Wilfried Brauer

Automates topologiques et ensembles reconnaissables

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. nº 18, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A10_0>

Séminaire SCHÜTZENBERGER-LENTIN-NIVAT
(Problèmes mathématiques
de la Théorie des automates)
Année 1969/70, n° 18, 24 p.

7 avril 1970

AUTOMATES TOPOLOGIQUES ET ENSEMBLES RECONNAISSABLES

par Wilfried BRAUER

Sommaire.

Introduction. - Le problème de développer une théorie générale des automates topologiques généralisant la théorie des automates abstraits a déjà été posé par S. GINSBURG en 1960 (cf. [19]). Sans en avoir connaissance, Ju. A. ŠREIDER (cf. [20]) a d'autre part montré, en 1961, qu'on peut bien utiliser la notion d'automate topologique en théorie de programmation dynamique. Malgré cela, une telle théorie n'avait pas été développée jusqu'à maintenant ; il y a seulement quelques traités sur les demi-groupes topologiques de transformations d'un espace topologique qu'on peut bien regarder comme des contributions à la théorie des automates topologiques (cf. [7], [9], [18], [22], et en outre [2], p. xi et 270).

En [5], nous avons présenté les fondements d'une théorie générale des automates topologiques (le point de départ étant une notion assez générale d'automate abstrait, comme il se trouve en [4], cf. aussi [1]), et nous avons montré que beaucoup d'entre les résultats de la théorie classique des automates s'étendent aux automates topologiques. Mais il reste divers problèmes à résoudre, dont quelques-uns seront mentionnés dans cet article. En outre, pour la théorie des automates topologiques, nous avons besoin de quelques notions de mathématique pure qui n'étaient pas encore, ou pas très bien connues : une théorie des monoïdes topologiques libres, des notions de continuité pour des correspondances (c'est-à-dire applications multivoques) et des topologies pour des espaces de sous-ensembles d'un espace topologique.

Dans ce papier, nous nous proposons de donner une impression de la théorie des automates topologiques en nous restreignant à ne traiter que quelques problèmes du cas particulier des automates compacts reconnaissants, la plupart des résultats présentés ici se trouvent, souvent sous une forme différente ou plus générale, dans [5], le but de cet article étant, en premier lieu, de résumer quelques résultats de [5] sous l'angle de la théorie des automates reconnaissants et des ensembles reconnaissables. Pour cette raison, nous ne nous occuperons guère des monoïdes libres, des notions de continuité et des topologisations, dont nous ne rappelons que les propriétés utilisées dans la suite, renvoyant à [5] pour les détails ; mais, en revanche, nous indiquerons brièvement les preuves de tous les résultats concernant les automates et les ensembles reconnaissables.

Dans ce qui suit, nous supposerons que le lecteur est familier avec la théorie des automates finis classiques (cf. [4], [1], [2], [19]) et avec la topologie générale (cf. [6]).

Soient X , Y deux espaces topologiques, alors $X \times Y$ note le produit cartésien de X et Y muni de la topologie produit ; soit Z un autre espace topologique : la projection de $X \times Y \times Z$ sur $X \times Z$ est notée par $pr_{1,3}$ par exemple.

Comme en [1], nous notons les applications comme opérant à droite. Soit : $f : X \to Y$ une application, alors l'image de $x \in X$ (resp. de $T \subseteq X$) est notée xf (resp. Tf) ; en outre $f|T$ désigne la restriction de f à T . Soit : $g : Y \to Z$ une deuxième application, alors $fg : X \to Z$ note la composition de f et g .

$|X|$ note le nombre cardinal de X ; $\emptyset$ désigne l'ensemble vide.

$\cup\{X_i \mid i \in I\}$ désigne la réunion des ensembles X_i , $i \in I$.

$\underset{\sim}{N} = \{1 , 2 , \dots \}$ désigne l'ensemble des nombres naturels, en outre $\underset{\sim}{N}_0 = \underset{\sim}{N} \cup \{0\}$.

Enfin, conformément à un usage qui se répand (cf. [17]), nous écrivons "ssi" au lieu de "si et seulement si".

1. Monoïdes topologiques libres.

Nous allons définir un monoïde topologique libre comme la solution d'un problème universel, et démontrer son existence par une construction explicite.

Définition 1.1. - Soient T un espace topologique, F un monoïde topologique, et i_T une application continue de T dans F . Alors (F , i_T) , noté F pour abréger, est appelé monoïde topologique engendré par T ssi, pour toute application continue f de T dans un monoïde topologique quelconque M , il existe un seul homomorphisme $h : F \to M$ tel que $f = i_T h$.

PROPOSITION 1.2. - Pour tout espace topologique T , il existe un monoïde topologique libre T^* engendré par T tel que T^* , comme monoïde abstrait, est librement engendré par l'ensemble sous-jacent à T .

Deux monoïdes topologiques libres T^* et S^* , engendrés respectivement par T et S , sont isomorphes ssi T et S sont homéomorphes.

Indiquons seulement la construction de T^* . Soit T^* l'ensemble de toutes les suites finies d'éléments de T , y compris la suite vide e . Alors

$$T^* = \{e\} \cup T \cup T^2 \cup \ldots \cup T^i \cup \ldots = \bigcup \{T^i \mid i \in \underset{\sim}{N}_0\} ,$$

où $T^0 = \{e\}$ et $T^i = T \times \ldots \times T$ (produit cartésien de i exemplaires de T). Munissons T^i de la topologie produit déterminée par la topologie de T , et T^* de la topologie somme des topologies des T^i . T^* est donc un monoïde topologique pour l'opération de concaténation (dite multiplication), ayant e comme élément unité et les éléments de T comme générateurs. Maintenant, on vérifiera facilement que T^* est un monoïde topologique libre engendré par T .

Pour l'étude des automates topologiques, le cas particulier où T est un espace compact est le plus intéressant, car la notion de monoïde topologique libre, engendré par un espace compact, est la généralisation naturelle, dans la classe des monoïdes topologiques, de la notion de monoïde libre engendré par un ensemble fini. Des résultats bien connus de la topologie (cf. [6]), on déduira aisément les énoncés suivants.

PROPOSITION 1.3. - Soit T un espace topologique compact. Alors :

(i) T^* est un espace localement compact dénombrable à l'infini, donc paracompact et, par conséquent, uniformisable.

(ii) Pour qu'un sous-espace K de T^* soit compact, il faut et il suffit que K soit fermé dans T^* , et qu'il existe un $n \in \underset{\sim}{N}$ tel qu'on ait $K \subseteq \{e\} \cup T \cup \ldots \cup T^n$.

(iii) La multiplication $\mu^* : T^* \times T^* \to T^*$ dans T^* est une application propre.

(iv) Pour tout $x \in T^*$, les applications r_x et ℓ_x de T^* dans T^* , définies respectivement par $wr_x = wx$ et $w\ell_x = xw$ (et appelées respectivement translations à droite et à gauche) sont propres.

(v) Soient M un monoïde compact, et $h : T^* \to M$ un homomorphisme ouvert surjectif : il existe un $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que

$$M = (\{e\} \cup T \cup \ldots \cup T^n)h = \{eh\} \cup Th \cup \ldots \cup (Th)^n .$$

Les démonstrations détaillées des énoncés précédents, et beaucoup d'autres résultats de la théorie des monoïdes topologiques libres, sont donnés dans [5], ainsi que quelques problèmes et des remarques sur les théories des monoïdes commutatifs topologiques libres et des groupes topologiques libres, et sur quelques relations entre eux.

Une autre définition de la notion de monoïde libre a été introduite récemment par F. CHRISTOPH (cf. [8]), et il serait intéressant de la comparer avec la nôtre.

2. Correspondances continues.

Etant donnés deux ensembles X et Y, une correspondance k de X dans Y (désignée par $k : X \to Y$) est un triple $k = (G_k , X , Y)$, où G_k est un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$ (appelé le graphe de k). L'image d'un élément $x \in X$ (resp. d'un sous-ensemble $U \subseteq X$) est définie par

$$xk = (G \cap \{x\} \times Y)pr_2 \quad (\text{resp. } Uk = (G \cap U \times Y)pr_2) ,$$

si $|xk| \leq 1$ pour tout $x \in X$, k est une application partielle de X dans Y.

