Claude Lenormand

Opérateurs sur les polynômes non commutatifs définitions et notations

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 3, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A3_0>

Séminaire SCHÜTZENBERGER-LENTIN-NIVAT
(Problèmes mathématiques
de la Théorie des automates)
Année 1969/70, n° 3, 9 p.

25 novembre 1969

OPÉRATEURS SUR LES POLYNÔMES NON COMMUTATIFS
DÉFINITIONS ET NOTATIONS

par Claude LENORMAND

I. Polynômes et séries sur un monoïde

Dans tout le texte, la lettre A désignera un anneau unitaire ; l'élément unité de A sera noté 1, et le zéro sera noté 0. On supposera que A contient l'ensemble des entiers algébriques.

Définition 1. - Etant donnés un monoïde M et un anneau unitaire A, le A-module $S = A^M$ des applications de M dans A est l'espace des séries sur M, à coefficients dans A.

On appelle support d'une série $s \in S$, le support de l'application de M dans A que la série représente, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $m \in M$ tels que $s(m) \neq 0$.

Définition 2. - Le A-module $P = A^{(M)}$ des applications de M dans A, dont le support est fini, est l'espace des polynômes sur M, à coefficients dans A.

Le A-module P est un sous-module du A-module S, et M est une base de P.

Une série $s \in S$ sera dite caractéristique d'une partie M' de M, si l'on a $s(m) = 1$ pour $m \in M'$, et $s(m) = 0$ lorsque $m \in M - M'$.

Toute partie M' de M sera assimilée à sa série caractéristique, à commencer par M lui-même (les éléments de M sont alors appelés les monômes de P).

Définition 3. - On appellera forme fondamentale, l'application bilinéaire de $P \times S$ dans A définie par $\langle m , m' \rangle = 1$ lorsque $m = m'$, et $\langle m , m' \rangle = 0$ lorsque $m \neq m'$, en notant $\langle f , g \rangle$ l'image par la forme fondamentale du couple $(f , g) \in P \times S$.

Ceci permet notamment d'orthogonaliser toute suite libre de polynômes.

Mais, surtout, cette forme bilinéaire permet de considérer les modules S et P comme duaux.

Toute série $s \in S$ s'écrira alors

$$s = \sum_{m \in M} \langle m , s \rangle m \quad ,$$

et toute forme sur P est assimilée à une telle série (par exemple, e étant l'élément unité de M, et $p \in P$ un polynôme, $\langle p , e \rangle$ est ce que l'on appelle le terme constant du polynôme p, et $\langle p , X^* \rangle$ la somme des coefficients dudit polynôme).

Définition 4. - On appelle opérateur de P (resp. S), tout endomorphisme du module P (resp. S).

Pour tout opérateur $\mathcal{O}$, on notera $\mathrm{Im}\, \mathcal{O}$ son image, et $\mathrm{Ker}\, \mathcal{O}$ son noyau.

Définition 5. - L'opérateur dual d'un opérateur w de P est l'opérateur de S que nous noterons w^t, défini par

$$\langle wf , g \rangle = \langle f , w^t g \rangle , \qquad \text{pour tout couple } (f , g) \in P \times S \ .$$

Une algèbre sur un module $\mathfrak{M}$ est définie par une application bilinéaire de $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}$, que nous noterons multiplicativement.

Ainsi, l'ensemble des opérateurs de P (resp. S) constitue un A-module, que l'on munit canoniquement d'une structure d'algèbre dont le produit n'est autre que la composition des applications.

De façon générale, notons fg le produit de deux éléments f et g d'une algèbre.

Une dérivation $\mathcal{D}$ est un opérateur satisfaisant à $\mathcal{D}fg = f\mathcal{D}g + \mathcal{D}f\mathbf{g}$.

Pour tout élément f, d'un module muni d'une structure d'algèbre, nous noterons $\exp f$ l'élément $\sum_{n \in \mathbb{N}} f^n/n!$, et $\log(I + f)$ l'élément $- \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (f^i/i)$, lorsque cela a un sens, I notant l'élément unité de l'algèbre. Lorsque f et g commutent, on a $\exp(f + g) = \exp f \exp g$; enfin, si $\mathcal{D}$ est une dérivation, et si f commute avec $\mathcal{D}f$, on a $\mathcal{D} \exp f = \mathcal{D}f \exp f$.

