Claude Lenormand

Exponentiation de la dérivation, et intégration des séries en variables non commutatives

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 20, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A12_0>

Séminaire SCHÜTZENBERGER-LENTIN-NIVAT
(Problèmes mathématiques
de la Théorie des automates)
Année 1969/70, n° 20, 7 p.

28 avril 1970

EXPONENTIATION DE LA DÉRIVATION, ET INTÉGRATION DES SÉRIES EN VARIABLES NON COMMUTATIVES

par Claude LENORMAND

I. Exponentiation de D .

Soit X un ensemble fini ; on note P le A-module des polynômes sur X^* . L'anneau A est supposé contenir $\mathbb{Z}$.

Définition 1. - Un opérateur w de P est dit localement nilpotent si, pour tout polynôme $p \in P$, il existe un entier $i \in N$ tel que $w^i p = 0$.

On note S le module des séries sur X^* , dual de P . On note e l'élément neutre de X^* .

Définition 2. - Un opérateur w de P est dégradant si la relation $(\lambda m \geq \lambda m')$ entraîne $(\langle wm , m' \rangle = 0)$, où $\langle m , m' \rangle = 1$ si $m = m'$, et 0 sinon.

Il est clair que tout opérateur dégradant est localement nilpotent. Soient w un opérateur localement nilpotent de P , et I l'opérateur identité ; l'opérateur

$$(I - w)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} w^n ,$$

inverse de $I - w$, est un opérateur de P ; de même, $I + w$ est inversible, en tant qu'opérateur de P .

De manière générale, si w est un opérateur de P localement nilpotent, toute série en w représente un opérateur de P commutant avec w . Soit $D_x y = \langle x , y \rangle e$ avec x , y éléments de X .

Ainsi, toute dérivation partielle D_x est localement nilpotente, et la série $T_x = \exp D_x$ représente un opérateur de P ; de plus :

PROPOSITION. - L'exponentielle de la dérivation partielle D_x est le morphisme T_x tel que $T_x y = y + \langle x , y \rangle e$.

En effet,

$$(D_x^n uv)/n! = \sum_{i+j=n} ((D_x^i u)/i!)((D_x^j v)/j!)$$

parce que

$$(D^n\, mm')/n! = \sum_{i+j=n} ((D^i\, m)/i!)((D^j\, m!)/j!) ,$$

comme on l'établit par récurrence sur n pour tout couple (m , m') de mots de X^*. Soit finalement $T_x\, uv = T_x\, u \times T_x\, v$; T_x est donc un morphisme de l'algèbre de Cauchy de P , et l'on a évidemment

$$T_x\, y = (I + D_x)y = y + \langle x , y \rangle y$$

pour tout élément $x \in X$.

PROPOSITION. -- <u>Pour tout couple</u> (x , y) <u>d'éléments de</u> X , <u>les dérivations partielles</u> D_x <u>et</u> D_y <u>commutent.</u>

En effet, cela s'établit immédiatement sur la base de P , par récurrence sur le degré des mots :

$$\begin{aligned} D_x\, D_y\, mm' &= D_x(D_y\, mm' + mD_y\, m') \\ &= D_x\, D_y\, mm' + D_y\, m\, D_x\, m' + D_x\, m\, D_y\, m' + mD_x\, D_y\, m' \\ &= D_y\, D_x\, mm' \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$D_x\, D_y\, m = D_y\, D_x\, m , \quad D_x\, D_y\, m' = D_y\, D_x\, m' ,$$

et il reste à vérifier que

$$D_x\, D_y\, ab = D_y\, D_x\, ab$$

pour tout couple (a , b) d'éléments de X . On peut donc écrire

$$\exp D = \exp \sum_{x\in X} D_x = \prod_{x\in X} \exp D_x = \prod_{x\in X} T_x ,$$

et $T = \exp D$ est le morphisme de l'algèbre de Cauchy défini par

$$Ty = (\prod_{x\in X} T_x)y = y + \sum_{x\in X} \langle x , y\rangle e = y + e ,$$

quel que soit l'élément $y \in X$.

Le polynôme Tm , pour tout mot m , sera appelé le polynôme des <u>sous-mots</u> du mot m .

