MAX FONTET

ANDRÉ LENTIN

Quelques propriétés d'une certaine classe d'opérateurs définis sur les groupes symétriques (fixateurs et biinvodécompositions)

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 9, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A7_0>

Séminaire SCHÜTZENBERGER-LENTIN-NIVAT
(Problèmes mathématiques
de la Théorie des automates)
Année 1969/70, n° 9, 14 p.

20 janvier 1970

QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UNE CERTAINE CLASSE D'OPÉRATEURS DÉFINIS SUR LES GROUPES SYMÉTRIQUES (FIXATEURS ET BIINVODÉCOMPOSITIONS)

par Max FONTET et André LENTIN

Résumé

On introduit une classe d'opérateurs, les fixateurs, dont chacun projette un groupe symétrique sur l'un de ses sous-groupes, et on établit des théorèmes concernant les conditions de projection du produit sur le produit.

Considérant ensuite les décompositions d'une substitution en un produit de deux involutions, en bref : biinvodécompositions, on les répartit, par référence aux orbites de la décomposée, en intraorbitales et extraorbitales. Enfin, ayant défini la notion de biinvodécomposition induite par une biinvodécomposition donnée au moyen d'un fixateur, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que le type, intra ou extraorbital, se conserve par induction.

Le présent travail améliore certains des résultats de [1] et [2], et résout des problèmes laissés ouverts par [2], problèmes posés par les équations bipermutationnelles.

1. Propriétés et définitions.

Notations. - Dans tout ce travail, on désigne :

- par des majuscules latines des ensembles quelconques, et par des minuscules latines les éléments (ou points) de ces ensembles ;
- par $\mathfrak{S}_A$ le groupe des substitutions s'exerçant sur les points de A, et par des minuscules grecques ces mêmes substitutions, la neutre, en particulier, par ε ;
- par $a.\sigma$ l'image de $a \in A$ que donne $\sigma \in \mathfrak{S}_A$.

DÉFINITION 1. - E étant une partie finie de A, on désigne par Φ_A^E, et l'on appelle fixateur de E pour A, l'opérateur qui envoie $\mathfrak{S}_A$ dans lui-même de la manière suivante.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_A$, $\overline{\sigma} = \Phi_A^E(\sigma)$:

(i) Pour tout $x \in E$, $x.\overline{\sigma} = x$ (tout point de E est fixe pour $\overline{\sigma}$, d'où le nom attribué à l'opérateur) ;

(ii) Pour $a \in A \setminus E$, $a.\overline{\sigma} = a.\sigma^n$, où n est le plus petit naturel non nul tel que $a.\sigma^n \in A \setminus E$.

La finitude de E assure l'existence de n .

Propriétés immédiates. - Il est clair que :

(1) Φ_A^E projette $\mathfrak{S}_A$ sur son sous-groupe maximal qui conserve E point par point.

(2) Les orbites de $\Phi_A^E(\sigma)$ sont contenues dans celles de σ .

(3) $(E = E_1 \cup E_2 ,\ E_1 \cap E_2 = \emptyset)$ implique $(\Phi_A^E = \Phi_{A\setminus E_1}^{E_2} \circ \Phi_A^{E_1} = \Phi_{A\setminus E_2}^{E_1} \circ \Phi_A^{E_2})$.

(4) $(\varphi\psi = \varepsilon)$ implique $(\Phi_A^E(\varphi) \circ \Phi_A^E(\psi) = \varepsilon)$.

Conventions. - On posera désormais, A et E étant chaque fois précisés, $\Phi_A^E(\sigma) = \overline{\sigma}$.

D'autre part, on n'explicitera pas, dans l'énoncé des propositions et théorèmes, les hypothèses évidentes et triviales concernant la cardinalité de $A \setminus E$.

LEMME (A). - Les orbites de la substitution $\varphi\overline{\varphi}^{-1}$ sont constituées :

1° Par chaque point de $A \setminus E \cup E.\varphi^{-1}$;

2° Par toute orbite de φ ne comportant que des points de E ;

3° Pour tout $a \in E.\varphi^{-1} \setminus E$, par le cycle fini $(a\ a.\varphi \ldots a.\varphi^n)$, n étant le naturel minimal tel que $a.\varphi^{n+1} \notin E$.

Enoncé dual relativement à $\overline{\varphi}^{-1}\varphi$.

Preuve.

1° Soit $x \in A \setminus E \cup E.\varphi^{-1}$. Comme x n'est pas dans E , $x.\overline{\varphi} = y$ est donné par $x.\varphi^m$, $m \geqslant 1$, et minimal tel que $x.\varphi^m \notin E$. Comme x n'est pas dans $E.\varphi^{-1}$ y n'est pas dans E , et $m = 1$.

En sens inverse, raisonnement analogue relativement à y , φ^{-1} et $\overline{\varphi}^{-1}$, d'où $x.\varphi\overline{\varphi}^{-1} = x$.

2° Soit $x \in E \cap E.\varphi$; alors $(x.\varphi).\overline{\varphi}^{-1} = x.\varphi$, d'où $x.\varphi\overline{\varphi}^{-1} = x.\varphi$.

