FRÉDÉRIC ROGER

Classification des extrémales (d'après les travaux de M. Morse et prolongements)

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 6 (1938-1939), exp. n° 6, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1938-1939__6__A6_0>

VI.- G .

CERCLE MATHEMATIQUE

de l'Ecole Normale Supérieure

Sixième année 1938-1939

CALCUL des VARIATIONS

Classification des Extrémales

(D'après les travaux de M. MORSE et prolongements)

Exposé fait par M. Frédéric ROGER, le lundi 27 Février 1939

Exemplaire n° 6

Premier contact avec la théorie de M.Marston MORSE, cet exposé s'efforce de dégager les idées directrices de la classification des extrémales donnée dans le troisième chapitre de son livre "The calculus of variations in the large" (Américan Mathematical Society Colloquium Publications Vol.18, New-York, 1934). Une extrémale qui vérifie la condition de Legendre, voire même celle de WEIERSTRASS, ne correspond pas à un minimum de l'intégrale quand elle ne satisfait pas à la condition de Jacobi : son type s'écarte d'autant plus de celui du minimum qu'est transgressée davantage cette condition de Jacobi. On peut se demander ce qu'il advient quand on enfreint aussi la condition de Legendre : les résultats obtenus dans ce sens (1) aideront peut-être mieux à comprendre ceux mêmes de M.MORSE.

I.- INDICATRICE

Soit à étudier les valeurs stationnaires d'une intégrale de la forme

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y^1, y^2, \dots, y^n, p^1, p^2, \dots, p^n)\, dx$$
$$+ \theta\left[y^1(x_1), y^2(x_1), \dots, y^n(x_1), y^1(x_2), y^2(x_2), \dots, y^n(x_2)\right]$$

(1) F.ROGER, Sur une classification des extrémales, C.-R. de l'Académie des Sciences, 208, p.705

où la fonction donnée f porte sur les n fonctions indéterminées $y^i(x)$ (les $p^i(x)$ étant leurs dérivées) dont les valeurs aux limites $y^i(x_s)$ ($i=1,2,\dots,n$; $s=1,2$) sont assujetties à des conditions que l'on peut traduire par une représentation paramétrique

$$x_s = x_s(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^r) \ , \ y^i(x_s) = y_s^{\ i}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^r)$$

$$(0 \leq r \leq 2n + 2)$$

au moyen de laquelle s'exprime aussi la fonction donnée θ. Relativement à ce problème, soit Γ un <u>arc d'extrémale</u>, c'est à dire dont les coordonnées $y^i = \overline{y}^i(x)$, admettant des dérivées premières continues $\overline{p}^i(x)$, vérifient les équations d'Euler

$$\frac{d}{dx} f_{p^i}(x,y,p) - f_{y^i}(x,y,p) = 0 \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

Les paramètres α^h ($h=1,2,\dots,r$) étant choisis de manière que les extrémités de Γ correspondent aux valeurs zéro $\left[x_s(0) = a_s \ , \ y_s^{\ i}(0) = \overline{y}_s^{\ i}(a_s)\right]$, nous supposons que <u>vérifie la condition de transversalité</u> aux limites (1)

---

(1) Etant sous-entendus les signes de sommation de 1 à n pour l'indice i, en vertu de la convention des indices répétés.

$$d\theta + \Big[(f - p^i f_{p^i})dx_s + f_{p^i}\, dy^i_s\Big]_{s=1}^{s=2} \equiv 0$$

par rapport aux différentielles $d\alpha^h$, pour $\alpha^h = 0$, $y^i = \overline{y}^i(a_s)$, $p^i = \overline{p}^i(a_s)$.

Enfin, jusqu'à mention expresse du contraire, nous supposons essentiellement

ou bien (1°) pour l'étude du voisinage d'ordre 1, que Γ vérifie la condition de Legendre : la forme quadratique dont les coefficients sont les dérivées secondes $f_{p^ip^j}\left[x,\overline{y}(x),\overline{p}(x)\right]$ est définie positive quand $a_1 \leq x \leq a_2$

ou bien (2°) pour l'étude du voisinage d'ordre zéro, que Γ vérifie la condition de Weierstrass :

$$E(x,y,p,q) = f(x,y,q) - f(x,y,p) - (q^i - p^i)f_{p^i}(x,y,p) > 0$$

pour $y^i - \overline{y}^i(x)$, $p^i - \overline{p}^i(x)$ suffisamment petits et quel que soit $(q) \neq (p)$ quand $a_1 \leq x \leq a_2$; à cette condition nous ajoutons explicitement la condition de régularité : que la forme quadratique de Legendre ne soit pas dégénérée (afin qu'elle soit alors définie positive et que l'étude du voisinage d'ordre zéro englobe, comme il se doit, celle du voisinage d'ordre 1).