L'involution principale α , morphisme involutif de l'algèbre de Cauchy, est définie par $\alpha x = - x$ pour tout $x \in X$, et donc $\alpha m = (- 1)^{\lambda m}\, m$; finalement, pour toute dérivation partielle D_x ,

$$\alpha D_x\, \alpha = - D_x ,$$

ce qui peut également s'établir sur X^* par récurrence sur le degré :

$$\begin{aligned} (\alpha D_x\, \alpha)mm' &= \alpha D_x(\alpha m\, \alpha m') \\ &= \alpha(D_x\, \alpha m\, \alpha m' + \alpha m\, D_x\, \alpha m') \end{aligned}$$

$$= \alpha D_x \alpha m\, m' + m\, \alpha D_x \alpha m'$$
$$= -(D_x m . m' + m\, D_x m')$$
$$= - D_x mm'$$

On a alors $\alpha T_x \alpha = \exp \alpha D_x \alpha = \exp - D$, et $\alpha T_x \alpha$ coïncide avec l'automorphisme T_x^{-1} de P , inverse de T_x , et tel que $T_x^{-1} y = y - \langle x , y \rangle$.

De même que $T = \exp D$, on a $T^{-1} = \exp - D$.

L'opérateur T_x de P n'est pas localement nilpotent, mais il peut s'écrire $T_x = I + \Delta_x$, avec Δ_x localement nilpotent, et $I - \Delta_x$, comme $I + \Delta_x$, est inversible ; la conséquence la plus intéressante de l'écriture de T_x sous la forme $I + \Delta_x$ est que l'opérateur D_x peut s'écrire

$$D_x = \log(I + \Delta_x) .$$

Par ailleurs, puisque D_x et D_y commutent, et puisque Δ_x et Δ_y s'expriment en D_x et D_y respectivement, on a

$$D = \sum_{x \in X} \log(I + \Delta_x) = \log(I + \Delta) ,$$

avec $T = I + \Delta = \prod_{x \in X} (I + \Delta_x)$.

L'opérateur Δ n'est pas une dérivation, ni un morphisme, mais on a la remarquable relation par rapport au produit de polynômes :

$$\Delta fg = \Delta f.g + f\Delta g + \Delta f.\Delta g .$$

On a également $\Delta fg = E^{-1} f.\Delta g + \Delta f.E^{-1} g$, où $E^{-1} = (T + I)/2$, E étant l'opérateur d'Euler que nous considérerons ultérieurement.

L'opérateur $\delta = (T + T^{-1})/2$ est inversible, et δm est le polynôme des sous-mots de m dont la parité du degré est celle de m , alors que l'opérateur localement nilpotent $(T - T^{-1})/2$ fournit le polynôme des sous-mots de parité opposée.

Nous avons vu que $D_x^t m = m \,\omega\, x$; il en résulte que l'opérateur $(I - D^t)$ de l'espace des séries a pour inverse l'opérateur "produit de Hurwitz par $\sum_{n \in N} X^{\omega n}$ " .

Par ailleurs, T admet un opérateur dual T^t tel que

$$T^t m = m \,\omega\, (\sum X^{\omega n})/n!$$

Or, nous avons vu que $X^{\omega n} = n! X^n$; le dual de T est donc le produit de Hurwitz par X^* .

<u>Opérateurs de</u> S . - Tout opérateur w de P ne peut être étendu en un opérateur de S ; ainsi, bien que $I - D$ soit un opérateur de S , $I - D$ est inversible pour P , et non pour S .

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur w de P soit également un opérateur de S est la suivante :

Pour tout élément $m \in X$, l'ensemble des mots $m' \in X$, tels que l'on ait $\langle wm', m\rangle \neq 0$, est fini,

cette condition étant satisfaite pour tout opérateur de S.

Ainsi, T n'est pas un opérateur de S ; on peut cependant considérer la sous-algèbre de l'algèbre de Cauchy sur S constituée des séries $f \in S$ telles que Tf existe (et de façon générale, associer à tout opérateur w de P le module des séries $f \in S$ telles que wf existe) ; cette sous-algèbre F est telle que $FP = PF = F$.