3° Si une orbite de $\varphi\overline{\varphi}^{-1}$, contenue dans $E \cup E.\varphi^{-1}$, ne contient pas que des points de E , elle contient au moins un point $a \in E.\varphi^{-1} \setminus E$. On a alors $a.\varphi \in E$ d'où $a.\varphi\overline{\varphi}^{-1} = a.\varphi$. Le raisonnement fait au 2° s'applique jusqu'au point $a.\varphi^n$. Ensuite $a.\varphi^{n+1} \notin E$, d'où $(a.\varphi^n)\varphi\overline{\varphi}^{-1} = a$.

L'unicité de a en résulte.

Q. E. D.

Les propositions qui suivent concernent certaines conditions sous lesquelles l'opérateur Φ_A^E conserve la relation de produit

$$\varphi\psi = \sigma \quad .$$

En vertu de la propriété (4), il revient au même d'étudier la conservation de la relation

$$\varphi\psi\theta = \varepsilon \quad ,$$

elle-même équivalente à $\psi\theta\varphi = \theta\varphi\psi = \varepsilon$.

PROPOSITION 1. - Dans le cas où $E = \{i\}$, la relation $(\varphi\psi\theta = \varepsilon)$ implique $(\bar{\varphi}\bar{\psi}\bar{\theta} = \varepsilon)$ si, et seulement si, i est point fixe de l'une (au moins) des substitutions φ , ψ , θ .

Preuve. - Posons $\omega_1 = \bar{\theta}^{-1}\theta$, $\omega_2 = \varphi\psi\bar{\psi}^{-1}\varphi^{-1}$, $\omega_3 = \varphi\bar{\varphi}^{-1}$, $\xi = \omega_1\,\omega_2\,\omega_3$. La relation $(\varphi\psi\theta = \varepsilon)$ implique $(\bar{\varphi}\bar{\psi}\bar{\theta} = \varepsilon)$ si, et seulement si, $\xi = \varepsilon$.

Si l'on suppose $i.\varphi \neq i$, $i.\theta \neq i$, $i.\psi \neq i$, le lemme (A) implique que ω_1 , ω_2 , ω_3 se réduisent respectivement aux transpositions $(i\ i.\theta)$, $(i.\theta\ i.\varphi^{-1})$, $(i.\varphi^{-1}\ i)$, d'où $i.\theta\xi = i.\varphi^{-1} \neq i.\theta$, et $\xi \neq \varepsilon$.

La condition de l'énoncé est donc nécessaire, le lemme (A) prouve immédiatement qu'elle est suffisante.

THÉORÈME 1. - Dans le cas où $E = \{i , j\}$, la relation $(\varphi\psi\theta = \varepsilon)$ implique $(\bar{\varphi}\bar{\psi}\bar{\theta} = \varepsilon)$ si, et seulement si, l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :

(1) i et j sont chacun point fixe de l'une des trois substitutions φ , ψ , θ ;

(2) j (resp. i) est l'image de i (resp. j) par deux de ces mêmes substitutions.

Preuve. - On utilise encore la substitution ξ précédemment définie et la caractérisation par $\xi = \varepsilon$.

(a) La condition est nécessaire. - En vertu du lemme (A), ω_1 , ω_2 et ω_3 s'expriment respectivement à l'aide des points i , $i.\theta$, j , $j.\theta$; $i.\theta$, $i.\varphi^{-1}$, $j.\theta$, $j.\varphi^{-1}$; $i.\varphi^{-1}$, i , $j.\varphi^{-1}$, j ; soit six points au plus.

Si l'on suppose ces six points distincts, on obtient aisément $(i.\theta).\xi = i.\varphi^{-1}$, d'où $\xi \neq \varepsilon$.

(α) Il est donc nécessaire qu'existe entre les six points une égalité au moins. Une telle égalité peut exprimer :

- soit que i (resp. j) est point fixe de l'une des substitutions φ, ψ, θ, auquel cas on la dira <u>de type</u> (1) ;
- soit que j (resp. i) est image de i (resp. j) par l'une des substitutions, auquel cas on la dira <u>de type</u> (2).

Dans le cas d'une égalité de type (1), on peut supposer, sans perte de généralité, que l'on a $i.\theta = i$ (<u>sans plus</u>), et l'on obtient alors $(j.\theta).\xi = j.\varphi^{-1}$, d'où $\xi \neq \varepsilon$. Dans le cas d'une égalité de type (2), on peut supposer que l'on a $i.\varphi = j$ (<u>sans plus</u>), d'où $(i.\theta).\xi = i.\varphi^{-1}$ et $\xi \neq \varepsilon$.

(β) L'existence de deux égalités est donc nécessaire.

(β1) L'hypothèse de deux seules égalités de type (1) portant sur la même lettre, soit par exemple, et sans perte de généralité, $i.\theta = i = i.\varphi$, n'est pas suffisant, car $(j.\theta).\xi = j.\varphi^{-1}$ et $\xi \neq \varepsilon$.

(β2) Il en va de même pour la seule donnée d'une égalité de type (1) et une de type (2), soit par exemple, et sans perte de généralité, $i.\theta = i$ et $i.\varphi = j$, car $(j.\theta).\xi = j.\varphi^{-1}$ et $\xi \neq \varepsilon$.