Si X et Y sont des espaces topologiques, on a besoin d'une notion de continuité de k qui généralise la notion d'application continue. On sait que, dans le cas où k est définie sur tout X (c'est-à-dire où $G_k\, pr_1 = X$), il y a une multitude de définitions de continuité de k (cf. [5] et [3]). Nous nous bornerons à en reproduire deux (mais sans imposer des restrictions sur k). Auparavant, il convient d'introduire quelques notions :

Nous supposons désormais que X, Y et Z sont des espaces topologiques. La correspondance inverse k^{-1} de $k = (G_k , X , Y)$ est définie par

$$k^{-1} = (G_k^{-1} , X , Y) , \text{ où } G_k^{-1} = \{(y , x) \mid (x , y) \in G_k\} .$$

Soient $h : X \to Y$ et $k : Y \to Z$ deux correspondances. Alors, la composition de h et k est la correspondance

$$hk = (G , X , Z) \text{ où } G = \{(x , z) \mid xh \cap zk^{-1} \neq \emptyset\} .$$

Si $k = (G_k , X , Y)$, on pose $p_k = pr_1|G_k$ et $q_k = pr_2|G_k$, et on a manifestement

$$k = p_k^{-1}\, q_k \quad \text{et} \quad k^{-1} = q_k^{-1}\, p_k .$$

En outre, p_k et q_k sont toujours continues.

Enfin, la correspondance $k = (G_k , X , Y)$ est dite fermée en points, si xk est fermé dans Y pour tout $x \in X$.

DÉFINITION 2.1 (cf. [12], III, 21.2). - <u>Une correspondance</u> $k : X \to Y$ <u>est appelée semi-continue supérieurement en</u> $x \in X$, <u>si, pour tout ouvert</u> V <u>contenant</u> xk, <u>il existe un voisinage</u> U <u>de</u> x <u>dans</u> X <u>tel que</u> $Uk \subseteq V$.

k <u>est dite semi-continue supérieurement (dans</u> X), <u>si elle est semi-continue</u>

<u>supérieurement en tout point de</u> X .

Remarquons que, si k est semi-continue supérieurement dans X , l'ensemble de définition $G_k\, pr_1$ de k est évidemment fermé dans X .

On démontrera aussitôt (cf. [5], 2.2, 2.3, et [6], I) la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. - <u>Soit</u> $k : X \to Y$ <u>une correspondance. Alors on a</u> :

(i) k <u>est semi-continue supérieurement, ssi</u> k^{-1} <u>est fermée (en d'autres termes : ssi, pour tout fermé</u> A <u>de</u> Y , Ak^{-1} <u>est fermé dans</u> X).

(ii) <u>Si</u> p_k <u>est fermée,</u> k <u>est semi-continue supérieurement</u>.

(iii) <u>Soient</u> X <u>compact, et</u> Y <u>régulier : si</u> k <u>est semi-continue supérieurement et fermée en points, alors</u> k <u>est fermée</u>.

(iv) <u>Soit</u> Y <u>régulier : si</u> k <u>est semi-continue supérieurement et fermée en points, alors le graphe</u> G_k <u>de</u> k <u>est fermé dans</u> $X \times Y$.

(v) <u>Soit</u> Y <u>compact : le graphe</u> G_k <u>de</u> k <u>est fermé dans</u> $X \times Y$, <u>ssi</u> k <u>est semi-continue supérieurement et fermée en points</u>.

Rappelons qu'une correspondance est dite <u>propre</u>, si q_k est une application propre (cf. [6], I, ex. 10.10). Il est facile de vérifier que, si $k : X \to Y$ est une correspondance propre, alors k est fermée, et que si, de plus, X est séparé, le graphe G_k de k est fermé dans $X \times Y$.

Un autre résultat, qui nous sera utile dans la suite, mais dont la preuve est un peu plus compliquée (cf. [5], Kor. 2.17, Satz 2.19), est le suivant :

PROPOSITION 2.3. - <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces localement compacts, et</u> $k : X \to Y$ <u>une correspondance</u>.

(i) k <u>est propre, ssi</u> k <u>est fermée et, pour toute partie compacte</u> K <u>de</u> Y , Kk^{-1} <u>est compact</u>.

(ii) <u>Si</u> X <u>est compact,</u> Y <u>régulier, et</u> k <u>semi-continue supérieurement et fermée en points, alors</u> k <u>est propre</u>.

Ajoutons la deuxième notion de continuité, introduite de même par H. HAHN.

DÉFINITION 2.4 (cf. [12], III.21). - <u>Une correspondance</u> $k : X \to Y$ <u>est appelée semi-continue inférieurement en</u> $x \in X$, <u>si, pour tout ouvert</u> V <u>dans</u> Y , <u>tel que</u> $V \cap xk \neq \emptyset$, <u>il existe un voisinage ouvert</u> U <u>de</u> x <u>dans</u> X , <u>tel que</u> $Vk^{-1} \supseteq U$.

k <u>est dite semi-continue inférieurement (dans</u> X), <u>si elle est semi-continue inférieurement en tout point de</u> X .

L'analogie entre les deux définitions de continuité est manifeste. Remarquons encore que l'ensemble de définition, $G_k\, pr_1$, de k est ouvert, si k est semi-continue inférieurement. On obtient immédiatement (cf. [5], Satz 2.4) :

PROPOSITION 2.5. - Soit $k : X \twoheadrightarrow Y$ une correspondance. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(i) k est semi-continue inférieurement ;
(ii) k^{-1} est ouverte ;
(iii) p_k est ouverte.

Enfin, il convient de donner la définition suivante :

DÉFINITION 2.6. - Une correspondance $k : X \twoheadrightarrow Y$ est appelée continue, si elle est en même temps semi-continue supérieurement et inférieurement et fermée en points.

On trouvera dans [3] et [5] d'autres notions de continuité pour des correspondances, et plus de résultats et de détails.

3. Topologisations de l'ensemble des parties d'un espace topologique.

Etant donné un espace topologique X , on note $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathfrak{A}(X)$) l'ensemble des parties (resp. des parties fermées) de X , et on pose

$$\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{A}_0(X) = \mathfrak{A}(X) \setminus \emptyset \quad .$$

Le problème sera de munir $\mathcal{P}(X)$ d'une topologie convenable, de telle sorte qu'elle sera compatible avec la topologie de X , et que des propriétés importantes de X se transmettront à $\mathcal{P}(X)$. Il y a plusieurs topologies de la sorte (cf. [5], 2.6), la plus importante étant celle de L. VIETORIS (cf. [21]) qui est connue sous le nom de topologie finie (cf. [16]) ; à vrai dire, dans la littérature, on ne s'occupe que des espaces $\mathcal{P}_0(X)$ et $\mathfrak{A}_0(X)$, mais il nous faut, dans la théorie des automates topologiques, considérer surtout $\mathfrak{A}(X)$, et ainsi généraliser les définitions connues.

DÉFINITION 3.1 (cf. [21], [6], I, ex. 8.12). - La topologie finie supérieurement (resp. inférieurement) de $\mathcal{P}_0(X)$ est la topologie qui a comme base (resp. sous-base) la famille d'ensembles

$$\{V \in \mathcal{P}_0(X) \mid V \subseteq U\} \qquad (\text{resp. } \{V \in \mathcal{P}_0(X) \mid V \cap U \neq \emptyset\}) \quad ,$$

où U parcourt la famille de toutes les parties ouvertes de X .

La topologie finie supérieurement (resp. inférieurement) de $\mathcal{P}(X)$ est la topologie la moins fine de $\mathcal{P}(X)$, telle que l'injection de $\mathcal{P}_0(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$ est fermée (resp. ouverte).

La borne supérieure des topologies finies supérieurement et inférieurement de $\mathcal{P}(X)$ est appelée topologie finie de $\mathcal{P}(X)$. Les topologies induites dans $\mathcal{A}(X)$ par les topologies de $\mathcal{P}(X)$ sont désignées de la même manière.

Rappelons quelques propriétés des topologies définies auparavant qui nous intéressent (cf. [16], [6], I, ex., et [5], 2.6).

PROPOSITION 3.2.

(i) L'injection canonique $i : X \to \mathcal{P}(X)$, définie par $xi = \{x\}$, est un homéomorphisme sur un sous-espace de $\mathcal{P}(X)$, pour les topologies finies supérieurement et inférieurement de $\mathcal{P}(X)$.

(ii) Si X est un espace accessible, $\mathcal{A}(X)$, muni de la topologie finie, est compact ssi X l'est.

(iii) On suppose que X est régulier, et que $\mathcal{K}$ est un ensemble de parties fermées (resp. quasi-compactes) de X, quasi-compact pour la topologie finie de $\mathcal{A}(X)$. Alors la réunion $\bigcup\{M \mid M \in \mathcal{K}\}$ est fermée (resp. compacte) dans X.

Les deux énoncés suivants, qui nous seront utiles dans la théorie des automates topologiques, découlent immédiatement de la définition 3.1 (cf. [5], Satz 2.28).