II. Algèbres sur un monoïde libre

Etant donné un ensemble X fini, nous noterons X^* le monoïde libre engendré par X, c'est-à-dire l'ensemble des suites finies d'éléments de X, muni de la composition des suites finies par concaténation.

Une suite finie d'éléments de X, ou mot $m = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ sur l'alphabet X, sera éventuellement notée multiplicativement $m = x_1 x_2 \dots x_n = \prod_{i \in [n]} x_i$, où l'on note $[n]$ l'ensemble totalement ordonné des n premiers entiers, zéro exclu.

Le mot m apparaît ainsi comme représentatif de l'application μ de $[n]$ dans X, telle que $\mu(i) = x_i$ pour tout $i \in [n]$.

De fait, les constructions qui suivent pourraient être présentées de manière catégorielle, en utilisant les notations d'EILENBERG et WRIGHT [2].

Nous noterons e l'élément neutre de X^*, et mm' la composition des mots m et m'.

Dans la suite, X^* est pris pour monoïde M.

Nous considérerons, sur P, les trois algèbres de Hadamard, Cauchy, et Hurwitz, ainsi définies :

Définition 6. - L'algèbre de Cauchy sur P est définie par l'application bilinéaire b de $P \times P$ dans P, telle que

$$b(m' , m) = m'm ,$$

pour tout couple (m' , m) d'éléments de X, le produit $m'm$ étant celui de X^*.

On notera fg ou $f.g$ le produit non commutatif de deux polynômes dans l'algèbre de Cauchy ; nous utiliserons les deux notations, ainsi, si w est un opérateur, wfg sera interprété comme $w(fg)$, et $wf.g$ comme $(wf)g$. Le crochet de Lie $[f , g]$ sera relatif à l'algèbre de Cauchy, et l'on notera f^n la puissance n-ième de f dans l'algèbre de Cauchy. Nous utiliserons aussi le crochet de Lie $[w , w']$ pour deux opérateurs w , w'.

Il est clair que l'application bilinéaire, définissant l'algèbre de Cauchy sur P, s'étend en une application bilinéaire de $S \times S$ dans S, et l'algèbre de Cauchy est définie sur S.

L'algèbre de Cauchy admet un anti-isomorphisme déterminé par

$$\sim mm' = \sim m' . \sim m , \quad \sim x = x \quad \text{si} \quad x \in X ,$$

et à tout opérateur W correspond l'opérateur $\sim w \sim$, conjugué de w par $\sim$.

Par ailleurs, le morphisme d'algèbre α, tel que $\alpha x = - x$ pour tout $x \in X$, est appelé involution principale de l'algèbre de Cauchy de P.

Lorsque l'on parlera de l'opérateur conjugué de l'opérateur w, sans autre précision, il s'agira de l'opérateur $\alpha w \alpha$, conjugué de w par l'involution principale.

L'algèbre de Cauchy peut être définie sur l'espace des polynômes de tout monoïde, et sur l'espace des séries de tout monoïde M à factorisation finie, c'est-à-dire tel que tout élément $m \in M$ puisse s'écrire d'un nombre fini de façons sous la forme $m = m'm''$, m' et m'' étant deux éléments de M . Dans ce cas, M^{-1} est la série de Möbius du monoïde (cf. [1]), et la série de Möbius du produit direct des deux monoïdes est le produit tensoriel des séries de Möbius.

Définition 7. - L'algèbre de Hurwitz sur $P = Z^{(X^*)}$ peut être définie par l'application bilinéaire b de $P \times P$ dans P , définie par récurrence sur la base de P par

$$b(xm , ym') = xb(m , ym') + yb(xm , m') ,$$

pour tout couple (m , m') d'éléments de X , et tout couple (x , y) d'éléments de X , étant donné que $b(e , m) = m$.