Coefficients binomiaux. - Lorsque $X = \{x\}$ est réduit à une lettre, l'expression de T dans la base X^* de P fournit les coefficients binômiaux,

$$\langle Tx^n , x^i\rangle = \binom{n}{i} .$$

De manière générale, si m est un mot,

$$\langle Tm , X^i\rangle = \binom{\lambda m}{i}$$

et

$$\langle Tm , X^*\rangle = 2^{\lambda m} ,$$

comme on peut l'établir, par exemple, par récurrence sur le degré de m, en remarquant que

$$\begin{aligned}\langle Tym , X^i\rangle &= \langle yTm , \textstyle\sum xX^{i-1}\rangle + \langle Tm , X^i\rangle \\ &= \langle Tm , X^i + X^{i-1}\rangle .\end{aligned}$$

On a par ailleurs, α étant l'involution principale,

$$\begin{aligned}\langle T^{-1} m , m'\rangle &= \langle \alpha T\alpha m , m'\rangle \\ &= \langle T\alpha m , \alpha m'\rangle \\ &= (-1)^{\lambda m'} \langle \alpha m , T^t m'\rangle \\ &= (-1)^{\lambda m'+\lambda m} \langle Tm , m'\rangle\end{aligned}$$

et, T et T^{-1} étant inverses,

$$\sum_{m'\in X^*} \langle Tm , m'\rangle\langle T^{-1} m' , m''\rangle = \langle m , m''\rangle .$$

II. Intégration des séries.

On notera S l'espace des séries sur X^*.

Sous-algèbre des séries de dérivée nulle. - L'ensemble des séries $f \in S$ telles que $Df = 0$ constitue une sous-algèbre ; il suffit de connaître, pour chaque

$n \in \underset{\sim}{N}$, le module des polynômes homogènes de degré n dont la dérivée est nulle. Nous noterons P_n le module des polynômes homogènes de degré n , et D_n la restriction de D à P_n ; nous allons construire, par récurrence sur n , une base des noyaux $\operatorname{Ker} D_n$ de D_n .

Lorsque $X^* = \{x\}^*$ est monogène, la seule série de dérivée nulle est e ; lorsque la cardinalité de X excède 1 , les séries de dérivée nulle sont, au contraire, extrêmement nombreuses.

A tout $x \in X$, nous allons associer une base B_x^n de $\operatorname{Ker} D_n$; nous établissons au préalable quelques propriétés utiles.

Soit f_{xy} l'application de S dans S telle que, pour tout $s \in S$, on ait [1]

$$f_{xy}\, s = xs - ys .$$

LEMME 1. - <u>Le noyau de</u> f_{xy} <u>se réduit à</u> $\{0\}$ <u>lorsque</u> $x \neq y$, <u>et aux séries s'exprimant sur</u> $\{x\}^*$ <u>lorsque</u> $x = y$.

<u>Démonstration</u>. - Pour l'établir, soit une série s telle que $xs = sy$; alors on a $s = xs_1$, et $xs_1 = s_1 y$: il en résulte que le support de s est contenu dans $\{x\}^*$, et alors $x = y$.

LEMME 2. - <u>Lorsque</u> $y \neq z$, <u>les applications</u> $f_{x,y}$ <u>et</u> $f_{x,z}$ <u>sont telles que</u> $\operatorname{Im} f_{x,y} \cap \operatorname{Im} f_{x,z} = \{0\}$.

<u>Démonstration</u>. - En effet, si (s , t) est un couple de séries non nulles satisfaisant à $xs - sy = xt - tz$, où x , y , z sont trois éléments de X , on a

$$x(s - t) = sy - tz .$$

Si y est distinct de z , les supports de sy et tz sont disjoints, et l'on a $s = xs_1$, $t = xt_1$, soit

$$x(s_1 - t_1) = s_1\, y - t_1\, z ,$$

et, finalement, s et t s'expriment sur $\{x\}^*$, d'où $x = y = z$, ce qui est exclu.

Pour $n > 1$, le noyau de D_n ne contient aucune série s'exprimant sur $\{x\}^*$: la restriction de $f_{x,x}$ à $\operatorname{Ker} D_n$ est donc une injection de $\operatorname{Ker} D_n$ dans P_{n+1}. Or il est clair que D et $f_{x,y}$ commutent, quel que soit le couple (x , y) d'éléments de X , car

$$\begin{aligned} Df_{xy}\, s &= D(xs - sy) \\ &= xDs - Ds.x \\ &= f_{xy}\, Ds \end{aligned}$$

[1] Je dois la considération de ces applications à la collaboration de A. JACQUES.