PROPOSITION 3.3. - Soit X un espace topologique discret. Alors on a :

(i) $\mathcal{A}(X) = \mathcal{P}(X)$, et la topologie finie de $\mathcal{A}(X)$ est égale à la topologie discrète de $\mathcal{A}(X)$ ssi X est fini.

(ii) Soit $\mathcal{K}$ une partie de $\mathcal{A}(X)$ quasi-compacte pour la topologie finie de $\mathcal{A}(X)$: il y a un nombre fini d'éléments $M_1, \ldots, M_n$ de $\mathcal{K}$, tel que

$$\bigcup\{M \mid M \in \mathcal{K}\} = M_1 \cup \ldots \cup M_n \ .$$

Quant à la démonstration de (i), il convient de noter que la famille

$$\{V \mid V \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_n \ , \ V \cap U_i \neq \emptyset \ , \ i = 1 \ , \ldots , n\} \ ,$$

où $\{U_1, \ldots, U_n\}$ parcourt toutes les familles finies d'ouverts de X, est une base de la topologie finie de $\mathcal{P}_0(X)$.

Enfin, il faut bien remarquer que les topologies de $\mathcal{P}(X)$ et les notions de continuité d'une correspondance que nous venons d'introduire sont étroitement liées (cf. [16], [6], I, ex., et [5], 2.6).

PROPOSITION 3.4. - Soient X et Y deux espaces topologiques, $k : X \to Y$ une correspondance, et $f_k : X \to \mathcal{P}(Y)$ l'application définie par $xf_k = xk$. Alors k

est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement), ssi f_k est continue pour la topologie finie supérieurement (resp. inférieurement) de $\mathcal{P}(Y)$.

Il s'ensuivra aussitôt que k est continue, ssi f_k est une application dans $\mathcal{A}(Y)$ et continue pour la topologie finie.

4. Définition et exemples d'automates topologiques.

Les automates topologiques reconnaissants que nous discuterons dans cet article, seront définis comme généralisations des automates reconnaissants classiques, en substituant aux ensembles d'entrées et d'états des espaces topologiques, à cause des raisons topologiques surtout, il sera mieux de s'appuyer sur une définition des automates qui, pour décrire les transitions, se sert des relations (cf. [4], [1]), ou, comme nous préférons le dire, des correspondances, au lieu des applications dans $\mathcal{P}(\ldots)$, comme par exemple RABIN et SCOTT le faisaient. Une difficulté majeure est de trouver une notion de continuité convenable pour les correspondances de transition.

Pour simplifier les énoncés, nous nous restreignons à traiter des automates compacts sans transitions spontanées, les automates compacts étant la généralisation directe des automates finis.

DÉFINITION 4.1. - Un automate topologique reconnaissant compact (dorénavant dans tout ce travail, pour abréger, appelé automate) $A = (S , X , \tau , S_i , S_f)$ est constitué par la donnée de deux espaces topologiques compacts S et X , appelés respectivement espace d'états et espace d'entrées, de deux sous-espaces fermés de S , S_i et S_f , appelés respectivement espace d'états initiaux et espace d'états finals, et d'un sous-espace fermé τ de $S \times X \times S$, dont les éléments sont appelés transitions de A .

A est dit complet, si $\tau\, pr_{1,2} = S \times X$;

A est dit déterministique, si, pour toute paire $(s , x) \in S \times X$,

$$|(\{s\} \times \{x\} \times S \cap \tau)pr_3| \leqslant 1 \quad .$$

Signalons que, d'après la proposition 2.2, dire que τ est fermé revient à dire que la correspondance $t : S \times X \twoheadrightarrow S$, dont le graphe est τ , est semi-continue supérieurement et fermée en points.

Deux sous-classes intéressantes de la classe de tous les automates, pas encore étudiées en détail, sont les classes des automates métriques et des automates profinis, dont les espaces d'états et d'entrées sont respectivement des espaces compacts métriques et des espaces compacts totalement discontinus (des limites projectives des espaces discrets finis) (cf. [5], 3.1).

Exemples (cf. [5], 3.1, pour les détails) :

1° Les automates introduits par Ju. A. ŠREIDER (cf. [20]) afin de formaliser et préciser la théorie de la programmation dynamique ("dynamical programming") de R. BELLMAN ;

2° Les "flows" traités dans la théorie des "topological dynamics" (cf. [10], [11]) et, plus généralement, les groupes topologiques de transformations (cf. par exemple [9]) ;

3° Plus généralement qu'en 2°, chaque demi-groupe topologique de transformations (cf. [2], [7], [22], et [14] pour la théorie des demi-groupes topologiques).

Etudions les transitions d'un automate effectuées par des suites finies d'entrées, c'est-à-dire par des éléments du monoïde topologique libre X^*, engendré par l'espace d'entrées X, dont l'élément unité est noté e.

DÉFINITION 4.2. - Etant donné un automate $A = (S , X , \tau , S_i , S_f)$, nous posons

$$\tau^0 = \{(s , e , s) \mid s \in S\} , \qquad \tau^1 = \tau ,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$,

$$\tau^n = \{(s , ww' , s'') \mid \text{il existe } s' \in S \text{ tel que } (s , w , s') \in \tau^{n-1} \text{ et } (s' , w' , s'') \in \tau^1\} ,$$

enfin

$$\tau^* = \cup\{\tau^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} .$$

La correspondance $t^* : S \times X^* \to S$, dont le graphe est τ^*, est dite correspondance séquentielle de A.

Une première justification de notre choix de la notion de continuité pour t est fournie par le lemme suivant :

LEMME 4.3. - Pour tout automate $A = (S , X , \tau , S_i , S_f)$, tous les τ^n et τ^* sont fermés dans $S \times X^* \times S$.

En effet, τ^0 et τ^1 étant fermés dans $S \times X^* \times S$, en vertu des propriétés de la topologie de X^*, nous démontrerons par récurrence sur n que les τ^n sont fermés dans $S \times X^* \times S$. Pour abréger, posons $X_e = X \cup \{e\}$, alors

$$(X_e)^n = \{e\} \cup X \cup \dots \cup X^n .$$

Comme la diagonale Δ_S de $S \times S$ est fermée, $S \times (X_e)^n \times \Delta_S \times X_e \times S$ est fermé dans $S \times (X_e)^n \times S \times S \times X_e \times S$. Soit

$$f : S \times (X_e)^n \times X_e \times S \to S \times (X_e)^{n+1} \times S$$

l'application induite par la multiplication μ^* dans X^* . Alors f est propre (proposition 1.3 (iii)), et

$$\tau^{n+1} = (\tau^n \times \tau^1 \cap S \times (X_e)^n \times \Delta_S \times X_e \times S)\mathrm{pr}_{1,2,5,6}\, f$$

est fermé dans $S \times X^* \times S$, car $\mathrm{pr}_{1,2,5,6}$ est fermé, grâce à la compacité de $S \times (X_e)^n \times S \times S \times X_e \times S$. Pour assurer que τ^* est fermé, il suffit de remarquer que, en vertu de la définition de la topologie de X^* , la famille $\{\tau^n \mid n \in \underset{\sim}{N}_0\}$ est localement finie (cf. [6], I, 1.5).

En tenant compte de la proposition 2.2, l'énoncé de la dernière proposition équivaut à dire que les correspondances t^n , dont les graphes sont les τ^n , et la correspondance t^* sont semi-continues supérieurement et fermées en points.

En revanche, le problème suivant n'est pas encore résolu : Si, dans la définition 4.1, au lieu de demander que τ soit fermé, on exige que t soit semi-continue inférieurement, sous quelles conditions la correspondance t^* est-elle semi-continue inférieurement ? On a seulement la solution triviale : si t est une application définie sur tout $S \times X$, semi-continue inférieurement comme correspondance, elle est en même temps semi-continue supérieurement et fermée en points et, en vertu du lemme 4.3, t^* est semi-continue supérieurement, alors t^* , étant aussi une application, est semi-continue inférieurement.

5. Le monoïde de transitions d'un automate.

Le monoïde de transitions d'un automate abstrait jouant un rôle important dans la théorie des automates abstraits, nous allons définir, et étudier, la notion analogue pour nos automates topologiques.

DÉFINITION 5.1. - Soit $A = (S , X , \tau , S_i , S_f)$ un automate, et soit, pour tout $w \in X^*$, $m_w : S \to S$ la correspondance dont le graphe est

$$G_w = (S \times \{w\} \times S \cap \tau^*)\mathrm{pr}_{1,3} \ .$$

Alors $M(A) = \{m_w \mid w \in X^*\}$, avec la composition des correspondances comme multiplication, et muni de la topologie la plus fine rendant continue l'application canonique $\varphi_A : X^* \to M(A)$, définie par $w\varphi_A = m_w$, est appelé monoïde de transitions de A .

