Séminaire de philosophie et mathématiques

R. Apery

Mesures d'indépendance linéaire, d'irrationalité de transcendance

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1977, fascicule 2
« Mesure d'irrationalité et de transcendance », , p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1977___2_A1_0>

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MESURES D'INDEPENDANCE LINEAIRE, D'IRRATIONALITE

DE TRANSCENDANCE

par R. APERY

Introduction

Dieudonné, dans la préface d'un de ses ouvrages, résume justement le calcul infinitésimal en trois mots :

Majorer, Minorer, Approcher .

A côté des nombreux exposés consacrés à la majoration ou à l'approximation, cette conférence traite de la minoration élément essentiel de la mathématique constructive.

Rappelons le point de vue constructif sur les réels : la définition complète d'un réel exige un duplexe, c'est-à-dire une suite de Cauchy de rationnels munie d'un régulateur de convergence : les duplexes s'additionnent et se multiplient sans difficulté. Par contre les coupures représentent le plus souvent des définitions formelles plus susceptibles de poser des problèmes que d'en résoudre (nous en donnerons un exemple).

Etant donnés deux duplexes, diverses situations intéressantes peuvent se produire :

1°) Ils peuvent définir le même réel, il suffit pour cela qu'on puisse majorer $|u_n - v_n|$ par une fonction de n qui tend vers 0 .

2°) Ils peuvent définir des réels différents : il arrive qu'on puisse démontrer qu'il serait absurde qu'ils définissent le même réel.

3°) Ils peuvent être séparés, c'est-à-dire qu'on peut pour n assez grand, <u>minorer</u> $|u_n - v_n|$ par une constante absolue.

Deux réels séparés sont distincts, mais deux réels ne sont pas nécessairement séparés. Il peut aussi arriver que deux réels ne soient ni différents ni égaux.

A beaucoup de problèmes non résolus, (conjecture de Fermat, la conjecture de Rieman, etc.) on peut associer un réel bien défini qui sera nul ou non nul selon que la conjecture est vraie ou fausse, or personne ne peut affirmer avec certitude (à moins de prendre comme Hilbert ses espérances pour des démonstrations) que les conjectures citées (et il y en a beaucoup d'autres) seront un jour résolues.

La minoration intervient aussi pour définir correctement la continuité uniforme. Une application f d'un espace métrique E dans un espace métrique F est uniformément continue si la distance de tout point a de E au complémentaire de l'image réciproque de la boule de centre $f(a)$ de rayon h est minorée par une fonction de h indépendante de a.

I - MESURE DE NON INTEGRITE

La première question qu'on peut se poser sur le réel représenté par un duplexe est de savoir s'il est entier. Cette question souvent facile à trancher négativement (π, e, $\sqrt{2}$, constante d'Euler) n'est pas toujours triviale.

Par exemple

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743,99999999999992...$$

On voit que seul un calcul de précision considérable par rapport aux moyens usuels de calculs permet d'affirmer que le nombre considéré n'est pas entier.

De façon générale, quand un réel θ n'est pas entier, il est souhaitable d'avoir une mesure de non-intégrité c'est-à-dire une minoration de sa distance $\| \theta \|$ à l'entier le plus proche. Par exemple, dans le cas considéré on pourrait prendre $\frac{1}{2} \cdot 10^{-12}$.

On peut déterminer une mesure de non intégrité pour les nombres algébriques ou pour les logarithmes d'entiers.

Il y a des rêels dont on ignore s'ils sont entiers ou non, il y en a d'autres dont on sait qu'ils ne sont pas entiers et dont on ne connait pas de mesure de non-intégrité. Néanmoins, nou examinerons le problème non pour un réel particulier, mais pour une famille de réels θ_m . Un cas intéressant correspond à l'existence d'une constante c tel que :

$$\| \theta \| > \frac{1}{\theta^c}$$

autrement dit $\quad \log \frac{1}{\| \theta \|} < c \log \theta$.

Quand on n'a pas de mesure aussi bonne on se contente d'avoir au second membre une fonction de θ à croissance lente comme $(\log \theta)^\alpha$ ou $\log \theta \, (\log \log \theta)^\beta$.

Par exemple si α est l'unité fondamentale > 1 d'un corps quadratique réel

$$\| \alpha \|^n = \frac{1}{|\alpha|^n} .$$

II - MESURE D'IRRATIONALITE

On appelle mesure d'irrationalité du nombre réel θ une fonction ϕ croissante de q telle que, quels que soient les entiers p,q

$$|\theta - \frac{p}{q}| > \frac{1}{\phi(q)}$$

Il s'agit essentiellement d'une mesure de non-intégrité de $q\theta$.

A tout irrationnel θ on peut associer théoriquement un réel achevé ω (c'est-à-dire un réel ou $+\infty$) appelé indice d'irrationalité.

Pour $\gamma < \omega$

$$|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\gamma}$$

admet une infinité de solutions, tandis que pour $\gamma < \omega$:

$$|\theta - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{\gamma}}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions.

La théorie élémentaire des fractions continues montre que $\gamma \geq 2$.

Du point de vue constructif la "définition" de γ doit être considérée comme un problème.

En fait les irrationnels d'indice $\gamma > 2$ constituent un ensemble de mesure nulle .