De cette condition de régularité satisfaite dans les deux cas, résulte l'existence d'une borne inférieure positive pour la différence des abscisses de deux foyers conjugués sur Γ. De telle sorte qu'en introduisant une subdivision $b_0 = a_1$, $b_1, b_2, \ldots, b_m = a_2$, de pas moindre que cette borne, chaque arc partiel Γ_ℓ de Γ $(b_{\ell-1} \leq x \leq b_\ell)$ $(\ell = 1, 2, \ldots, m)$ satisfait à la condition de Jacobi . Par suite, en faisant passer par chaque point de subdivision de Γ une variété régulière à n dimensions $x = X_\ell(\beta_\ell^1, \beta_\ell^2, \ldots \beta_\ell^n)$ $y^1 = Y_\ell^1(\beta_\ell^1, \beta_\ell^2, \ldots, \beta_\ell^n)$ $\left[X_\ell(0) = b_\ell \text{ , } Y_\ell^1(0) = \overline{y}^1(b_\ell) \right]$ $(\ell = 1, 2, \ldots, m-1)$, on fractionne toute <u>courbe variée admissible</u> C suffisamment voisine de Γ (voisinage d'ordre 1 ou 0 suivant le cas) en m arcs C dont les deux extrémités peuvent être jointes par un arc d'extrémale et un seul Γ'_ℓ voisin de Γ_ℓ . Par continuité, chaque arc Γ'_ℓ satisfait à la condition de Jacobi et à celle de Legendre (ou même de Weierstrass + continuité) . En sorte que la valeur de l'intégrale I n'est pas moindre sur la courbe variée C, que sur <u>l'extrémale brisée</u> Γ' qu'on lui fait ainsi correspondre.

Et cette substitution <u>présente le remarquable avantage</u> de remplacer la <u>fonctionnelle</u> $I[C]$ qui porte sur les n fonctions indéterminées $y^i(x)$ par la <u>fonction</u> $I[\Gamma'] = I(\alpha, \beta)$ de r + mn variables numériques (les r paramètres α dont dépendent les extrémités de Γ' et les m, n paramètres β dont dépendent les m sommets intermédiaires) . Pour les valeurs zéro de ces paramètres correspondant à Γ , il résulte de la condition de transversalité pour les

α et des équations d'Euler pour les β que la différentielle première de la fonction est identiquement nulle . L'étude repose alors sur la différentielle seconde : l'indicatrice relative aux variétés intermédiaires considérées de l'extrémale et transversale régulière Γ , la clef de l'étude locale (1) .

Quand cette forme quadratique est définie positive , la valeur de l'intégrale I étant plus grande sur toute extrémale brisée Γ' que sur l'extrémale Γ , cette dernière valeur est un minimum strict relatif (faible ou fort suivant le cas). Inversement, pour que Γ corresponde à un minimum relatif (même faible) de I, il est nécessaire que toutes les indicatrices de Γ , quel que soit le nombre et la forme des variétés intermédiaires, soient positives . Ainsi, le fait pour une indicatrice de n'avoir pas de carré négatif équivaut à la condition de Jacobi . C'est précisément par le nombre de carrés négatifs de ces indicatrices que nous allons pouvoir mesurer le manquement de l'intégrale Γ à cette condition de Jacobi .