En effet, $M(A)$ est manifestement un monoïde topologique, et, en plus, φ_A est un homomorphisme tel que $M(A)$ est isomorphe au monoïde quotient de X^* par la relation d'équivalence $w\varphi_A = v\varphi_A$.

Le monoïde de transitions d'un automate fini étant fini également, ce qui est d'une haute importance dans la théorie des automates finis, on se demande si le monoïde de transitions d'un automate compact est également compact ; malheureusement ce n'est pas vrai, un contre-exemple étant fourni par un automate avec une seule entrée, dont l'ensemble d'états S est l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ des nombres réels, et où la correspondance t est définie par $(s\ ,\ x)t = s^2$.

Donc, un problème essentiel consiste à trouver des critères de compacité de $M(A)$.

PROPOSITION 5.2. - <u>Soit</u> A <u>un automate. Alors tout</u> $m_w \in M(A)$ <u>est une correspondance propre, et la topologie de</u> $M(A)$ <u>est séparée.</u>

<u>Si la correspondance séquentielle</u> t^* <u>de</u> A <u>est semi-continue inférieurement, la topologie induite sur</u> $G(A) = \{G_w \mid w \in X^*\}$ <u>par la topologie finie de</u> $\mathfrak{a}(S \times S)$ <u>est moins fine que la topologie induite sur</u> $G(A)$ <u>par la topologie de</u> $M(A)$ <u>; si, en plus,</u> $M(A)$ <u>est compact (ou si</u> $pr_{1,3}|\tau^*$ <u>est ouvert), les deux topologies sont identiques et, en outre,</u> φ_A <u>est ouvert sous condition que</u> $pr_{1,3}|\tau^*$ <u>le soit.</u>

<u>Démonstration</u>. - Comme $S \times \{w\} \times S$ est compact, G_w est aussi compact (cf. lemme 4.3), et ceci entraîne que τ est propre (cf. proposition 2.3).

X^* étant localement compact et dénombrable à l'infini (cf. proposition 1.3), pour montrer que la topologie de $M(A)$ est séparée, il suffit de prouver que le graphe de la relation d'équivalence R_A dans X^* , définie par $w\varphi_A = v\varphi_A$, est fermé dans $X^* \times X^*$ (cf. [6], I, ex. 10.19), à quoi on arrive en démontrant que, pour toute partie compacte K de X^* , $K\varphi_A\, \overset{-1}{\varphi_A}$ est fermé dans X^* (cf. [6], I, ex. 10.16). On vérifie immédiatement que

$$K\varphi_A\, \overset{-1}{\varphi_A} = ((S \times K \times S \cap \tau^*)pr_{1,3}\, \overset{-1}{pr}_{1,3} \cap \tau^*)pr_2 \quad .$$

En tenant compte du fait que la projection $pr_2 :\ S \times X^* \times S \to X^*$ est une application fermée, on en déduit facilement que, pour K compact, $K\varphi_A\, \overset{-1}{\varphi_A}$ est fermé.

Afin d'affirmer la deuxième partie de la proposition, désignons par g la correspondance de X^* dans $S \times S$ qui attache, à tout $w \in X^*$, tous les éléments du graphe $G_w \subseteq S \times S$ de $m_w \in M(A)$, et par $v_{1,2}$ l'homéomorphisme canonique de $S \times X^* \times S$ sur $X^* \times S \times S$, résultant de l'échange des deux premiers facteurs du produit $S \times X^* \times S$. Alors le graphe G de g , étant égal à $(S \times X^* \times S \cap \tau^*)v_{1,2}$, est fermé dans $X^* \times S \times S$, ce qui entraîne que g est semi-continue supérieurement et fermée en points (cf. proposition 2.2 (v)). D'autre part, comme t^* est supposée semi-continue inférieurement, pour toute partie ouverte O de G , $O\,pr_1 = O(v_{1,2}|\tau^*)^{-1}\,pr_2$ est ouvert dans X^* , ce qui signifie que g est semi-continue inférieurement (cf. proposition 2.5). En somme, g est continue ; alors, en vertu de la proposition 3.4, l'application $fg : X^* \to \mathfrak{a}(S \times S)$, induite par g , est continue pour la topologie finie de $\mathfrak{a}(S \times S)$. Or, j désignant l'application canonique de $M(A)$ sur $G(A)$, définie par $m_w\,j = G_w$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X^* \arrow[dl, "\varphi_A"'] \arrow[dr, "fg"] & \\ M(A) \arrow[rr, "j"'] & & G(A) \end{tikzcd}$$

est commutatif, et j est continue pour la topologie de $G(A)$, induite par la topologie finie de $\mathfrak{a}(S \times S)$.

Comme $\mathfrak{a}(S \times S)$, et par conséquent $G(A)$ aussi, est séparé pour la topologie finie (cf. proposition 3.2 (ii)), $G(A)$ et $M(A)$ sont alors homéomorphes si $M(A)$ est compact.

Supposons maintenant $pr_{1,3}\,\tau^*$ ouvert. On en déduit aisément que g^{-1} est semi-continu inférieurement. En vertu de la proposition 2.5, il en résulte que, pour tout ouvert O de $X^* \times X^*$, Og est ouvert dans $S \times S$, c'est-à-dire fg est une application ouverte pour la topologie finie de $\mathfrak{a}(S \times S)$ (cf. proposition 3.4). Ceci implique, grâce à la commutativité du diagramme précédent, que $M(A)$ et $G(A)$, munis de la topologie induite par la topologie finie de $\mathfrak{a}(S \times S)$, sont homéomorphes, et que φ_A est ouvert.

Comme auparavant, nous utiliserons toujours l'abréviation X_e au lieu de $X \cup \{e\}$.

PROPOSITION 5.3. - Soient A un automate, et R_A la relation d'équivalence dans X^* définie par $w\varphi_A = v\varphi_A$. Alors :

(i) Si l'ensemble $X^*/R_A = \{w\varphi_A\,\varphi_A^{-1} \mid w \in X^*\}$ des classes d'équivalence suivant R_A est une partie compacte de $\mathfrak{a}(X^*)$ pour la topologie finie, la topologie quotient sur $X^*/R_A \simeq M(A)$ est identique à la topologie induite dans X^*/R_A par la topologie finie de $\mathfrak{a}(X^*)$, l'homomorphisme φ_A est ouvert, et il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $M(A) = (X_e)^n\,\varphi_A$.

(ii) Soient $M(A)$ compact, t^* semi-continue inférieurement, et $pr_{1,3}|\tau^*$ ouvert. Alors X^*/R_A est une partie compacte de $\mathfrak{a}(X^*)$ pour la topologie finie, la topologie induite dans X^*/R_A par la topologie finie de $\mathcal{A}(X^*)$ est identique à la topologie quotient sur X^*/R_A, l'homomorphisme φ_A est ouvert, et il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $M(A) = (X_e)^n \varphi_A$.

Démonstration.

(i) La topologie induite sur X^*/R_A par la topologie finie de $\mathcal{A}(X^*)$ est évidemment plus fine que la topologie quotient sur X^*/R_A (cf. [6], I, ex. 3.16) ; en vertu de la proposition précédente, la dernière topologie est séparée. Donc, puisque X^*/R_A est compact pour la topologie finie, les deux topologies sont identiques, $M(A)$ est également compact, φ_A est ouvert ([6], I, ex. 5.7), et l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$, tel que $M(A) = (X_e)^n \varphi_A$, est alors assurée par la proposition 1.3 (v).

(ii) Supposons t^* semi-continue inférieurement, et $pr_{1,3}|\tau_3$ ouvert. Il est immédiat que φ_A est donc ouvert. Alors la compacité de $M(A)$ entraîne, d'après la proposition 1.3 (v), l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que $M(A) = (X_e)^n \varphi_A$. Avant de démontrer les autres énoncés, raisonnons comme suit.