La nécessité est ainsi établie.

(b) <u>La condition est suffisante</u>.

(α) Il est clair, en vertu de la proposition 1, que la condition (1) du théorème est suffisante.

(β) La condition (2) l'est également.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i.\psi = i.\theta = j$, ce qui implique

$$i.\psi\theta = i.\varphi^{-1} = j.\theta \quad ,$$

$$i.\theta\varphi = i.\psi^{-1} = j.\varphi \quad .$$

Le calcul de ξ conduit à dresser le tableau suivant, qui résume l'action de ξ sur les six éléments i, $i.\theta$, $i.\varphi^{-1}$, j, $j.\theta$, $j.\varphi^{-1}$. On vérifiera que $\xi = \varepsilon$ dans tous les cas.

	$j.\theta \neq i \quad i.\varphi \neq i$		$j.\theta = i = i.\varphi$
ω_1	$(i\ ,\ j\ ,\ j.\theta)$		$(i\ ,\ j)$
	$j.\varphi \neq j$	$j.\varphi = j$	
ω_2	$(j\ ,\ j.\theta\ ,\ j.\varphi^{-1})$	$(j\ ,\ j.\theta)$	$(j\ ,\ i\ ,\ j.\varphi^{-1})$
ω_3	$(j.\theta\ ,\ i)(j.\varphi^{-1}\ ,\ j)$	$(j.\theta\ ,\ i)(j)$	$(i)(j.\varphi^{-1}\ ,\ j)$
ξ	$(i)(j)(j.\theta)(j.\varphi^{-1})$	$(i)(j)(j.\theta)$	$(i)(j)(j.\varphi^{-1})$

PROPOSITION 2. - <u>Dans le cas où</u> $E = \{i\}$ (<u>resp.</u> $E = \{i\ ,\ j\}$), <u>une condition suffisante pour que la relation</u> $(\varphi\gamma\psi\delta = \varepsilon)$ <u>implique</u> $(\bar{\varphi}\bar{\gamma}\bar{\psi}\bar{\delta} = \varepsilon)$ <u>est que les substitutions</u> γ <u>et</u> δ <u>contiennent chacune le point fixe</u> i (<u>resp. la transposition</u> $(i\ j)$).

<u>Preuve</u>. - Nous utilisons les mêmes techniques de démonstration que précédemment. Posons

$$\begin{aligned} \xi &= (\bar{\delta}^{-1}\ \delta)(\varphi\gamma\psi\bar{\psi}^{-1}\ \gamma^{-1}\ \varphi^{-1})(\varphi\gamma\bar{\gamma}^{-1}\ \varphi^{-1})(\varphi\bar{\varphi}^{-1}) \\ &= \quad \omega_1 \qquad\qquad\qquad \omega_2 \qquad\qquad\qquad \omega_3 \qquad\qquad \omega_4 \quad . \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que les conditions de l'énoncé impliquent $\xi = \varepsilon$.

En utilisant le lemme (A), le résultat devient évident pour $E = \{i\}$.

Dans le cas où $E = \{i\ ,\ j\}$, nous constatons, à l'aide du lemme (A), que nous avons les configurations suivantes pour les éléments pour lesquels il existe un problème. On vérifiera que $\xi = \varepsilon$ dans tous les cas.

ω_1	$(i\ ,\ j)$			
	$j.\varphi^{-1} \neq i \quad i.\varphi^{-1} \neq j$	$j.\varphi^{-1} = i$ ou $i.\varphi^{-1} = j$		$j.\varphi^{-1} = i$ et $i\varphi^{-1} = j$
ω_2	$(i.\varphi^{-1}\ ,\ i)(j.\varphi^{-1}\ ,\ j)$	$(i.\varphi^{-1}\ ,\ i\ ,\ j)$	$(j.\varphi^{-1}\ ,\ j\ ,\ i)$	$(i\ ,\ j)$
ω_3	$(i.\varphi^{-1}\ ,\ j.\varphi^{-1})$	$(i.\varphi^{-1}\ ,\ j.\varphi^{-1})$		$(i\ ,\ j)$
ω_4	$(i.\varphi^{-1}\ ,\ i)(j.\varphi^{-1}\ ,\ j)$	$(i.\varphi^{-1}\ ,\ i)(j.\varphi^{-1}\ ,\ j)$		$(i\ ,\ j)$
ξ	$(i)(j)(i.\varphi^{-1})(j.\varphi^{-1})$	$(i)(j)(i.\varphi^{-1})$	$(i)(j)(j.\varphi^{-1})$	$(i)(j)$

2. Biinvodécompositions et fixateurs.

DÉFINITION 2. - Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_A$, une décomposition de σ en un produit $\alpha\beta$ de deux involutions, en bref une biinvodécomposition, sera dite intraorbitale, si, et seulement si, les orbites de α et celles de β sont contenues dans les orbites de σ , et extraorbitale dans le cas contraire.

PROPOSITION 3. - Toute substitution admet des biinvodécompositions intraorbitales. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle en admette d'extraorbitales est qu'elle possède au moins deux orbites distinctes de même cardinalité (finie ou dénombrable).