Pour obtenir une expression de l'indicatrice,

---

(1) "This index form is the key to all subsequent analysis in the small" (M.Morse , loc.cit. p.37).

nous envisageons séparément les valeurs de l'intégrale I sur chaque arc Γ_ℓ'. Les coordonnées $y^i = y^i(x, \beta_{\ell-1}, \beta_\ell)$ du point d'abscisse x de cet arc, qui se réduisent à $\overline{y}^i(x)$ pour les valeurs nulles des paramètres, vérifient quelles que soient ces valeurs, les <u>équations d'Euler</u> et les <u>conditions aux limites</u>

$$y^i\left[X_s(\beta_s), \beta_{\ell-1}, \beta_\ell\right] \equiv Y_s^{\,i}(\beta_s) \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ s=\ell-1,\ell)$$

étant entendu, une fois pour toutes, que pour $\ell = 0$ ou m il convient de remplacer les n paramètres β_0 ou β_m par les r paramètres α et les fonctions $X_0(\beta_0)$, $Y_0^{\,i}(\beta_0)$ ou $X_m(\beta_m)$, $Y_m^{\,i}(\beta_m)$ par $x_1(\alpha)$, $y_1^{\,i}(\alpha)$ ou $x_2(\alpha)$, $y_2^{\,i}(\alpha)$

En différentiant deux fois la fonction

$$I_\ell(\beta_{\ell-1}, \beta_\ell) = \int_{X_{\ell-1}(\beta_{\ell-1})}^{X_\ell(\beta_\ell)} f\left[x, y(x,\beta_{\ell-1},\beta_\ell), y'_x(x,\beta_{\ell-1},\beta_\ell)\right] dx$$

on obtient, pour les valeurs nulles des paramètres, la <u>différentielle seconde</u> $\partial^2 I_\ell$ comme somme d'une partie toute intégrée (différence de deux formes quadratiques en $\partial\beta_\ell$ et en $\partial\beta_{\ell-1}$) et de l'intégrale $\int_{b_{\ell-1}}^{b_\ell} 2\Omega(\eta, \varpi)\, dx$

de la forme

$$2\Omega(\eta, \varpi) = f_{p^ip^j}\left[x, \overline{y}(x), \overline{p}(x)\right] . \varpi^i \varpi^j$$
$$+ 2 f_{p^iy^j} \varpi^i \eta^i + f_{y^iy^j} \eta^i \eta^j$$

quadratique par rapport aux <u>variations</u> $\eta^i(x) = \partial y^i =$
$\dfrac{\partial y^i}{\partial \beta_{\ell-1}^{\ h}} \partial_{\beta_{\ell-1}}{}^h + \dfrac{\partial y^i}{\partial \beta_\ell^{\ h}} \partial_{\beta_\ell}{}^h$ et à leurs dérivées $\varpi^i(x)$.

Ces variations vérifient les <u>équations de Jacobi</u> - équations aux variations des équations d'Euler que vérifient les fonctions $y^i(x, \beta_{\ell-1}, \beta_\ell)$

$$\frac{d}{dx}\Omega_{\varpi^i}(x,\eta,\varpi) - \Omega_{\eta^i}(x,\eta,\varpi) = 0$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

et satisfont aux <u>conditions aux limites</u> - obtenues par différentiation de celles auxquelles satisfont les fonctions $y^i(x, \beta_{\ell-1}, \beta_\ell)$

$$\overline{p}^i(b_s)\frac{\partial X_s}{\partial \beta_s{}^h}\partial_{\beta_s}{}^h + \eta^i(b_s) = \frac{\partial Y_s{}^i}{\partial \beta_s{}^h}\partial \beta_s{}^h$$

$(i=1,2,\ldots,n;$ sans sommation en $s = \ell-1, \ell)$. C'est ce que nous exprimerons en disant qu'elles définissent une <u>extrémale secondaire</u> satisfaisant aux <u>conditions aux limites secondaires</u> .

En faisant la somme pour les m arcs Γ'_ℓ , la <u>différentielle seconde</u> de la fonction $I(\alpha, \beta)$, valeur de l'intégrale I sur l'extrémale brisée (primaire) Γ' satisfaisant aux conditions aux limites et intermédiaires (primaires) envisagées, prend la forme

$$\partial^2 I = b_{hk}\, u^h\, u^k + \int_{s_1}^{s_2} 2\,\Omega(\eta, \varpi)\, dx$$

où la partie toute intégrée ne porte que sur les différentielles $\partial\alpha = u$, car il se trouve que les formes quadratiques en $\partial\beta = v$ se réduisent deux à deux , l'intégrale devant être prise sur une extrémale brisée secondaire , définie en fonction des u et v , par les conditions aux limites et intermédiaires secondaires (en sorte que les coordonnées η^i sont des formes linéaires en u et v , les coefficients étant fonction de x - et que l'indicatrice $\partial^2 I$ est bien alors, comme il se doit , une forme quadratique en u et v).