Il est immédiat que ce produit est commutatif, et l'application b ainsi définie s'étend en un produit commutatif sur S .

On notera $f \,\omega\, g$ le produit de Hurwitz de deux séries, et $f^{\omega n}$ la puissance n-ième de la série f pour ce produit.

Remarque 1. - Si l'on assimile toute partie de X^* ou X à sa série caractéristique, on a $X^* = \sum_{n \in N} X^n$, en notant X^n le polynôme puissance n-ième du polynôme caractéristique de X ; la série X^* est inverse de $e - X$ dans l'algèbre de Cauchy.

Par ailleurs, $X \,\omega\, X^n = X.X^n + X.X \,\omega\, X^{n-1}$, soit finalement $X \,\omega\, X^n = (n + 1)X^{n+1}$, et $X^{\omega n} = n!\, X^n$; la série $\sum_{n \in N} n!\, X^n$ est ainsi inverse de $e - X$ pour le produit de Hurwitz (ceci a un sens, même si X est infini).

Remarque 2. - Voici une importante propriété du produit de Hurwitz ; soit X et Y deux alphabets disjoints, et $X + Y$ leur union (on réservera la notation $X + Y$ au cas $X \cap Y = \emptyset$) ; on a

$$(X + Y)^* = X^* \,\omega\, Y^* ,$$

ce qui résulte de

$$(X + Y)^n = \sum_{i+j=n} X^i \,\omega\, Y^j ,$$

comme cela s'établit immédiatement par récurrence sur l'entier $n \in N$.

En particulier, on a

$$X^* = \underset{x \in X}{\omega} (1 - x)^{-1} = \underset{x \in X}{\omega} \{x\}^* .$$

Remarque 3. - On notera σ l'homomorphisme canonique de l'algèbre de Cauchy dans celle de Hurwitz, défini par $\sigma m'm = \sigma m' \,\omega\, \sigma m$, pour tout couple (m , m') d'éléments de X^*, et $\sigma x = x$ pour $x \in X$.

Ce morphisme d'algèbre est un isomorphisme, lorsque l'alphabet X est réduit à une lettre, et seulement dans ce cas.

Notons alors $\exp X$ la série

$$\exp X = \sum_{n\in N} X^n/n! \quad ,$$

en supposant que l'anneau A contient l'anneau $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. En vertu de la remarque 1 ci-dessus, on a

$$\sigma \exp X = X^* \quad .$$

Remarque 4. - Soient S^+ le sous-module des séries $s \in S$, telles que $\langle s , e\rangle = 0$, β la bijection de S^+ sur S^+, définie par

$$\beta s = \sum_{n\in N} s^{n+1} \quad ,$$

et i l'involution telle que

$$is = - s \quad .$$

On a alors

$$\beta^{-1} = i\beta i \quad ,$$

mais β n'est pas linéaire, et ce n'est pas un opérateur.

Par ailleurs, la bijection ζ de s^+ sur s^+, définie par

$$\zeta s = \exp s - 1 = \sum_{n>0} s^n/n! \quad ,$$

pour tout $s \in S^+$, admet pour inverse la bijection

$$\zeta^{-1} s = \log(1 + s) = - \sum_{n>0} (- s)^n/n \quad .$$

Définition 8. - L'algèbre de Hadamard sur P est définie par l'application bilinéaire b ainsi définie sur la base X^* de P :

$$b(m , m') = \begin{cases} m , & \text{si } m = m' , \\ 0 , & \text{si } m \neq m' , \end{cases}$$

où 0 est la série dont tous les coefficients sont nuls.

Le produit de Hadamard s'étend en un produit de S , et ce produit est évidemment commutatif.

On notera $f \, H \, g$ le produit de Hadamard des séries f et g .

Il est clair que le produit de Hadamard peut être défini, quel que soit le monoïde M considéré, et quel que soit l'anneau unitaire A .

Toute dérivation $\mathcal{D}$ du produit de Hadamard satisfait à

$$\mathcal{D}(m \, H \, m) = 2m \, H \, \mathcal{D}m \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{D}m = \lambda m \qquad \text{et} \qquad \lambda m = 2\lambda m \quad .$$

Excepté sur un anneau de caractéristique 2 , le produit de Hadamard n'admet que la dérivation triviale $\mathcal{D}m = 0$ pour tout $m \in X^*$.