Preuve. - Soit $\sigma = \alpha\beta$ une biinvodécomposition. Si α et β ne comportent que des points fixes, on a $\sigma = \varepsilon = \varepsilon\varepsilon$ (décomposition trivialement intraorbitale). Ce cas écarté, α et β présentent chacune au moins une transposition (orbite de longueur 2), soit

$$(x_0 , y_0) , \qquad x_0 , y_0 \in A , \quad x_0 \neq y_0$$

la transposition de α .

Posons, pour $i \in \mathbb{Z}$, $x_i = x_0 \sigma^i$, $y_i = y_0 \sigma^i$. La condition $\sigma = \alpha\beta$ équivaut à la condition que α contienne les transpositions (éventuellement points fixes, en cas d'égalité des points) :

$$(x_i , y_{-i}) ,$$

et que β contienne de même toutes les transpositions (ou points fixes) :

$$(x_i , y_{-i+1}) .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il puisse en être ainsi est que l'orbite de x_0 et celle de y_0 aient la même cardinalité (finie ou dénombrable).

Cette condition peut toujours être réalisée en prenant x_0 et y_0 dans la même orbite. Si la substitution σ n'admet pas deux orbites de même cardinalité, la condition ne peut être réalisée que de cette manière, et toutes les biinvodécompositions sont alors nécessairement intraorbitales. Au contraire, s'il existe au moins deux orbites de même cardinalité, il est possible de les coupler, et d'obtenir des extraorbitales.

Propriétés des facteurs.

1° Dans le cas où x_0 et y_0 appartiennent à la même orbite Γ de σ , si l'on représente la restriction σ_Γ de σ à son orbite Γ d'une manière géométrique, par une rotation dans le cas fini, par une translation dans le cas dénombrable, cette substitution σ_Γ est alors décomposée en un produit de deux symétries, et cette remarque règle la question des formules donnant explicitement α et β.

2° Dans le cas où x_0 et y_0 appartiennent à deux orbites différentes de même cardinalité, on montre facilement que la restriction de toute biinvodécomposition extraorbitale à cette paire d'orbites Γ', Γ'' s'obtient par la règle suivante :

Remplacer Γ' et Γ'' par une orbite Γ de même cardinalité. Former toute décomposition intraorbitale de Γ. A tout point fixe (a) de α ou β faire correspondre la transposition $(a'\ a'')$, et à toute transposition $(b\ c)$ faire correspondre les deux transpositions $(b'\ c'')$ et $(b''\ c')$.

DÉFINITION 3. - Soient σ_1 et σ_2 deux involutions contenant chacune la transposition $(i\ j)$, et soient γ et δ deux substitutions telles que l'on ait

$$\sigma_2\,\gamma^{-1}\,\sigma_1 = \delta \ . \tag{1}$$

On considère d'une part la biinvodécomposition

$$\sigma_2(\gamma^{-1}\,\sigma_1\,\gamma) = \sigma_2\,\sigma_I \ , \tag{2}$$

de la substitution $\sigma = \delta\gamma$, d'autre part, le fixateur de $\{i\ ,\ j\}$ donnant, en vertu de la proposition 2, à partir de (1) la relation

$$\bar\sigma_2\,\bar\gamma^{-1}\,\bar\sigma_1 = \bar\delta \ ; \tag{3}$$

on peut alors considérer la biinvodécomposition

$$\bar\sigma_2(\bar\gamma^{-1}\,\bar\sigma_1\,\bar\gamma) = \bar\sigma_2\,\omega \ , \tag{4}$$

de la substitution $\sigma_p = \bar\delta\bar\gamma$.

Nous dirons que la biinvodécomposition (4) [de σ_p] est induite par la biinvodécomposition (2) [de σ] au moyen du fixateur de $\{i\ ,\ j\}$.

N. B. - Les notations ici introduites seront utilisées dans toute la suite.

Remarque. - L'hypothèse que la transposition $(i\ j)$ appartient à σ_1 équivaut à l'hypothèse que $(i.\gamma\ j.\gamma)$ appartient à σ_I.

LEMME (B). - Les notations étant les mêmes que celles introduites dans la définition précédente, pour former ω à partir de σ_I :

- Si les éléments i , j , $i\gamma$, $j\gamma$ sont tous distincts, il suffit de remplacer, dans σ_I , la transposition $(i.\gamma\ j.\gamma)$ par $(i)(j)$, et dans les transpositions où figurent i et j , de les remplacer respectivement par $i.\gamma$ et $j.\gamma$;
- Le cas de dégénérescence à un point fixe $(i = j)$ étant écarté, si deux des éléments i , j , $i.\gamma$, $j.\gamma$ sont égaux, il suffit de remplacer, dans σ_I , le produit des deux transpositions $(i\ i.\sigma_I)(j\ j.\sigma_I)$ par $(i)(j)(i.\sigma_I\ j.\sigma_I)$.

Preuve. - Si les éléments i , j , $i\gamma$, $j\gamma$ sont tous distincts, le résultat découle immédiatement des égalités $\sigma_I = \gamma^{-1}\ \sigma_1\ \gamma$ et $\omega = \overline{\gamma}^{-1}\ \overline{\sigma}_1\ \overline{\gamma}$.