Soit $f : \mathcal{A}(X^*) \to \mathcal{A}((X_e)^n)$ l'application canonique définie par $Uf = U \cap (X_e)^n$. Comme $\mathcal{A}(U)f = \mathcal{A}(Uf)$ et $\mathcal{A}(U')f^{-1} = \mathcal{A}(U' \cup X^{n+1} \cup X^{n+2} \cup \ldots)$, f est continue pour les topologies finies, et ouverte (resp. fermée) pour les topologies finies supérieurement (resp. inférieurement), de $\mathcal{A}(X^*)$ et $\mathcal{A}((X_e)^n)$. Désignons respectivement par g et g_n les applications de $M(A)$ dans $\mathcal{A}(X^*)$ et $\mathcal{A}((X_e)^n)$ respectivement, définies par φ_A^{-1} et $(\varphi_A|(X_e)^n)^{-1}$ respectivement. Alors il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & M(A) \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g_n"] & \\ \mathcal{A}(X^*) \arrow[rr, "f"'] & & \mathcal{A}((X_e)^n) \end{tikzcd}$$

est commutatif, d'où on conclut que la restriction f' de f sur $M(A)g = X^*/R_A$ est un homéomorphisme de X^*/R_A sur $(X_e)^n/R'_A$, où R'_A désigne la restriction de R_A à $(X_e)^n$, pour les topologies induites par les topologies finies de $\mathcal{A}(X^*)$ et $\mathcal{A}((X_e)^n)$ respectivement.

Comme $(X_e)^n$ est ouvert dans X^*, la restriction φ'_A de φ_A à $(X_e)^n$ est aussi ouverte. En outre, $(X_e)^n/R'_A$ muni de la topologie quotient, étant homéomorphe à $M(A)$, est, en vertu de la proposition 5.2, séparé. Comme de plus $(X_e)^n$ est compact, tout ceci entraîne que l'ensemble $(X_e)^n/R'_A$ des classes d'équivalence, suivant R'_A, est fermé dans $\mathcal{A}((X_e)^n)$ pour la topologie finie (cf. [6], I, ex.

10.20). Par conséquent, puisque $\mathfrak{A}((X_e)^n)$ est compact, en vertu de la proposition 3.2, $(X_e)^n/R'_A$ aussi est compact pour la topologie finie, d'où la compacité de $X^*/R_A \simeq X^*/R'_A$ pour la topologie de $\mathfrak{A}(X^*)$. En appliquant (i), on en déduit que la topologie quotient et la topologie finie sur X^*/R_A sont identiques, ce qui achève la démonstration.

Sous condition que, pour l'automate A, $pr_2|\tau^*$ et $pr_{1,3}|\tau^*$ sont ouverts, nous obtiendrons donc trois critères nécessaires et suffisants pour la compacité de $M(A)$.

COROLLAIRE 5.4. - <u>Soit</u> A <u>un automate, tel que</u> $pr_2|\tau^*$ <u>et</u> $pr_{1,3}|\tau^*$ <u>sont des applications ouvertes. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $M(A)$ <u>est compact</u> ;

(ii) $M(A)$ <u>est borné, c'est-à-dire il existe un</u> $n \in \underline{N}$, <u>tel que</u> $M(A) = (X_e)^n \varphi_A$;

(iii) <u>L'ensemble</u> X^*/R_A <u>des classes d'équivalence</u> $w\varphi_A \varphi_A^{-1} \subseteq X^*$, <u>suivant</u> R_A, <u>est une partie compacte de</u> $\mathfrak{A}(X^*)$ <u>pour la topologie finie</u> ;

(iv) <u>L'ensemble</u> $G(A)$ <u>des graphes de tous les éléments de</u> $M(A)$ <u>est une partie compacte de</u> $\mathfrak{A}(S \times S)$ <u>pour la topologie finie</u>.

Remarquons encore que, sous les conditions équivalentes (i)-(iv) du corollaire, l'homomorphisme $\varphi_A : X^* \to M(A)$ est ouvert. En revanche, si φ_A est ouvert et $M(A)$ est compact, $M(A)$ est borné, en vertu de la proposition 1.3.

D'autre part, il n'est peut-être pas inutile de rappeler que, pour les automates abstraits, la compacité (c'est-à-dire la finitude) de l'espace d'états implique toujours que le monoïde de transitions est borné ; en ce qui concerne les énoncés (iii) et (iv) du corollaire 5.4, il convient de les comparer à la proposition 3.3.

On se demande naturellement si on ne peut pas affaiblir les hypothèses du corollaire ; c'est un problème pas encore résolu.

Un autre problème sera celui de généraliser la théorie des espaces fonctionnels en l'étendant à une théorie des espaces des correspondances continues, et d'essayer d'utiliser des généralisations du théorème de Arzela et Ascoli pour établir d'autres critères de compacité de $M(A)$ (cf. [5], 2.7 et 3.6, pour quelques remarques, et [15] pour quelques nouveaux résultats en théorie des espaces fonctionnels).

Enfin, il faut bien noter une autre différence importante entre les automates abstraits et les automates topologiques : on sait qu'il existe des espaces topologiques compacts S contenant au moins deux points différents, tels que toute application continue de S dans S, différente de l'identité, soit constante (cf. [13], Satz 20.1.2).

Signalons, en outre, qu'il serait intéressant d'étudier les monoïdes de transitions des automates topologiques du point de vue de la théorie de Krohn-Rhodes (cf. [1], [2], [18]) et de la théorie des demi-groupes (cf. [17]), la théorie des demi-groupes compacts étant assez bien développée (cf. [14], [2], [22], [18]).

6. Ensembles reconnus par un automate.

Le comportement d'un automate fini est habituellement décrit par l'ensemble des mots reconnus par l'automate ; nous procédons pareillement.

DÉFINITION 6.1. - *Soit* $A = (S\ ,\ X\ ,\ \tau\ ,\ S_i\ ,\ S_f)$ *un automate. Pour tout* $s \in S$, *on appelle* $W_A(s) = (\tau^* \cap \{s\} \times X^* \times S_f)pr_2$ *l'ensemble reconnu par* A *à l'état* s.

$\{W_A(s) \mid s \in S_i\}$ *est appelée la famille d'ensembles reconnue par* A.

En outre, $W(A) = (\tau^* \cap S_i \times X^* \times S_e)pr_2 = \bigcup\{W_A(s) \mid s \in S_i\}$ *est appelé l'ensemble reconnu par* A.

En tenant compte du fait que, pour tout espace topologique compact K, la projection $pr_2 : K \times T \to T$ est fermée pour tout espace topologique T quelconque, il est évident que, pour tout automate A, et tout état s de A, $W_A(s)$ et $W(A)$ sont fermés dans X^*.

En outre, si la correspondance séquentielle t^* de A est semi-continue inférieurement, ce qui est vrai si A est déterministique et complet, et si de plus S_i et S_f sont ouverts dans S, $W(A)$ est manifestement ouvert dans X^* (cf. proposition 2.5) ; on en déduit facilement que les sous-ensembles de X^*, qui sont reconnaissables par des automates, dont les espaces d'états initiaux et d'états finals sont ouverts, et dont la correspondance séquentielle est semi-continue inférieurement, forment une algèbre de Boole.

On sait que, dans la théorie classique des ensembles reconnus par des automates finis, il suffit normalement de considérer la sous-classe d'automates déterministiques et complets, ne possédant qu'un seul état initial. Ici intervient la condition que le monoïde de transitions soit borné.

PROPOSITION 6.2. - *Soit* A *un automate dont le monoïde de transitions est borné. Alors*

$$A_M = (M(A)\ ,\ X\ ,\ \tau_M\ ,\ \{m_e\}\ ,\ \{m_w \mid w \in W(A)\})\ ,$$

où $\tau_M = \{(m_w\ ,\ x\ ,\ m_{wx}) \mid x \in X\ ,\ m_w \in M(A)\}$, *est un automate déterministique et complet, reconnaissant le même ensemble que* A.

En effet, comme X est compact et $M(A)$ est séparé, il est clair que $M(A)$ est compact. Afin de montrer que τ_M est fermé dans $M(A) \times X \times M(A)$, désignons par $\mu : M(A) \times M(A) \to M(A)$ la multiplication dans $M(A)$, et posons

$$M' = (M(A) \times \{m_x \mid x \in X\})\mu .$$

Alors l'application $f = (id_{M(A)} \times (\varphi_A | X))\mu$ de $M(A) \times X$ sur M' étant continue, et, par conséquent, M' étant compact, τ_M, qui est manifestement le graphe de f, est fermé dans $M(A) \times X \times M'$, ce dernier ensemble étant compact, et donc fermé dans $M(A) \times X \times M(A)$. Comme $M(A)$ est borné, il existe un $n \in \underline{N}$ tel que $M(A) = (X_e)^n \varphi_A$. On en conclut immédiatement que $W(A)\varphi_A = (W(A) \cap (X_e)^n)\varphi_A$, ce qui entraîne que $\{m_w \mid w \in W(A)\} = W(A)\varphi_A$ est fermé dans $M(A)$.

La vérification complète de la proposition est maintenant très facile, et on l'omettra pour cette raison.

Considérons alors le problème classique de la réduction.