<u>II. - RACINES CARACTERISTIQUES</u>

Si l'on fait abstraction de la <u>forme particulière</u> des variations (η), on est conduit à étudier l'<u>intégrale quadratique</u> (secondaire)

$$J[\eta] = b_{hk}\, u^h\, u^k + \int_{s_1}^{s_2} 2\,\Omega(\eta, \varpi)\, dx$$

où les n fonctions indéterminées (secondaires) $\eta^i(x)$ (entrant quadratiquement avec leurs dérivées $\varpi^i(x)$ sous le signe somme) sont assujetties aux conditions aux limites secondaires

$$\eta_s^i = c_{hs}^i\, u^h \qquad \left[c_{hs}^i = \frac{\partial Y_s^i}{\partial \alpha^h}(0) - \overline{F}^i(a_s)\,\frac{\partial X_s}{\partial \alpha^h}(0)\right]$$

$(i=1,2,\ldots,n;\ s=1,2)$ en fonction des r paramètres (secondaires) u^h.

Quand il s'agit d'une forme quadratique à un nombre fini m de variables $a_{ij}z^i z^j$, on introduit une indéterminée λ de manière à rendre stationnaire la forme quadratique auxiliaire $a_{ij}z^i z^j - \lambda\, z^i z^i$. C'est dire que l'on cherche à résoudre les équations linéaires en z

$$a_{ij}z^i - \lambda\, z^i = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

qui n'ont, en général, que la solution nulle. Pour qu'il y ait d'autres solutions, λ doit être racine de l'équation caractéristique

$$|a_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0 \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}\right)$$

(équation en S des quadriques). On montre alors que l'ordre de multiplicité d'une racine caractéristique λ est égal au nombre de solutions (z) correspondantes, linéairement indépendantes; quand les coefficients a_{ij} sont réels, les m racines caractéristiques sont réelles et la décomposition en carrés de la forme quadratique initiale fait apparaitre autant de carrés d'un certain signe qu'il y a de racines caractéristiques de ce signe.

Pareillement, nous rendrons <u>stationnaire</u> l'intégrale quadratique auxiliaire

$$J_\lambda[\eta] = b_{hk}\, u^h\, u^k + \int_{a_1}^{a_2} \left[2\,\Omega(\eta, \varpi) - \lambda\, \eta^i \eta^i\right] dx$$

en imposant aux r fonctions indéterminées η^i de vérifier les <u>équations de Jacobi</u> (équations d'Euler secondaires)

$$\frac{d}{dx}\, \Omega_{\varpi^i}(x, \eta, \varpi) - \Omega_{\eta^i}(x, \eta, \varpi) = 0$$

$$(i=1,2,\ldots,n)$$

et les <u>conditions de transversalité secondaires</u>

$$d(b_{hk}\, u^h u^k) + \left[\Omega_{\varpi^i}\, d\, \eta_s^i\right]^{s=2} \equiv 0$$

(par rapport aux du^h), soit en posant $\Omega_{\varpi^i}\left[a_s, \eta^i(a_s), \varpi^i(a_s)\right] = J_i^{\,s}$ et tenant compte des conditions aux limites secondaires

$$c_{h1}^{\,i}\, J_i^{\,1} - c_{h2}^{\,i}\, J_i^{\,2} + b_{hk}\, u^k = 0 \qquad (h=1,2,\ldots,r)$$

Sous l'hypothèse de <u>non contact</u> entre la variété des extrémités admissibles (définie paramétriquement au moyen des α) et la variété terminale de l'extrémale Γ $y_s^{\,i} = \bar{y}^i(x_s)$ $(i=1,2,\ldots,n\ ;\ s=1,2)$, les conditions secondaires aux limites permettent d'exprimer les u en fonction de certains $\eta_s^{\,i}$. De sorte qu'il doit y avoir 2n relations linéaires entre les $\eta_s^{\,i}$ et les $J_i^{\,s}$ (ou, ce qui revient au même, les $\varpi^i(a_s)$, grâce à la condition de régularité) ; ce qui définit complètement la solution (η) des équations de Jacobi. Comme la solution nulle répond manifestement à la question, le problème secondaire ainsi posé n'en admettra généralement pas d'autre.

