Pour cette raison, nous noterons maintenant $\leq$ la relation de préordre, et définirons les relations habituelles :

$x \geq y$ si par définition $y \leq x$

$x < y$ si par définition $x \leq y$ et non $x = y$.

43 - Compte tenu du résultat obtenu dans le paragraphe **42**, on peut maintenant inverser l'ordre de présentation, c'est à dire d'une part donner de la relation $\leq$ une définition par récurrence :

$$\begin{aligned} x \leq y \Leftrightarrow \forall x_L \quad & \text{non} \quad y \leq x_L \\ \text{et } \forall y_R \quad & \text{non} \quad y_R \leq x . \end{aligned}$$

d'autre part donner de l'égalité la définition :

$$x = y \Leftrightarrow x \leq y \quad \text{et} \quad y \leq x \ .$$

Le résultat du paragraphe 42 se présentera alors sous forme d'un théorème :

$$x \leq y \Leftrightarrow \forall z \quad x + z > 0 \Rightarrow y + z > 0 \ .$$

et on pourra en donner aisément une démonstration par récurrence, utilisant seulement les axiomes de la théorie des jeux ainsi définie : on voit ici apparaître nettement l'avantage que présente l'interprétation de cette théorie comme représentant des jeux réels. Chaque démonstration pourra se faire de deux manières, soit à l'intérieur du système formel , soit en s'aidant de l'interprétation et en "jouant" de telle ou telle façon comme nous l'avons fait jusqu'ici.

Pour nous résumer rappelons donc à ce stade les divers axiomes définissant la collection des jeux.

1) Tout jeu est un couple (L, R) où L et R sont des ensembles de jeux.
2) Tout jeu est construit de cette manière, c'est à dire par exemple le schéma d'axiomes du paragraphe 24.
3) $x + y = \{x_L + y \ , \ x + y_L \mid x_R + y \ , \ x + y_R\}$.
4) $x \leq y \Leftrightarrow (\forall x_L \text{ non } (y \leq x_L))$ et $(\forall y_R \text{ non } (y_R \leq x))$.
5) $x = y \Leftrightarrow x \leq y$ et $y \leq x$.

On montrera alors aisément que munie des lois $+$ et $\leq$ la collection des jeux forme un «groupe abélien ordonné» (les guillemets ayant toujours le sens du paragraphe 41), l'élément neutre étant défini par : $0 = (\emptyset \ , \emptyset)$, le symétrique de x étant défini par : $-x = \{-x_R \mid -x_L\}$.

Remarque : On aurait pu introduire a-priori d'autres relations de préordre sur la collection des jeux par exemple $x < y$ si quelque soit z , si dans $z + x$ le premier (resp. le deuxième) joueur gagne, il en est de même dans $z + y$. Une analyse analogue à celle que nous avons faite montre que les diverses relations introduites ainsi sont en fait équivalentes à l'égalité déjà définie.

Nous allons maintenant identifier dans la collection des jeux un «sous-groupe» remarquable totalement ordonné.

6. LA COLLECTION No

61 - Il est aisé de voir que pour tout jeu x on a :

$$\forall x_L \quad \text{non} \quad (x \leq x_L) \quad \text{et} \quad \forall x_R \quad \text{non} \quad (x_R \leq x) \ .$$

Si nous voulons fabriquer une sous-collection totalement ordonnée de la collection des jeux, on devra donc imposer pour tout élément x de cette collection les conditions :

$$x_L < x < x_R \ .$$

D'autre part, il est naturel (et nécessaire pour utiliser des démonstrations par récurrence) d'imposer à la sous-collection de contenir toutes les positions d'un jeu dès qu'elle contient ce jeu. Dans ces conditions, l'inégalité $x_L < x_R$ est vraie dès que la relation non $(x_R \leq x_L)$ est satisfaite.

Il est remarquable que ces conditions suffisent pour définir une sous-collection totalement ordonnée.

Plus précisément désignons par No la collection définie par les axiomes suivants :

1) Si L et R sont des ensembles dont les éléments appartiennent à No et vérifient : $\forall a \in L \ \ \forall b \in R$ non $(b \leq a)$, alors (L, R) est un élément de No .

2) Tout élément de No est construit de cette manière (même signification que dans le paragraphe 24.)

3) $x + y = \{x_L + y \ , \ x + y_L \mid x_R + y \ , \ x + y_R\}$.

4) $x \leq y \Leftrightarrow (\forall x_L \text{ non } (y \leq x_L)) \text{ et } (\forall y_R \text{ non } (y_R \leq x))$.

5) $x = y \Leftrightarrow (x \leq y) \text{ et } (y \leq x)$.

On démontrera alors le théorème suivant :

No <u>muni des opérations</u> + <u>et de la relation</u> $\leq$ <u>forme un</u> « <u>groupe totalement ordonné</u> » , <u>l'élément neutre et le symétrique d'un élément étant définis comme dans la paragraphe 43.</u>

62 - Il nous faut maintenant « reconnaître » les nombres au sens usuel dans la collection No que nous venons de définir.