Si deux des éléments i , j , $i\gamma$, $j\gamma$ sont égaux, il suffit de faire un raisonnement par cas. Par exemple, si $i.\gamma = i$, alors $i.\sigma_I = j.\gamma$, d'après l'égalité $\sigma_I = \gamma^{-1}\ \sigma_1\ \gamma$; la transposition $(i.\gamma\ j.\gamma)$ est confondue avec la transposition $(i\ i.\sigma_I)$, et le résultat découle des égalités déjà considérées dans le cas général. Les autres cas $j = i.\gamma$, $j.\gamma = j$, $i = j.\gamma$ se traitent de la même façon.

DÉFINITION 4. - Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_A$, et a , b , c , $d \in A$ quatre points appartenant à une même orbite Γ de σ . Le quadruplet ordonné $\langle a , b , c , d\rangle$ sera dit non croisé (resp. croisé), si, et seulement si, la condition suivante est satisfaite (resp. non satisfaite) :

1° Pour Γ finie, les entiers naturels minimaux β , γ , δ tels que $b = a.\sigma^\beta$, $c = a.\sigma^\gamma$, $d = a.\sigma^\delta$, vérifient la relation $0 < \beta < \gamma < \delta$;

2° Pour Γ infinie, les entiers rationnels assurant les mêmes égalités sont tels qu'une des quatre permutations circulaires de 0 , β , γ , δ respecte l'ordre de $\mathbb{Z}$.

Remarque. - Si l'on représente géométriquement la restriction de σ à Γ , dans le cas fini, le quadruplet $\langle a , b , c , d\rangle$ est croisé ou non, selon que le quadrilatère abcd l'est ou non ; dans le cas infini, on a un résultat analogue en utilisant le quadrilatère construit dans le demi-plan de Poincaré.

DÉFINITION 5. - Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_A$, Γ et Γ' deux orbites infinies distinctes de σ , a et b deux points distincts, c et d deux points distincts de Γ' . Les deux couples (a , b) , (c , d) seront dits de même sens, si, et seulement si, posant $b = a.\sigma^\beta$, $d = c.\sigma^\delta$, on a $\beta\delta > 0$.

Remarque. - Cette définition, possible dans le seul cas de deux orbites infinies, ne se réduirait pas à la précédente en faisant $\Gamma = \Gamma'$.

THÉORÈME 2. - Les notations étant celles de la définition 3, Γ désignant l'orbite de σ qui contient les points i et j , Γ' celle qui contient les points

$i.\gamma$ <u>et</u> $j.\gamma$, <u>une biinvodécomposition intraorbitale induit, par fixation de</u> i <u>et</u> j , <u>une biinvodécomposition extraorbitale, si, et seulement si</u> :

1° <u>Ou bien</u> Γ <u>et</u> Γ' <u>coïncident, et le quadruplet</u> $\langle i , i.\gamma , j.\gamma , j\rangle$ <u>est non dégénéré et non croisé</u> ;

2° <u>Ou bien</u> Γ <u>et</u> Γ' <u>sont infinies et distinctes, et les couples</u> (i , j) <u>et</u> $(i.\gamma , j.\gamma)$ <u>sont de sens contraires.</u>

<u>N. B.</u> - Par abus d'écriture, dans tout ce qui suit, nous ne distinguerons pas les substitutions σ_2 , σ_I , ω de leurs restrictions à Γ et Γ' . D'autre part, pour $p \in \underline{Z}$ et $a \in \Gamma$ (resp. Γ'), nous désignerons le point $a.\sigma^p$ par la notation abrégée p (resp. p'), lorsque le point a aura été distingué et précisé.

<u>Preuve.</u> - Puisque l'on considère une biinvodécomposition intraorbitale, les points i et j , qui forment dans σ_2 la transposition $(i\ j)$, appartiennent à une même orbite Γ de σ ; de même, les points $i.\gamma$ et $j.\gamma$, qui appartiennent à la transposition $(i.\gamma\ j.\gamma)$ de σ_I (remarque à la définition 3), appartiennent à une même orbite Γ' .

La preuve consiste à examiner les différents cas possibles sous les hypothèses $\Gamma \neq \Gamma'$ ou $\Gamma = \Gamma'$.

1° $\Gamma \neq \Gamma'$. - Nous classerons les différents cas à étudier suivant les points fixes de σ_2 et le sens des couples (i , j) et $(i.\gamma , j.\gamma)$.

(a) Les restrictions de σ_2 à Γ et à Γ' admettent chacune un point fixe.

$$\sigma_2 = (0)(1\ (-1)) \ldots (p\ (-p)) \ldots (0')(1'\ (-1)') \ldots (p'\ (-p)') \ldots$$

$$\sigma_I = (0\ 1) \ldots ((-p)\ (p+1)) \ldots (0'\ 1') \ldots ((-p)'\ (p+1)') \ldots$$

(α) (i , j) et $(i.\gamma , j.\gamma)$ sont de même sens.

$$\bar{\sigma}_2\, \omega = (\ldots\ (-p-1)\ (q+1)' \ldots)(\ldots\ (-q-1)'\ (p+1)\ \ldots)$$
$$(0 \ldots (p-1)\ (-q)' \ldots 0' \ldots (q' - p + 1) \ldots -1)(p)(-p) ,$$

avec $(i\ j) = (p\ (-p))$ et $(i.\gamma\ j.\gamma) = ((-q)'\ (q+1)')$. La nouvelle décomposition n'est intraorbitale que si les deux orbites sont finies, sinon elle est extraorbitale.