III. Quelques opérateurs essentiels

Module des dérivations. - Toute dérivation $\mathcal{D}$ de l'algèbre de Cauchy de P s'étend en une dérivation de S ; par contre, toute dérivation de S n'est pas une dérivation de P . Toute dérivation de P ou S est déterminée par son action sur les éléments de X .

Ainsi, pour définir une dérivation de P (resp. S), il suffit de se donner une application de X dans P (resp. S).

A tout élément $x \in X$, associons la dérivation partielle D_x définie par

$$D_x \, y = \langle x \, , \, y \rangle e \quad .$$

L'ensemble des dérivations de P (resp. S) est donc un P-module (resp. S-module), dont une base est constituée par l'ensemble des dérivations partielles D_x , lorsque x parcourt X .

On notera ∂_x la dérivation qui s'écrit xD_x dans le module des dérivations, et telle que $\partial_x \, y = \langle x \, , \, y \rangle x$ pour tout $y \in X$.

Nous noterons $D = \sum_{x \in X} D_x$ la dérivation totale, et c'est de D qu'il s'agira lorsque l'on parlera de l'opérateur de dérivation, sans autre précision ; on a

$$Dx = e \ , \qquad \text{quel que soit} \quad x \in X \quad .$$

On notera $\partial = \sum \partial_x$, la dérivation satisfaisant à $\partial x = x$ quel que soit $x \in X$.

Image commutative et degrés. - Notons $M = \prod_{x \in X} \{x\}^*$ le produit direct des monoïdes libres monogènes engendrés par les éléments de X , et γ l'homomorphisme canonique de X^* sur M tel que $\gamma x = x$ (l'élément x est considéré, à gauche de cette dernière relation comme élément de X , et à droite comme élément de M) et

$$\gamma mm' = \gamma m . \gamma m'$$
$$= \gamma m' . \gamma m \quad .$$

Soient p_x le projecteur de M sur $\{x\}^*$, et φ_x l'isomorphisme de $\{x\}^*$ sur $\underline{N}$; l'application $\lambda_x = \varphi_x \circ p_x \circ \gamma$ fait correspondre à tout mot $m \in X^*$ son degré partiel en x , et l'on a aussi $\partial_x m = (\lambda_x m).m$. On notera

$$\lambda m = \sum_{x \in X} \lambda_x m$$

le degré (total) de tout mot $m \in X^*$, c'est-à-dire l'image de m par l'homomorphisme ψ de M dans $\underline{N}$ tel que $\psi x = 1$ pour tout $x \in X$.

On a $\partial m = (\lambda m)m$.

On notera P_n le sous-module des polynômes homogènes de degré n , et éventuellement W_n la restriction d'un opérateur W à P_n : ainsi, D_n est une application de P_n dans P_{n-1} .

Séries comme opérateurs. - A tout mot $m \in X^*$ sont associés les opérateurs suivants, que nous définirons sur la base de P :

(1) L'opérateur $\hat{m}$ qui, à tout mot $m' \in X^*$, fait correspondre le mot mm' ; mais aussi l'opérateur qui, au mot m' , fait correspondre le mot $m'm$: c'est là l'extension à l'algèbre de X^* des représentations régulières de X^* ; si $m = m_1 m_2 \dots m_p$ est la décomposition de m sur X , $\hat{m}$ est le produit $\hat{m}_1 \hat{m}_2 \dots \hat{m}_p$; le dual de $\hat{x}$, pour $x \in X$ est défini, par

$$\langle \hat{x}m' , m'' \rangle = \langle m' , \hat{x}^t m'' \rangle = 1$$

si $m'' = xm'$, et 0 dans tout autre cas : l'opérateur $\hat{x}^t$ satisfait donc à

$$\hat{x}^t m'' = m' \quad \text{si } m'' = xm' , \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sinon} \quad .$$

Notons alors $\hat{X}$ l'opérateur $\sum_{x \in X} \hat{x}$; l'opérateur dual $\hat{X}^t = \sum_{x \in X} \hat{x}^t$ satisfait à $\hat{X}^t xm = m$ pour tout $m \in X^*$ et tout $x \in X$, et $\hat{X}^t e = 0$.