Par analogie avec une forme quadratique ordinaire, une valeur λ pour laquelle le problème secondaire admettra une solution (η) non identiquement nulle, sera dite racine caractéristique et un ordre de multiplicité sera défini comme le nombre de ces solutions (η) linéairement indépendantes .

Théorème fondamental

Toute indicatrice d'une extrémale et transversale Γ satisfaisant à la condition de Legendre, admet autant de carrés négatifs dans sa décomposition en carrés qu'il y a de racines caractéristiques négatives (comptées avec leur ordre de multiplcité) au problème secondaire associé à Γ.

La démonstration repose sur l'étude de la variation du paramètre λ à partir de valeurs négatives très grandes en valeur absolue jusqu'à zéro, dans l'intégrale auxiliaire

$$I_{\lambda} = \theta(\alpha) + \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} \left\{ f(x,y,p) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[y^{i} - \bar{y}^{i}(x) \right]^{2} \right\} dx$$

pour laquelle Γ continue d'être extrémale et transversale vérifiant la condition de Legendre, et dont $J_\lambda[\eta]$ est la variation seconde .

1°/ Quand λ décroit, la borne inférieure de la différence des abscisses de deux foyers conjugués sur Γ ne peut pas décroitre ; en sorte que la construction d'une indicatrice pour I au moyen de certaines variétés intermédiaires, <u>reste valable</u> pour I_λ quel que soit $\lambda < 0$.

2°/ Pour des valeurs de λ négatives et suffisamment grandes en valeur absolue, l'intégrale $J_\lambda[\eta]$ où (η) est assujetti aux conditions aux limites secondaires $\eta_s^i = c_{hs}^i u^h$ $(i=1,2,\ldots,n\ ;\ s=1,2)$ est positive quel que soit (η) non identiquement nul; par suite, pour ces valeurs de λ , l'indicatrice $\partial^2 I_\lambda$ est <u>définie positive</u> .

3°/ L'indicatrice relative à I_λ ne peut dégénérer que pour λ racine caractéristique; et l'excès du nombre $r + mn$ de variables u et v sur le nombre de carrés linéairement indépendants est alors égal à l'ordre de multiplicité de cette racine . En sorte que le nombre de carrés négatifs de l'indicatrice pour $\lambda = 0$ est <u>au plus égal</u> au nombre de racines caractéristiques négatives comptées avec leur ordre de multiplicité .

4°/ Les valeurs des paramètres u et v correspondant à une solution (η) non identiquement nulle du problème secondaire pour laquelle la racine caractéristique λ est négative rendent négative l'indicatrice $\partial^2 I$; et les systèmes (u,v) correspondant à des solutions (η) de racines caractéristiques λ différentes, ou de même racine λ mais linéairement indépendantes, sont eux-mêmes linéairement indépendants.

D'où résulte que le nombre de carrés négatifs de l'indicatrice $\partial^2 I$ est <u>au moins égal</u> au nombre de racines caractéristiques négatives comptées avec leur ordre de multiplicité; ce qui achève la démonstration du théorème .

Ainsi, d'une part, quel que soit le nombre et la forme des variétés intermédiaires considérées, l'indicatrice correspondante de Γ admet toujours le <u>même</u> nombre de carrés négatifs ; d'autre part, le problème secondaire associé à Γ n'a qu'un nombre <u>fini</u> de racines caractéristiques négatives . La valeur commune de ces deux nombres , c'est ce que nous appellerons avec M. Marston Morse l'<u>indice</u> de l'extrémale et transversale Γ satisfaisant à la condition de Legendre et transgressant la condition de Jacobi dans la mesure suivante :

<u>Théorème important</u>

<u>Quand l'une au moins des extrémités des courbes variées doit rester fixe, l'indice de Γ est égal au nombre</u>

<u>de foyers, situés sur Γ, du lieu de l'autre extrémité</u> .