(β) (i , j) et $(i.\gamma , j.\gamma)$ ne sont pas de même sens.

$$\bar{\sigma}_2\, \omega = (\ldots\ (-p-1)\ (-q)' \ldots 0' \ldots q'\ (p+1)\ \ldots)$$
$$(\ldots\ (-q-1)'\ (-p+1) \ldots 0 \ldots (p-1)\ (q+1)' \ldots)$$

avec $(i\ j) = (p\ (-p))$ et $(i.\gamma\ j.\gamma) = ((q+1)'\ (-q)')$. Cette décomposition est toujours intraorbitale.

(b) Les autres cas se ramènent au cas étudié en vertu du principe suivant.

Principe des translations des indices. - On obtient les autres types de σ_2 et de σ_I à partir de ceux pour lesquels les restrictions de σ_2 à Γ et à Γ' admettent chacune un point fixe, de la façon suivante :

Si la restriction de σ_2 à Γ (resp. Γ') n'admet pas de point fixe, on obtient le nouveau σ_2 à partir de l'ancien, en translatant de -1 les éléments négatifs ou nuls, le point fixe (0) (resp. $(0')$) donnant la transposition $(0\ (-1))$ (resp. $(0'\ (-1)')$). De même, on obtient le nouveau σ_I à partir de l'ancien, en translatant les éléments positifs de -1 .

Remarque. - Le fait que les orbites soient finies ou infinies n'intervient que dans l'interprétation des calculs ; pour le cas fini, il suffit d'identifier les éléments p et $-p$ si l'orbite est de cardinalité $2p$, ou les éléments p et $(-p-1)$ si l'orbite est de cardinalité $2p+1$.

2° $\Gamma = \Gamma'$. - Nous classerons les différents cas à étudier suivant les points fixes de σ_2 et la nature du quadruplet $\langle i\ ,\ i.\gamma\ ,\ j.\gamma\ ,\ j\rangle$.

(a) La restriction de σ_2 à Γ admet un point fixe

$$\sigma_2 = (0)\ (1\ (-1))\ \dots\ (p\ (-p))\ \dots$$

$$\sigma_I = (0\ 1)\ ((-1)\ 2)\ \dots\ ((-p)\ (p+1))\ \dots\ .$$

(α) $\langle i\ ,\ i.\gamma\ ,\ j.\gamma\ ,\ j\rangle$ est croisé.

Si $(i\ j) = (p\ (-p))$ et $(i.\gamma\ j.\gamma) = ((-q)\ (q+1))$, on a, suivant l'ordre relatif de p et q dans $\underset{\sim}{Z}$,

$p < q$:

$$\bar{\sigma}_2\,\omega = (\dots\ (-q-1)\ (p+1)\ \dots\ (q-p+1)\ \dots\ 0\ \dots\ (p-1-q)\ \dots\ (p-1)\ (q+1)\ \dots)(p)(-p)\ ;$$

$p = q$ $(j = i\gamma)$ ou $p = q+1$ $(i = j\gamma)$:

$$\bar{\sigma}_2\,\omega = (\dots\ (-p-1)\ (-p+1)\ \dots\ 0\ \dots\ (p-1)\ (p+1)\ \dots)(p)(-p)\ ;$$

$p > q+1$:

$$\bar{\sigma}_2\,\omega = (\dots\ (-p-1)\ (q+1)\ \dots\ (p-1-q)\ \dots\ 0\ \dots\ (q-p+1)\ \dots\ (-q-1)\ (p+1)\ \dots)(p)(-p)\ .$$

Dans tous les cas, la décomposition induite est intraorbitale.

(β) $\langle i\ ,\ i.\gamma\ ,\ j.\gamma\ ,\ j\rangle$ est non croisé.

Si $(i\ j) = (p\ (-\ p))$ et $(i.\gamma\ j.\gamma) = ((q + 1)\ (-\ q))$, on a, suivant l'ordre relatif de p et q dans $\underset{\sim}{Z}$,

$p < q$:

$$\overline{\sigma}_2\ \omega = (\ldots\ (-\ q - 1)\ (-\ p + 1)\ \ldots\ 0\ \ldots\ (p - 1)\ (q + 1)\ \ldots)$$
$$((p + 1)\ \ldots\ q)((-\ q)\ \ldots\ (-\ p - 1))(p)(-\ p)\ ;$$

$p = q$ $(j = j.\gamma)$ ou $p = q + 1$ $(i = i.\gamma)$:

$$\overline{\sigma}_2\ \omega = (\ldots\ (-\ p - 1)\ (-\ p + 1)\ \ldots\ 0\ \ldots\ (p - 1)\ (p + 1)\ \ldots)(p)(-\ p)\ ;$$

$p > q + 1$:

$$\overline{\sigma}_2\ \omega = (\ldots\ ((-\ p - 1)\ (-\ q))\ \ldots\ 0\ \ldots\ (q\ (p + 1))\ \ldots)$$
$$((q + 1)\ \ldots\ (p - 1))((-\ p + 1)\ \ldots\ (-\ q - 1))(p)(-\ p)\ .$$

Dans tous les cas où il n'y a pas dégénérescence du quadruplet $\langle i\ ,\ i.\gamma\ ,\ j.\gamma\ ,\ j\rangle$, la décomposition induite est extraorbitale.