Pour cela, désignons par On la sous-collection de No formée des x de la forme $(L, \emptyset)$. Remarquons que, si L est un ensemble quelconque d'éléments de No , $(L, \emptyset)$ est automatiquement un élément de No (puisqu'il n'existe pas de x_R !) donc de On .

On voit par ailleurs par récurrence que, si x est un jeu quelconque, la collection des éléments α de On tels que non $(x \leq \alpha)$ forme un <u>ensemble</u> $L(x)$, et que si α appartient à On , $\alpha = (L(\alpha), \emptyset)$, la relation $\alpha \leq \beta$ étant équivalente à $L(\alpha) \subset L(\beta)$.

En particulier, $0 = \{ \mid \}$, $1 = \{0 \mid \}, \ldots, n = \{0, 1, \ldots, n-1 \mid \}, \ldots$ $\omega = \{0, 1, \ldots, n, \ldots \mid \}$ sont des éléments de On , et on reconnait là une analogie évidente avec la construction classique des ordinaux.

Remarquons, d'autre part, que On n'est pas un ensemble (sinon $(On, \emptyset)$ serait un élément de On , ce qui est contradictoire).

On montre alors aisément que la relation $\leq$ est sur la collection On une relation de bon ordre, ce qui assure (voir par exemple KRIVINE : Théorie axiomatique des ensembles - P.U.F 1969, page 29) l'existence d'un isomorphisme d'ordre entre la collection On et la collection des ordinaux.

Bien entendu 0 est le plus petit élément de On , 1 le plus petit élément distinct de 0 , etc... , ω le plus petit élément infini (i.e de date de naissance infinie).

63 - Nous avons donc en particulier « reconnu » dans No les entiers positifs 0, 1, ..., n, ... , donc aussi les entiers relatifs par passage au symétrique (ce qui justifie les notations adoptées jusqu'à présent).

Considérons maintenant l'élément $\{0 \mid 1\}$ dont on vérifie immédiatement qu'il appartient à No ; une démonstration immédiate en termes de jeux permet de voir que $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = 1$ (c'est à dire que dans le jeu $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} + (-1)$ le deuxième joueur gagne). No étant totalement ordonné, il existe un seul élément au plus dans No vérifiant l'égalité $x + x = 1$.

Il est donc naturel d'identifier $\{0 \mid 1\}$ à $\frac{1}{2}$.

En continuant ainsi, on fabrique $\{0 \mid \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$, $\{\frac{1}{2}, 1\} = \frac{3}{4}$ etc... et de manière générale, on identifie tout élément de No de date de naissance finie à un rationnel dyadique de la forme $\frac{m}{2^n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

64 - Pour aller plus loin, il est nécessaire de considérer les éléments de No de date de naissance ω et , comme on se doute, les nombres réels vont apparaître sous la forme classique de coupures (L, R) définies sur l'ensemble des rationnels dyadiques.

Il faut néanmoins prendre un certain nombre de précautions car par exemple $\omega = \{0, \dots, n, \dots \mid \}$ n'est pas un nombre réel, non plus d'ailleurs que l'élément de No : $1/\omega = \{0 \mid \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, 1\}$.

Il est plus simple du point de vue opératoire de donner une définition intrinsèque des réels en disant qu'un élément x de No est un <u>nombre réel</u> si :

1) $\exists n \quad -n < x < n$

2) $x = \{\dots, x - \frac{1}{2^n}, \dots \mid \dots, x + \frac{1}{2^n}, \dots\}$.

On démontre alors aisément sur cette définition que la collection des nombres réels est un ensemble, qui, muni de la loi $+$ et de la relation $\leq$, forme <u>un groupe totalement ordonné satisfaisant à l'axiome de la borne supérieure et tel que</u> $\forall x \quad \exists y \quad y + y = x$.

On reconnait là l'existence d'un isomorphisme entre cet ensemble et l'ensemble des nombres réels au sens usuel.

65 - Sur l'ensemble des nombres réels au sens usuel existe une deuxième opération : la multiplication ; peut-on définir, de même, de manière intrinsèque une multiplication sur la collection No ?

La réponse est oui , la multiplication se définissant par récurrence par la relation :

6) $x y = \{x_L y + x y_L - x_L y_L, x_R y + x y_R - x_R y_R \mid x y_R + x_L y - x_L y_R, x y_L + x_R y - x_R y_L\}$.