DÉFINITION 6.3. - Un automate A est dit réduit, si, pour toute paire s, s' d'états de A, on a $W_A(s) \neq W_A(s')$.

Pour démontrer l'existence des automates réduits dans la famille de tous les automates reconnaissant la même famille d'ensembles, nous avons besoin d'une condition plus forte que la compacité de A, mais pas si forte que la condition que $M(A)$ soit borné.

DÉFINITION 6.4. - L'automate $A = (S, X, \tau, S_i, S_f)$ est dit borné, s'il existe un $n \in \underline{N}$ tel que, pour toute paire s, s' d'états, on a $W_A(s) = W_A(s')$ ssi $W_A(s) \cap (X_e)^n = W_A(s') \cap (X_e)^n$.

Il faut bien remarquer qu'un automate fini est toujours borné, et qu'un automate, dont le monoïde de transitions est borné, est également borné. Donc les propositions 5.2 et 5.3 et le corollaire 5.4 nous fournissent des critères suffisants pour qu'un automate soit borné, et la proposition 1.3 implique qu'un automate A est borné si $M(A)$ est compact et φ_A ouvert.

PROPOSITION 6.5. - Etant donné un automate borné A, il existe toujours un automate réduit (et borné) $\bar{A}$, reconnaissant la même famille d'ensembles que A.

En effet, soit R la relation d'équivalence dans S, définie par sRs' ssi $W_A(s) = W_A(s')$, et soit $\bar{S} = S/R$ l'espace quotient de S suivant R, nous désignons par h l'application canonique de S sur S/R, nous posons $\bar{S}_i = S_i h$, $\bar{S}_f = S_f h$, et $\bar{\tau} = \tau(h \times id_X \times h)$, et nous prétendons que $\bar{A} = (\bar{S}, X, \bar{\tau}, \bar{S}_i, \bar{S}_f)$ est l'automate cherché.

Pour démontrer que A est un automate, il suffit de prouver que R est une relation d'équivalence fermée (cf. [6], I, 10.4, prop. 8), ce qui revient à montrer que, pour tout fermé F de S, Fhh^{-1} est fermé dans S. Or, comme A est borné, il existe un $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que

$$Fhh^{-1} = (F \times (X_e)^n \times S_f \times \tau^*) \, pr_2(pr_2|S \times (X_e)^n \times S_f)^{-1} \, pr_1 \quad ,$$

d'où on déduit aisément que Fhh^{-1} est fermé.

Il reste à montrer que, pour tout $s \in S_i$, $W_A(s) = W_{\bar{A}}(sh)$, ce qu'on vérifiera sans difficulté en reprenant le raisonnement connu de la théorie des automates finis.

On obtient comme corollaire que, pour tout automate borné A, il existe un automate réduit (et borné) A reconnaissant le même ensemble, et que, pour tout automate A dont le monoïde de transitions est borné, il existe un automate réduit dont l'espace d'états initiaux est réduit à un point (et dont le monoïde de transitions est borné) reconnaissant le même ensemble (cf. proposition 6.2).

DÉFINITION 6.6. - Un automate $A = (S , X , \tau , S_i , S_f)$ est dit connexe, si $S = S_i \, t^* \cap S_f \, t^{*-1}$.

PROPOSITION 6.7. - Soient

$$A = (S , X , \tau , S_i , S_f) \qquad \underline{\text{et}} \qquad A' = (S' , X , \tau' , S'_i , S'_f)$$

deux automates bornés, réduits, connexes, déterministiques et complets, dont les sous-espaces d'états finals sont ouverts, reconnaissant la même famille d'ensembles. Alors il existe un homéomorphisme $h : S \to S'$ tel que $S'_i = S_i h$, $S'_f = S_f h$, et $\tau' = \tau(h \times id_X \times h)$, c'est-à-dire A et A' sont isomorphes.

Démonstration. - Comme A et A' sont déterministiques et connexes, l'hypothèse entraîne que $\{W_A(s) \mid s \in S\} = \{W_{A'}(s') \mid s' \in S'\}$; ce sous-ensemble de $\mathfrak{a}(X^*)$ est dorénavant noté $\bar{S}$, et muni de la topologie induite par la topologie finie de $\mathfrak{a}(X^*)$. Alors, comme A et A' sont réduits, les applications $j : S \to \bar{S}$ et $j' : S' \to \bar{S}$, définies respectivement par $sj = W_A(s)$ et $s'j' = W_{A'}(s')$, sont bijectives, et tout revient à montrer qu'elles sont continues, car ceci impliquera que $\bar{A} = (\bar{S} , X , \bar{\tau} , \bar{S}_i , \bar{S}_f)$, où $\bar{\tau} = \tau(j \times id_X \times j) = \tau'(j' \times id_X \times j')$, $\bar{S}_i = S_i \, j = S'_i \, j'$, et $\bar{S}_f = S_f \, j = S'_f \, j'$, est un automate isomorphe à A et A' également.

Or, A étant borné, il existe un $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que, si on pose, pour abréger,

$$W_n(s) = W_A(s) \cap (X_e)^n \qquad \text{et} \qquad W_n = \{W_n(s) \mid s \in S\} \quad ,$$

l'application canonique $f' : \overline{S} \to W_n$, définie par $W_A(s)f' = W_n(s)$, est bijective. En outre, munissons W_n de la topologie induite par la topologie finie de $\mathfrak{a}(X_e)^n$; alors, f' , étant la restriction à $\overline{S} \subseteq \mathfrak{a}(X^*)$ de l'application canonique $f : \mathfrak{a}(X^*) \to \mathfrak{a}((X_e)^n)$, est un homéomorphisme (cf. la preuve de la proposition 5.3). On est donc ramené à montrer que l'application $j_n : S \to W_n$, définie par $sj_n = W_n(s)$, est continue (il faut tenir compte de la compacité de $\mathfrak{a}((X_e)^n)$). Alors $k : S \to (X_e)^n$ étant la correspondance dont le graphe est

$$G = (\tau^* \cap S \times (X_e)^n \times S_f)pr_{1,2} \quad ,$$

l'application $f_k : S \to \mathfrak{a}((X_e)^n)$, induite par k (cf. proposition 3.4), est manifestement identique à j_n . Comme G est compact, k est semi-continue supérieurement (cf. proposition 2.2). D'autre part, comme A est déterministique et complet, t^* est semi-continue inférieurement, donc $pr_1|\tau^*$ est ouvert (cf. proposition 2.5), ce qui entraîne que, pour toute partie ouverte O de G ,

$$Op_k = (O \times S_f \cap \tau^*)pr_1$$

est ouvert dans S . Alors k est semi-continue inférieurement (cf. proposition 2.5) et supérieurement, c'est-à-dire $j_n = f_k$ est continue (cf. proposition 3.3).

La continuité de j' est prouvée par un raisonnement analogue.

7. Caractérisations des ensembles reconnaissables.

Soient X un espace topologique compact, et X^* le monoïde topologique libre engendré par X . Alors les sous-ensembles reconnaissables de X^* sont les sous-ensembles susceptibles d'être reconnus par un automate dont l'espace d'entrées est X . Nous allons montrer comment on peut généraliser les théorèmes de caractérisation des sous-ensembles reconnaissables d'un monoïde libre finiment engendré, donnés par MYHILL, NERODE, BRZOZOWSKI et KLEENE.

Comme dans la théorie du monoïde de transitions d'un automate, l'espace $\mathfrak{a}(X^*)$, que nous supposerons désormais muni de la topologie finie, joue un rôle prépondérant.

Concernant la généralisation des théorèmes de Myhill et Nerode, nous avons besoin d'une généralisation de la notion de relation d'équivalence d'indice fini.

DÉFINITION 7.1. – Une relation d'équivalence R sur X^* est dite d'indice compact, si elle est séparée, et si l'ensemble X^*/R des classes d'équivalence suivant R est un sous-ensemble compact de $\mathfrak{a}(X^*)$.

Remarquons que, en vertu de la proposition 3.3, si X est un espace discret (donc fini), une relation d'équivalence d'indice compact sur X^* est d'indice fini.

De même que l'énoncé (i) de la proposition 5.3, on démontrera le lemme suivant :

LEMME 7.2. - _Soient_ R _une relation d'équivalence d'indice compact sur_ X^* , _et_ f_R _l'application canonique de_ X^* _sur l'espace quotient_ X^*/R (_muni de la topologie quotient). Alors, il existe un_ $n \in \underset{\sim}{N}$ _tel que_ $X^*/R = (X_e)^n f_R$; _en outre,_ f_R _est ouverte et fermée, et la topologie quotient sur_ X^*/R _est identique à la topologie induite par la topologie finie de_ $\mathfrak{A}(X^*)$.