(b) Dans le cas où la restriction de σ_2 à Γ n'admet pas de point fixe, on se ramène au cas étudié en utilisant le <u>principe des translations des indices</u>.

THÉORÈME 3. - <u>Les notations étant celles de la définition, une biinvodécomposition une fois extraorbitale induit, par fixation de i et j , une biinvodécomposition intraorbitale, si, et seulement si, d'une part les points i et j appartiennent à deux orbites différentes Γ et Γ' finies et de même cardinalité, d'autre part $i.\gamma$ et $j.\gamma$ appartiennent à une même orbite Γ distincte de Γ et de Γ' .</u>

<u>Preuve</u>. - En vertu du lemme (B), la seule façon d'induire une décomposition intraorbitale à partir d'une décomposition une fois extraorbitale est de réunir les orbites contenant i , j , $i.\gamma$, $j.\gamma$ en une seule ; en effet, la fixation de i et de j ne change que les transpositions où i , j , $i.\gamma$, $j.\gamma$ interviennent, et introduit $i.\gamma$ dans l'orbite de i , et $j.\gamma$ dans l'orbite de j .

Si i et j appartiennent à la même orbite Γ , la fixation de i et de j ne changera rien à l'extraorbitalité de la décomposition, car les seuls changements interviendront dans Γ , orbite pour laquelle la restriction de la décomposition est intraorbitale ($(i\ j)$ est une transposition de σ_2 , et $i \in \Gamma$, $j \in \Gamma$). Donc i et j doivent appartenir à deux orbites distinctes qui doivent être les orbites Γ et Γ' pour lesquelles la décomposition est extraorbitale, en effet $(i\ j)$ est une transposition de σ_2 qui est une involution.

Si $i.\gamma$ et $j.\gamma$ appartiennent à deux orbites distinctes, ces deux orbites ne peuvent être que les orbites Γ et Γ' , car la transposition $(i\ j)$ est commune à σ_1 et σ_2 , et de ce fait $(i.\gamma\ j.\gamma)$ est une transposition de σ_I (remarque à la définition 3).

Si $i.\gamma$ et $j.\gamma$ appartiennent à une même orbite, cette orbite Γ'' est nécessairement différente de Γ et de Γ' , car $(i.\gamma\ j.\gamma)$ est une transposition de σ_I , et d'autre part la décomposition considérée est extraorbitale pour Γ et Γ'.

Les seuls cas à considérer sont donc :

$$i \in \Gamma , \qquad j \in \Gamma' , \qquad \underset{\sim}{\text{card}}\ \Gamma = \underset{\sim}{\text{card}}\ \Gamma' \ ;$$

(α) Soit $i.\gamma \in \Gamma$ et $j.\gamma \in \Gamma'$;

(β) Soit $i.\gamma \in \Gamma'$ et $j.\gamma \in \Gamma$;

(γ) Soit $i.\gamma \in \Gamma''$ et $j.\gamma \in \Gamma''$, $\Gamma'' \cap \Gamma = \emptyset$, $\Gamma'' \cap \Gamma' = \emptyset$.

On peut aussi remarquer que la fixation ne peut réunir deux orbites disjointes en une seule, que si une, au moins, des deux orbites est finie. Ceci nous permet d'affirmer que

$$\underset{\sim}{\text{card}}\ \Gamma = \underset{\sim}{\text{card}}\ \Gamma' = n , \qquad n \in \underset{\sim}{N} .$$

(α) $i \in \Gamma$, $j \in \Gamma'$, $i.\gamma \in \Gamma$, $j.\gamma \in \Gamma'$, $\underset{\sim}{\text{card}}\ \Gamma = \underset{\sim}{\text{card}}\ \Gamma' = n$.

$$\sigma_2 = (1\ 1') \ldots (k\ (n-k)') \ldots ((n-1)\ 1')$$

$$\sigma_I = (1\ 0') \ldots (k\ (n-k+1)') \ldots ((n-1)\ 2')(0\ 1') \ .$$

Si $(i\ j) = (p\ (n-p)')$ et $(i.\gamma\ j.\gamma) = (q\ (n-q+1)')$, on a, suivant l'ordre relatif de p et q dans $\underset{\sim}{Z}$,

$p < q - 1$:

$$\bar{\sigma}_2\ \omega = (0 \ldots (p-1)\ q \ldots (n-1))((p+1) \ldots (q-i))$$
$$(0' \ldots (n-q)'\ (n-p+1)' \ldots (n-1)')$$
$$((n-q+1)' \ldots (n-p-1)')(p)((n-p)') \ ;$$

$p = q - 1$ $(j = j.\gamma)$ ou $p = q$ $(i = i.\gamma)$:

$$\bar{\sigma}_2\ \omega = (0 \ldots (p-1)\ (p+1) \ldots (n-1))$$
$$(0' \ldots (n-p-1)'\ (n-p+1)' \ldots (n-1)')(p)((n-p)' \ ;$$

$p > q$:

$$\bar{\sigma}_2\ \omega = (0 \ldots (q-1)\ (p+1) \ldots (n-1))(q \ldots (p-1))$$
$$(0' \ldots (n-p-1)'\ (n-q+1)' \ldots (n-1)')$$
$$((n-p+1)' \ldots (n-q)')(p)((n-p)') \ .$$

Dans tous les cas, la décomposition induite ne peut être intraorbitale.