Considérons l'opérateur $\hat{X}^*$ tel que $\hat{X}^* m = X^* m$: l'opérateur dual $\hat{X}^{*t}$ est tel que, pour tout mot $m \in X^*$, $\hat{X}^{*t} m$ est le polynôme caractéristique des facteurs droits de m ; l'opérateur $\sim\hat{X}^{*t}\sim$, conjugué par l'anti-isomorphisme $\sim$, fait alors correspondre à tout mot le polynôme caractéristique de ses facteurs gauches (e et m inclus) ; finalement, le polynôme $\hat{X}^{*t} \sim\hat{X}^{*t}\sim m$ est le polynôme des facteurs de m .

(2) L'opérateur associé à m qui, à tout mot $m' \in X^*$, fait correspondre le polynôme $m \,\omega\, m'$. En particulier, à tout $x \in X$, on associe ainsi l'opérateur dual de la dérivation partielle D_x :

PROPOSITION. - <u>L'opérateur de dérivation partielle</u> D_x <u>admet pour opérateur dual</u> <u>l'opérateur</u> D_x^t <u>tel que</u> $D_x^t\, m = m \,\omega\, x$.

<u>Démonstration</u>. - Soient un couple (m , m') d'éléments de X , et un couple (y , z) d'éléments de X ; on a alors (démonstration par récurrence sur les degrés)

$$\langle D_x\, ym , zm' \rangle = \langle yD_x\, m , zm' \rangle + \langle x , y \rangle \langle m , zm' \rangle \quad .$$

Or,

$$\langle yD_x\, m , zm' \rangle = \langle y , z \rangle \langle D_x\, m , m' \rangle \quad ,$$

et, en vertu de l'hypothèse de récurrence,

$$\langle D_x\, m , m' \rangle = \langle m , x \,\omega\, m' \rangle \quad ,$$

donc

$$\langle y , z \rangle \langle D_x\, m , m' \rangle = \langle ym , z(x \,\omega\, m') \rangle \quad .$$

Par ailleurs,

$$\langle x , y \rangle \langle m , zm' \rangle = \langle ym , xzm' \rangle \quad ,$$

et finalement

$$\langle D_x\, ym , zm' \rangle = \langle ym , xzm' \rangle + \langle ym , z(m' \,\omega\, x) \rangle \quad ,$$

soit

$$\langle D_x\, ym , zm' \rangle = \langle ym , zm' \,\omega\, x \rangle \quad ,$$

ce que l'on voulait précisément établir. Par ailleurs, il est exact que

$$\langle D_x\, e , e \rangle = \langle e , e \,\omega\, x \rangle = \langle e , x \rangle = 0 \quad .$$

(3) A tout mot $m \in X^*$ correspond l'opérateur qui, à tout mot $m' \in X$, associe $m \,H\, m'$; cet opérateur, d'une part est idempotent (c'est un projecteur), d'autre part est son propre dual : en effet, on a d'une part,

$$m \,H\, m \,H\, m' = m \,H\, m' \quad ,$$

et d'autre part,

$$\langle m\, H\, m' , m''\rangle = \langle m' , m\, H\, m''\rangle$$
$$= 1 \quad \text{si} \quad m = m' = m''$$
$$= 0 \quad \text{sinon} .$$

De manière générale, tout opérateur w de P, dont la restriction à X^* est une permutation de X :

(a) peut être étendu en un opérateur de S,
(b) est tel que $w^t = w^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTIER (P.) et FOATA (D.). - Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 85).

[2] EILENBERG (S.) and WRIGHT (J. B.). - Automata in general algebras, Information and Control, t. 11, 1967, p. 452-470.

(Texte reçu le 1er décembre 1970)

Claude LENORMAND
70 avenue de Verdun
94 - IVRY