Le théorème de Myhill se généralise donc comme suit.

PROPOSITION 7.3. - _Soit_ $U \subseteq X^*$. _Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :_

(i) _Il existe un automate_ A _reconnaissant_ U , _dont le monoïde de transitions est borné, et l'homomorphisme associé_ $\varphi_A : X^* \twoheadrightarrow M(A)$ _est ouvert ;_

(ii) _Il existe une relation de congruence_ R _d'indice compact sur_ X^* , _et une partie fermée_ $\mathcal{K}$ _de l'espace quotient_ X^*/R , _tels que_ $U = \bigcup\{K \mid K \in \mathcal{K}\}$.

En outre, soit R_U _la relation de congruence la plus grossière pour laquelle_ U _est une partie saturée. Alors, si_ U _est fermé, et si_ R_U _est d'indice compact, la condition_ (ii) _est vérifiée. D'autre part, si la condition_ (ii) _est vérifiée, et si_ R_U _est séparée et ouverte, alors_ R_U _est d'indice compact._

En effet, supposons (i) vrai. Alors un raisonnement, utilisé dans la démonstration de la proposition 5.3 (ii), montrera que la relation de congruence $R = R_A$ sur X^* , déterminée par φ_A , est d'indice compact, et de la preuve de la proposition 6.2, on conclura que $\mathcal{K} = W(A)\varphi_A$ est fermé dans X^*/R , et qu'on a $U = \bigcup\{K \mid K \in \mathcal{K}\}$.

D'autre part, si (ii) est vérifié, en vertu du lemme 7.2, X^*/R est un monoïde borné, et l'homomorphisme canonique $f_R : X^* \twoheadrightarrow X^*/R$ est ouvert, et, en reprenant le raisonnement de la preuve de la proposition 6.2, on montrera facilement que $A_R = (X^*/R\ ,\ \tau_R\ ,\ ef_R\ ,\ \mathcal{K} = Uf_K)$, où τ_R est le graphe de l'application de $(X^*/R) \times X$ dans X^*/R , induite par la multiplication dans X^* , est un automate tel que $W(A_R) = U$, ce qui entraîne (i), car $M(A_R) \simeq X^*/R$ et $\varphi_{A_R} = f_R$.

Si U est fermé, et R_U est d'indice compact, alors le lemme 7.2 montre que (ii) est vérifié.

Enfin, si (ii) est vérifié, et si R_U est ouvert et séparé, le monoïde X^*/R_U est borné et, comme dans la démonstration de la proposition 5.3 (ii), on obtiendra que R_U est d'indice compact, ce qui entraîne évidemment (ii).

Remarquons que, en vertu de la proposition 3.3, si X est un espace discret fini, la proposition 7.3 est exactement le théorème de Myhill.

Le théorème de Nerode se généralise de façon analogue ; il n'est pas nécessaire de l'énoncer explicitement (cf. [5], Satz 4.22).

Généralisons le théorème de Brzozowski qui s'énonce comme suit : Un sous-ensemble U d'un monoïde (discret) libre, finiment engendré, est reconnaissable par un automate fini, ssi U ne possède qu'un nombre fini de dérivées différentes.

DÉFINITION 7.4. - Soient $U \subseteq X^*$ et $w \in X^*$. Alors on appelle

$$d_w(U) = \{v \in X^* \mid wv \in U\}$$

la dérivée de U par w.

En utilisant la proposition 1.3, on montrera facilement que toute dérivée d'un fermé de X^* est de même fermée dans X^*.

En outre, il est clair que, pour tout automate A, dont l'espace d'entrées est X, et pour tout $w \in X^*$, il existe un automate A_w tel que $W(A_w) = d_w(W(A))$.

PROPOSITION 7.5.

(i) Soit A un automate, dont les espaces d'états initiaux et d'états finals sont ouverts, dont le monoïde de transitions est borné, et tel que la correspondance séquentielle t^* est semi-continue inférieurement. Alors l'ensemble

$$\mathfrak{D}_A = \{d_w(W(A)) \mid w \in X^*\}$$

est compact dans $\mathfrak{a}(X^*)$.

(ii) Soit U une partie fermée de X^*, telle que

$$\mathfrak{D}(U) = \{d_w(U) \mid w \in X^*\}$$

est borné, c'est-à-dire telle qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute paire $v, w \in X^*$, on a $d_v(U) = d_w(U)$ ssi $d_v(U) \cap (X_e)^n = d_w(U) \cap (X_e)^n$. Alors, si $\mathfrak{D}(U)$ est compact dans $\mathfrak{a}(X^*)$, il existe un automate borné (et réduit) tel que $W(A) = U$.

Démonstration.

(i) Montrons d'abord que l'ensemble $\mathfrak{F}_A = \{S_i m_w \mid m_w \in M(A)\}$ est compact dans $\mathfrak{a}(X^*)$. Soit $g : X^* \to S$ la correspondance dont le graphe est

$$G = (S_i \times X^* \times S \cap \tau^*)pr_{2,3} .$$

D'après la proposition 2.2, g est semi-continue supérieurement, et comme τ^* est semi-continue inférieurement, la proposition 2.5 entraîne manifestement que g est aussi semi-continue inférieurement. Donc, en vertu de la proposition 3.4, l'application $fg : X^* \to \mathfrak{A}(S)$, induite par g, est continue pour la topologie finie de $\mathfrak{A}(S)$. Or, comme $M(A)$ est borné, il existe un $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que $\mathfrak{F}_A = (X_e)^n fg$, cela implique que $\mathfrak{F}_A$ est compact (cf. proposition 3.2).

En outre, soit $h_n : \mathfrak{A}(S) \to \mathfrak{A}((X_e)^n)$ l'application définie par

$$S'h_n = (S^* \times (X_e)^n \times S_f \cap \tau^*)pr_2 \quad .$$

Montrons qu'elle est continue pour les topologies finies de $\mathfrak{A}(S)$ et $\mathfrak{A}((X_e)^n)$. De même que précédemment, on s'assurera que l'application $f_k : S \to \mathfrak{A}((X_e)^n)$, induite par la correspondance $h : S \to (X_e)^n$, dont le graphe est

$$(S \times (X_e)^n \times S_f \cap \tau^*)pr_{1,2} \quad ,$$

est continue pour la topologie finie de $\mathfrak{A}(S)$. Par conséquent, l'application $h' : \mathfrak{A}(S) \to \mathcal{P}(\mathfrak{A}((X_e)^n))$, définie par

$$S'h' = \{s'f_h \mid s' \in S'\} \quad ,$$

est continue pour les topologies finies (cf. [6], I, ex. 2.7). Enfin, selon [16] (theorem 5.7.2), l'application $r : \mathcal{P}(\mathfrak{A}((X_e)^n)) \to \mathcal{P}((X_e)^n)$, définie par

$$\mathcal{B}r = \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}\} \quad ,$$

est continue pour les topologies finies. Alors $h_n = hr$ est continue.

Enfin, soit f l'application canonique de $\mathfrak{A}(X^*)$ sur $\mathfrak{A}((X_e)^n)$, définie par $Vf = V \cap (X_e)^n$, qui est continue pour les topologies finies, et ouverte (resp. fermée) pour les topologies finies supérieurement (resp. inférieurement), comme il est prouvé dans la démonstration de la proposition 5.3. Alors comme, d'après ce qui précède, $\mathcal{D}_A^n = \mathfrak{F}_A h_n$ est compact dans $\mathfrak{A}((X_e)^n)$ pour la topologie finie, tout revient à montrer que la restriction de f à $\mathcal{D}_A$ est une application bijective de $\mathcal{D}_A$ sur $\mathcal{D}_A^n$. D'après la proposition 6.2, on peut supposer que l'espace d'états initiaux est réduit à un seul point s_i, et que tout élément m_w de $M(A)$ est une application.

Or, soit $d_w(W(A)) \cap (X_e)^n = d_v(W(A)) \cap (X_e)^n$. Alors

$$\begin{aligned} d_w(W(A)) \cap (X_e)^n &= (\{s_i\, m_w\} \times (X_e)^n \times S_f \cap \tau^*)pr_2 \\ &= (\{s_i\, m_v\} \times (X_e)^n \times S_f \cap \tau^*)pr_2 = d_w(W(A)) \cap (X_e)^n \quad . \end{aligned}$$

Comme A est borné parce que $M(A)$ est borné, ceci entraîne que

$$d_w(W(A)) = (\{s_i\ m_w\} \times X^* \times S_f \cap \tau^*) = (\{s_i\ m_v\} \times X^* \times S_f \cap \tau^*) = d_v(W(A)) \quad ,$$

ce qui achève la démonstration de (i).