(β) $i \in \Gamma$, $j \in \Gamma'$, $i.\gamma \in \Gamma'$, $j.\gamma \in \Gamma'$, $\underset{\sim}{\text{card}}\ \Gamma = \underset{\sim}{\text{card}}\ \Gamma' = n$.

Les expressions de σ_2 et de σ_I sont les mêmes que dans le cas précédent. Si $(i\ j) = (p\ (n-p)')$ et $(i.\gamma\ j.\gamma) = ((n-q+1)'\ q)$, on a, suivant l'ordre relatif de p et q dans $\mathbb{Z}$,

$p < q - 1$:

$$\bar{\sigma}_2\ \omega = (0' \ldots (n-q)'\ (p+1) \ldots (q-1)\ (n-p+1)' \ldots (n-1)')$$
$$(0 \ldots (p-1)\ (n-q+1)' \ldots (n-p-1)'\ q \ldots (n-1))(p)((n-p)') ;$$

$p = q - 1$ $(j = i.\gamma)$ ou $p = q$ $(i = j.\gamma)$:

$$\bar{\sigma}_2\ \omega = (0 \ldots (p-1)\ (p+1) \ldots (n-1))$$
$$(0' \ldots (n-p-1)'\ (n-p+1)' \ldots (n-1)')(p)((n-p)') \quad ;$$

$p > q$:

$$\bar{\sigma}_2\ \omega = (0' \ldots (n-p-1)'\ q \ldots (p-1)\ (n-q+1)' \ldots (n-1)')$$
$$(0 \ldots (q-1)\ (n-p+1)' \ldots (n-q)'\ (p+1) \ldots (n-1))(p)((n-p)') .$$

Dans tous les cas, la décomposition induite ne peut être intraorbitale.

(γ) $i \in \Gamma$, $j \in \Gamma'$, $i.\gamma \in \Gamma''$, $j.\gamma \in \Gamma''$, $\Gamma'' \cap \Gamma = \emptyset$, $\Gamma'' \cap \Gamma' = \emptyset$.

Supposons que la restriction de σ_2 à Γ'' admette un point fixe

$$\sigma_2 = (0\ 0') \ldots (p\ (n-p)') \ldots ((n-1)\ 1')$$
$$(0'') \ldots (q''\ (-q)'') \ldots$$
$$\sigma_I = (1\ 0') \ldots (p\ (n-p+1)') \ldots (0\ 1')$$
$$(0''\ 1'') \ldots ((-q)''\ (q+1)'') \ldots$$

Si $(i\ j) = (p\ (n-p)')$ et $(i.\gamma\ j.\gamma) = ((-q)''\ (q+1)'')$, on obtient, après fixation de i et j ,

$$\bar{\sigma}_2\ \omega = (\ldots (-q-1)''\ (p+1) \ldots 0 \ldots (p-1)\ (-q)'' \ldots q''\ (n-p+1)'$$
$$\ldots 0' \ldots (n-p+1)'\ (q+1)'' \ldots)(p)((n-p)') .$$

Si $(i\ j) = (p\ (n-p)')$ et $(i.\gamma\ j.\gamma) = ((q+1)''\ (-q)'')$, on obtient, après fixation de i et j ,

$$\bar{\sigma}_2\ \omega = (\ldots (-q-1)''\ (n-p+1)' \ldots 0' \ldots (n-p-1)'\ (-q)''$$
$$\ldots 0'' \ldots q''\ (p+1) \ldots 0 \ldots (p-1)\ (q+1)'' \ldots)(p)((n-p)') .$$

Dans tous les cas, les trois orbites Γ , Γ' , Γ'' de σ se réunissent en une seule orbite, ce qui implique que la décomposition obtenue est intraorbitale.

Si la restriction de σ_2 à Γ'' n'admet pas de point fixe, on se ramène au cas étudié, grâce au principe des translations des indices.

BIBLIOGRAPHIE

[1] JACQUES (A.), LENORMAND (C.), LENTIN (A.) et PERROT (J.-F.). - Un résultat extrémal en théorie des permutations, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 1968, Série A, p. 446-448.

[2] LENTIN (A.). - Contribution à une théorie des équations dans les monoïdes libres, Thèse Sc. math. Paris, 1969.

(Texte reçu le 11 mars 1970)

Max FONTET
8 rue La Fontaine
75 - PARIS 16

André LENTIN
180 rue de la Convention
75 - PARIS 15