On peut donc conjecturer que tout irrationnel classique (sauf ceux qui sont fabriqués exprès, comme les nombres de Liouville d'indice $+\infty$) sont d'indice 2. On sait que e est d'indice 2 et Roth a démontré que tout irrationnel algébrique est d'indice 2 (le résultat de Roth est d'ailleurs encore incomplet du point de vue constructif). Par contre on connait seulement pour les logarithmes d'entiers, pour π , pour $\zeta 3$, une majoration, l'indice d'irrationalité par des nombres finis > 2, ce qui démontre seulement que ces nombres ne sont pas des nombres de Liouville. On ignore si e^{π} est ou non un nombre de Liouville, on sait seulement que

$$|e^{\pi} - \frac{p}{q}| > q^{-c \log \log q} \quad .$$

III - MESURE D'INDEPENDANCE LINEAIRE

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r$ des nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ c'est-à-dire tels que la combinaison linéaire

$$\omega = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_r\alpha_r$$

où les a_i désignent des entiers relatifs, ne s'annule que si les a_i sont tous nuls .

On appelle <u>hauteur</u> du système $(\alpha_1 \dots \alpha_r)$ le maximum de $|\alpha_i|$.

On appelle mesure d'indépendance linéaire de l'ensemble de réels $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r)$ une fonction $\psi(h)$ positive décroissante telles que les combinaisons linéaires de hauteur $\leq h$ vérifient

$$|\omega| > \psi(h) .$$

<u>La méthode des tiroirs</u> due à Lejeune-Dirichlet permet de majorer $\psi(h)$ c'est-à-dire d'obtenir une fonction $\phi(h)$ telle qu'on puisse choisir $a_1, a_2 \dots a_h$ pour lesquels

$$|\omega| \leq \phi(h) .$$

<u>Théorème</u> :

Il existe une constance c dépendant des α_i et de r, mais pas de h telle qu'il existe des a_i non tous nuls pour lesquels

$$|\omega| \leq \frac{c}{h^{r-1}}$$

On suppose les entiers $a_1, a_2 \dots a_r$ de valeur absolue $\leq h'$ et non tous nuls, les ω constituent donc $((2h' + 1)^r - 1)$ "objets" .

Soit θ un réel positif tel que :

$$|\omega| < m\,\theta$$

où l'entier m sera choisi ultérieurement.

Les ω sont donc répartis dans les $2m$ "tiroirs"

$$(k - 1)\theta < \omega \leq k\theta$$

$$(k - 1)\theta < -\omega \leq k\theta$$

où l'entier naturel k varie de 1 à m .

Supposons

$$(2h' + 1)^r - 1 > 2m$$

c'est-à-dire supposons qu'il existe plus d'objets que de tiroirs. Selon le "principe des tiroirs" , un des tiroirs contient au moins deux objets ; en soustrayant les valeurs prises par ω , on obtient une combinaison linéaire des α_i de hauteur $\leq 2h'$ et de valeur absolue $< \theta$.

Les conditions sur m , θ s'écrivent

$$m = \frac{(2h' + 1)^r - 3}{2}$$

$$h' \ \delta \ r \leq m \ \theta$$

où

$$\delta = \sup_i \ |\alpha_i|$$

En posant $h = 2h'$, on obtient :

$$\theta = \frac{h \ \delta \ r}{(h + 1)^r - 3}$$

d'où on déduit la majoration de l'énoncé.

<u>Cas où les α sont des nombres algébriques indépendants sur $\mathbb{Z}$</u>

Soit n la dimension de l'anneau $\mathbb{Z}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots$

n vérifie l'inégalité $n \geq r$.

Soit δ' le sup des valeurs absolues des conjugués des α_i .

Comme le produit de ω par ses conjugués est un entier relatif non nul, donc de valeur absolue ≥ 1, on déduit

$$|\omega| \geq \frac{1}{(h \ r \ d)^{n-1}}$$

c'est-à-dire

$$|\omega| \geqslant \frac{c}{h^{n-1}} .$$

Dans le cas général, on souhaite une mesure d'indépendance linéaire de la forme $\frac{c}{h^s}$ où s est un entier convenable indépendant de la hauteur.

Un résultat de ce type a été obtenu par Feldman pour les logarithmes de nombres algébriques (1968). L'exposant s dépend de r du degré et de la hauteur à des nombres algébriques. Baker (1974) a montré qu'on peut choisir $s = c_o (\log a)^r \log \log a$.

IV - MESURE DE TRANSCENDANCE

On appelle hauteur d'un polynôme le maximum des valeurs absolues des coefficients .

Quels que soient l'irrationnel θ et l'entier $n > 0$, on désigne par $w_n(\theta)$ la plus grande limite (éventuellement infinie) quand $H \longrightarrow +\infty$ de $\frac{-\log w_n(H,\theta)}{n}$ où $w_n(H,\theta)$ est le minimum de la valeur pour θ des polynômes (non identiquement nuls) de degré $\leqslant n$ de hauteur $\leqslant H$. C'est une mesure d'indépendance linéaire de $1, \theta \ldots \theta^n$.

On appelle <u>type</u> de θ le nombre (éventuellement infini) $w(\theta) = \limsup_{n \to \infty} \frac{w_n(\theta)}{n}$. Les nombres de Liouville sont de type fini.

Les mesures de transcendance donnent soit une minoration de $w_n(H,\theta)$ soit une majoration de $w_n(\theta)$ ou de $w(\theta)$.

On sait que les réels de type > 1 constituent un ensemble de mesure nulle. Néanmoins, e est un des rares nombres que l'on sait effectivement être de type 1. Par contre on sait majorer $w(\pi)$.

La notion la plus raffinée est la mesure d'indépendance algébrique qui, pour r réels algébriquement indépendants $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$, associe à tout polynôme à r variables, une minoration de sa valeur absolue en $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r)$.