(ii) L'automate peut être construit comme dans le cas où X est fini, c'est-à-dire posons

$$A = (\mathcal{D}(U)\ ,\ X\ ,\ \tau\ ,\ d_e(W)\ ,\ \{d_w(U) \mid e \in d_w(U)\}) \quad ,$$

où $(d_w(U)\ ,\ x\ ,\ d_v(U)) \in \tau$ ssi $d_x(d_w(U)) = d_v(U)$. Manifestement, $S_i = d_e(U)$ est fermé dans l'espace compact $S = \mathcal{D}(U)$. Montrons que $S_f = \{d_w(U) \mid e \in d_w(U)\}$ est fermé dans S . Soit $g : \mathcal{C}((X_e)^n) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}((X_e)^n))$ l'application définie par $Vg = \{W \in \mathcal{C}((X_e)^n) \mid V \cap W \neq \emptyset\}$ qui, en vertu de la compacité de $\mathcal{C}((X_e)^n)$, est continue pour les topologies finies, d'après [16] (theorem 5.7.4). Grâce à l'hypothèse que $\mathcal{D}(U)$ est borné, on a donc $S_f = (eg \cap \mathcal{D}(U)f)f^{-1}$, ce qui entraîne l'assertion.

Montrons enfin que τ est fermé dans $\mathcal{D}(U) \times X \times \mathcal{D}(U)$. Soit

$$\tilde{\mu} : \mathcal{C}(X^* \times X^*) \to \mathcal{C}(X^*) \quad ,$$

définie par $V\tilde{\mu} = V\mu^*$, où μ^* est la multiplication dans X^* , qui est une application fermée (cf. proposition 1.3). Selon [16] (theorem 5.10.1), $\tilde{\mu}$ est continue pour les topologies finies. Puisqu'il existe une immersion canonique de $\mathcal{C}(X^*) \times X$ dans $\mathcal{C}(X^* \times X^*)$, on peut regarder $\mathcal{D}(U) \times X$ comme sous-espace de $\mathcal{C}(X^* \times X^*)$. Alors $h = \tilde{\mu}|(\mathcal{D}(U) \times X)$ est une application continue de $\mathcal{D}(U) \times X$ dans $\mathcal{D}(U)$, et par conséquent τ , étant identique au graphe de h , est fermé.

On vérifie facilement que A est borné et réduit, et que $U = W(A)$.

Remarquons que, en vertu de la proposition 3.3, si X est discret et fini, la proposition précédente équivaut au théorème de Brzozowski.

Le problème de généraliser le théorème de Kleene n'est pas encore résolu : Il est facile de généraliser la notion de sous-ensemble régulier d'un monoïde (discret) libre finiment engendré : la famille $\mathcal{R}(X)$ des sous-ensembles t-réguliers de X^* est, par définition, la plus petite famille de sous-ensembles de X^* telle que :

(i) Toute partie compacte de X appartient à $\mathcal{R}(X)$;

(ii) Si U et V appartiennent à $\mathcal{R}(X)$, il en va de même pour leur produit $U.V$;

(iii) Si $U \in \mathcal{R}(X)$, alors $U^* = \{e\} \cup U \cup U^2 \cup \ldots \in \mathcal{R}(X)$;

(iv) Si $\mathcal{K}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{R}(X)$ compact dans $\mathcal{C}(X^*)$, alors $\bigcup\{K \mid K \in \mathcal{K}\} \in \mathcal{R}(X)$.

En vertu de la proposition 3.3, si X est un espace discret fini, cette définition est réduite à la définition classique des sous-ensembles réguliers de X^*.

Il est facile de montrer que tout sous-ensemble t-régulier de X^* est fermé (en utilisant les propositions 1.3 et 3.2 (iii)).

De même, par des constructions analogues à celles du cas d'un espace X, discret et fini, on démontrera que les sous-ensembles de X^*, qui sont t-réguliers, en vertu de (i)-(iii) seulement, sont reconnaissables par des automates. Mais les constructions qui servent à prouver que la réunion de deux ensembles reconnaissables est aussi reconnaissable ne s'appliquent pas au cas (iv).

Enfin, il paraît beaucoup plus difficile de trouver une démonstration de la partie converse du théorème de Kleene, parce que, dans toutes les preuves de cet énoncé connues en théorie des automates finis, on s'appuie essentiellement sur la finitude de l'espace d'états (on numérote les états !) ; il faudrait donc trouver une nouvelle démonstration, pour le cas fini, qui pourrait être traduite en langage topologique pour démontrer que tout sous-ensemble reconnaissable de X^* est t-régulier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GINZBURG (A.). - Algebraic theory of automata. - New York, London, Academic Press, 1968.

[2] ARBIB (M. A.) [Editor]. - Algebraic theory of machines, languages, and semigroups. - New York, London, Academic Press, 1968.

[3] BERGE (C.). - Espaces topologiques. 2e édition. - Paris, Dunod, 1966 (Collection universitaire de Mathématiques, 3).

[4] BÖHLING (K. H.), INDERMARK (K.). - Endliche Automaten, I, BI-Hochschulskripten, Band 703, Mannheim, Zürich, 1969.

[5] BRAUER (W.). - Zu den Grundlagen einer Theorie topologischer sequentieller Systeme und Automaten, Ber. Ges. Math. und Datenverarb., Bonn, n° 31, 1970.

[6] BOURBAKI (N.). - Topologie générale. - Paris, Hermann. - Chap. 1-2, 4e édition, 1965 ; Chap. 9, 2e édition, 1958 ; Chap. 10, 2e édition, 1961 (Act. scient. et ind., 1045, 1084, 1142 ; Bourbaki, 2, 8, 10).

[7] BEDNAREK (A. R.), WALLACE (A. D.). - Finite approximants of totally disconnected machines, Math. Systems Theory, t. 1, 1967, p. 209-216.

[8] CHRISTOH (F. T.). - Decompositions of topological semigroups and topological groups, and various covering properties, Dissertation Abstracts International, Series B, Vol. 30, n° 7, Order n° 70-585, p. 3271-B (Dissertation Rutgers University, 1969).

[9] DE KORVIN (A.). - Approximation theorems on some classes of automata, SIAM J. of Control, t. 6, 1968, p. 422-436.

[10] GOTTSCHALK (W. H.), HEDLUND (G. A.). - Topological dynamics. - Providence, American mathematical Society, 1955 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 36).

[11] GOTTSCHALK (W. H.). - Minimal sets : An introduction to topological dynamics, Bull. Amer. math. Soc., t. 64, 1958, p. 336-351.

[12] HAHN (H.). - Reelle Funktionen, I. - Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1932 (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern, 13).

[13] HERRLICH (H.). - Topologische Reflexionen und Coreflexionen. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1968 (Lecture Notes in Mathematics, 78).

[14] HOFMANN (K. H.), MOSTERT (P. S.). - Elements of compact semigroups. - Columbus (Ohio), Merrill Books, 1966.

[15] HANSARD (J. D.). - Function spaces : A study of the graph topology, the connected-open topology, the σ-topology, and the topology of uniform convergence, Dissertation Abstracts International, Series B, Vol. 30, n° 7, Order n° 70-415, p. 3276-B (Dissertation University of Kansas, Lawrence, 1969).

[16] MICHAEL (E.). - Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. math. Soc., t. 71, 1951, p. 152-182.

[17] PERROT (J.-F.). - Sur la théorie algébrique des automates finis monogènes (à paraître).

[18] RHODES (J.). - Algebraic theory of finite semigroups : Structure numbers and structure theorems for finite semigroups, in Semigroups, Proceedings of a Symposium on semigroups [1968. Detroit], p. 125-162. - New York, Academic Press, 1969.

[19] GINSBURG (S.). - Some remarks on abstract machines, Trans. Amer. math. Soc., t. 96, 1960, p. 400-444.

[20] ŠREIDER (Ju. A.). - Automata and the problem of dynamic programming, Problems of Cybernetics, t. 5, 1964, p. 33-58 ; [en russe], Problemy kibernetiki, 1961.

[21] VIETORIS (L.). - Bereiche zweiter Ordnung, Monatsh. für Math., t. 32, 1922, p. 258-280.

[22] WALLACE (A. D.). - Recent results on binary topological algebra, in Semigroups, Proceedings of a Symposium on semigroups [1968. Detroit], p. 261-267. - New York, Academic Press, 1969.

(Texte reçu le 3 novembre 1970)

Wilfried BRAUER
Institut für Theorie der Automaten
und Schaltnetzwerke
Schloss Birlinghoven
Postfach 1240
D-5205 ST-AUGUSTIN 1 (Allemagne fédérale)