La définition semble à première vue compliquée ; il faut cependant remarquer , d'une part, qu'une définition plus simple du type $xy = \{x_L y, x y_L \mid x_R y, x y_R\}$, outre qu'elle ne satisferait aux propriétés d'ordre de la multiplication que pour des x et y positifs, ne serait rien d'autre au changement de notation près qu'une définition de l'addition (!), d'autre part que la définition 6) exprime en fait les propriétés les plus simples que l'on puisse attendre de la multiplication, c'est à dire des propriétés du type :

$(x - x_L)(y - y_L) > 0$ et $(x - x_L)(y - y_R) < 0$.

Munis de cette multiplication on démontre alors que la collection No forme un « corps totalement ordonné », l'élément unité étant celui que nous avons déjà noté 1 . On peut également donner une définition intrinsèque de l'inverse d'un élément de No : remarquons cependant qu'elle est nécessairement assez compliquée, car l'inverse d'un nombre de date de naissance finie comme 3 , par exemple, est un élément de date de naissance infinie, en fait :

$$1/3 = \{\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}, \ldots \mid \ldots, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \ldots, \frac{1}{2}\}$$

On peut représenter tout élément de No comme une série formelle généralisée (selon des puissances de ω), ce qui permet de définir la somme d'une série dans No (la notion de limite est assez délicate à formaliser puisque par exemple il existe « beaucoup » d'éléments de No strictement positifs, inférieurs à tout nombre réel positif).

On montre alors que No est totalement réel au sens d'Artin-Schreier, et maximal en ce sens que tout corps totalement réel a un plongement dans No : il fournit donc un modèle pour l'analyse non standard, mais, bien entendu, a une structure beaucoup plus riche qu'un quelconque autre modèle.

66 - Donnons maintenant un exemple de jeu, dont il n'est pas à priori évident qu'il appartienne à No , bien qu'il se joue avec des nombres.
Soit x un nombre réel. On lui associe le jeu $\boxed{x}$ où les options de $\boxed{x}$ sont les jeux $\boxed{y}$ soumis aux règles suivantes :

(i) si x est réel non rationnel, y est rationnel.

(ii) si x est rationnel non entier, y est rationnel de dénominateur strictement inférieur.

(iii) si x est entier, y est entier et $|y| < |x|$.

(iv) si $\boxed{y}$ est option gauche de $\boxed{x}$, dans tous les cas $y > x$.

(v) si $\boxed{y}$ est option droite de $\boxed{x}$, dans tous les cas $y < x$.

Considérons alors le jeu $\boxed{x} + \boxed{x} + \boxed{x}$ dans lequel on donne le droit au joueur de droite de passer une fois (c'est à dire le jeu $\boxed{x} + \boxed{x} + \boxed{x} - 1$). A quelle condition ce jeu est-il nul ? Si on a montré que, quelque soit x réel, le jeu $\boxed{x}$ appartient à No , on doit donc résoudre l'équation : $\boxed{x} = \frac{1}{3}$.

La résolution même de cette équation conduit à un résultat a priori surprenant, on doit en effet avoir l'égalité :

$$x = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$$

(Remarquons que l'on pouvait être sûr de toute manière que x était irrationnel, le jeu $1/3$ ayant une date de naissance infinie).

7. AUTRES RESULTATS

Disons qu'un jeu est impartial si les options gauches et droites sont les mêmes, et sont elles-mêmes des jeux impartiaux. On en a vu un exemple dans le jeu de Nim. Plus généralement, on peut définir pour tout ordinal α un jeu impartial (le jeu de Nim où il n'y aurait qu'un seul tas de α cailloux), de la manière suivante :

$$*\alpha = (B \mid B) \quad \text{où} \quad B = \{*\beta \text{ , } \beta \text{ ordinal strictement inférieur à } \alpha\} .$$

On démontre alors que tout jeu impartial est égal à un jeu du type $*\alpha$, α étant alors appelé le nombre de Grundy du jeu donné. Par exemple, le jeu de Marienbad (jeu de Nim avec position de départ 3, 5, 7) est tel que :

$$*3 + *5 + *7 = *1 \ .$$

Ce résultat permet de retrouver la méthode classique (addition binaire digitale) pour jouer au jeu de Nim : dans le jeu $*\alpha$, le premier joueur gagne toujours, sauf si $\alpha = 0$ auquel cas le deuxième joueur gagne.

D'autre part, ce résultat permet de doter la collection On des ordinaux d'une structure de groupe ; l'addition que nous noterons $+_2$ est définie de la manière suivante :

$$\alpha +_2 \beta = \gamma \Leftrightarrow *\alpha + *\beta = *\gamma .$$

Evidemment, on a toujours $\alpha +_2 \alpha = 0$.

On peut alors de manière analogue à celle utilisée dans le paragraphe précédent définir sur On une multiplication $\times_2$ qui peut du reste s'interpréter en termes de jeux (voir H. W. LENSTRA - Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux - 1977/1978).

On montre encore que On muni de ces deux lois forme « un corps de caractéristique 2 algébriquement clos » .

Référence : H. G. CONWAY Numbers and Games

D. E. KNUTH Surreal Numbers