D'après les lemmes 1 et 2, les modules images de $\mathrm{Ker}\ D_n$ par la famille des applications $f_{x,y}$, où y parcourt X, sont disjoints. On peut donc écrire que leur somme directe E_n est incluse dans $\mathrm{Ker}\ D_{n+1}$:

$$E_n = \bigoplus_{y \in X} f_{x,y}\ \mathrm{Ker}\ D_n \subset \mathrm{Ker}\ D_{n+1} .$$

Par ailleurs, l'ensemble

$$B_x^1 = \{x - y \mid y \in X - \{x\}\}$$

constitue une base de $\mathrm{Ker}\ D_1$ de dimension $|X| - 1$, ce qui fait que $\mathrm{Ker}\ D_{n+1}$ est au moins de dimension $|X|^n(|X| - 1)$; le polynôme X lui-même constitue une base du module (de dimension 1) orthogonal à $\mathrm{Ker}\ D_1$.

De façon générale, on établirait par récurrence sur l'entier $n \in \underset{\sim}{N}$ que le polynôme X^n est orthogonal au noyau de D ; on a même un peu plus : pour toute série g, tout polynôme p, et tout couple (x , y) d'éléments de X, on a

$$\langle XpX , f_{x,y}\, g\rangle = \langle pX , g - Xp , g\rangle ;$$

donc, tout polynôme s'exprimant par un polynôme en X est orthogonal à $\mathrm{Im}\ f_{x,y}$.

Il nous reste à établir l'existence d'un sous-module de P_n, de dimension égale à celle de P_{n-1}, et dont l'intersection avec $\mathrm{Ker}\ D_n$ est vide : il en résultera que E_n est identique à $\mathrm{Ker}\ D_{n+1}$.

Pour cela, il suffit d'établir l'existence d'un opérateur J tel que $J(P_n) \subset P_{n+1}$, avec $DJ = I$: un tel opérateur sera appelé opérateur d'intégration.

Il est immédiat que tout opérateur J s'écrivant

$$\sum_{i \in \underset{\sim}{N}} a_{i+1}\, \hat{p}_{i+1}\, D^i ,$$

où $\{p_i\}_{i \in \underset{\sim}{N}}$ est une famille de polynômes tels que $Dp_{i+1} = p_i$, satisfait à $DJ = I$ si, et seulement si, l'on a $a_i + a_{i+1} = 0$ pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$.

Lorsque l'on parlera de <u>l'opérateur d'intégration</u> sans autre précision, il s'agira de l'opérateur J satisfaisant à la condition suivante : Les modules $\mathrm{Im}\ J$ et $\mathrm{Ker}\ D$ sont orthogonaux.

Dans ce cas, JD est l'opérateur de projection sur l'orthogonal du noyau de D.

Nous avons finalement établi la proposition suivante.

PROPOSITION. - <u>Le noyau de</u> D_n <u>est de dimension</u> $|X|^{n-1}(|X| - 1)$.

<u>Equations différentielles à coefficients constants</u>. - Si l'on cherche quel est le module des séries $s \in S$ satisfaisant à $ws = t$, où $t \in S$ et w est une série en D, $w = \sum_{i \in \underset{\sim}{N}} a_i\, D^i$, nous pourrons répondre à cette question ; en effet, si w

n'est pas inversible, w peut s'écrire $w = D^j v$, avec $j \in \underset{\sim}{N}$ et v inversible ; l'équation $ws = t$ se ramène alors à $D^j s = v^{-1} t$, et s est définie au noyau de D^j près.

<u>Séries de dérivée et d'image commutative nulle</u>. - On a $\gamma f_{xy} s = (\gamma x - \gamma y)\gamma s$, ce qui fait que $\gamma s = 0$ entraîne $\gamma f_{xy} s = 0$.

Or, le noyau de la restriction γ_2 de γ à P_2 admet pour base l'ensemble $\{[x , y] \mid y \in X - \{x\}\}$: ce noyau est donc de dimension $|X|(|X| - 1)/2$, et Ker D_{n+1} admet un sous module, de dimension $|X|^n(|X| - 1)/2$, qui appartient au noyau de γ_{n+1}.

Il faut enfin signaler que, pour tout $m \in X^*$, σm ne dépend que de γm : il en résulte que σ et γ ont même noyau.

(Texte reçu le 1er décembre 1970)

Claude LENORMAND
70 avenue de Verdun
94 - IVRY