La démonstration est parallèle à la précédente : on garde de Γ l'extrémité située sur une variété admissible et, partant d'un arc suffisamment petit, on fait se déplacer sur Γ l'autre extrémité jusqu'au point fixe en étudiant la répercussion du passage par un foyer de la variété admissible, sur l'indicatrice de l'arc partiel de Γ.

Dans le cas où les courbes variées ont leurs extrémités assujetties à se trouver sur deux variétés V_1 et V_2 l'indicatrice conduit à une certaine <u>forme quadratique différence</u> grâce à laquelle, en particulier, M.Marston Morse obtient les théorèmes suivants :

1°) <u>Il est nécessaire</u> pour que l'extrémale Γ satisfaisant à la condition de Legendre, corresponde à un minimum relatif (même faible) de l'intégrale I , qu'il n'y ait aucun foyer de V_1 ni de V_2 sur Γ et que le k-ième foyer de V_1 sur le prolongement de Γ au delà de l'extrémité A_2 ne soit pas en deça du k-ième foyer de V_2 au delà de A_2.

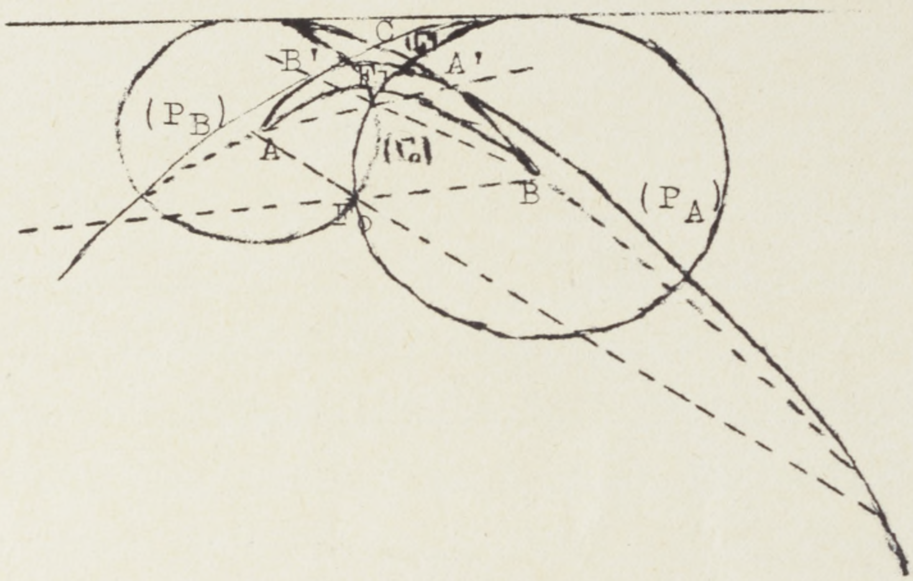
2°) <u>Il est suffisant</u> pour que l'intégrale I acquiert un minimum strict relatif faible (ou fort) sur l'arc de courbe Γ, que Γ soit une extrémale , coupe transversalement V_1 et V_2 , vérifie la condition de Legendre (ou de Weierstrass + régularité) ne porte aucun foyer de V_1 ni de V_2 et admette un prolongement au delà de l'extrémité A_2 portant n foyers de plus de V_2 que de V_1.

A ce même point de vue, M.Morse étudie spécialement le cas des <u>extrémales périodiques</u> (auquel se ramène ramène celui des <u>extrémales fermées</u>).

III.- INTERPRETATION et EXTENSION

Bien que sortant franchement du cadre des idées exprimées dans le livre de M.Morse, le point de vue suivant suggéré par ces idées mêmes, parait propre inversement à les éclairer d'un jour nouveau .

Reprenons l'exemple simple de la moindre action dans le mouvement d'un point pesant ($\int \sqrt{z}\, ds$). Les extrémales sont toutes les paraboles ($z > 0$) de directrice Ox . Quand un point B est à l'intérieur de la parabole de sûreté d'un point A, il y a deux arcs d'extrémale joignant A et B , d'indices respectifs 0 et 1 . Sur le second, (voir figure, page suivante) les foyers conjugués A' de A vers B et B' de B vers A présentent la disposition AB'A'B . Par suite, en choisissant C entre B' et A', l'arc correspond à un minimum de l'intégrale dans la famille des courbes



joignant A et B <u>en passant par C</u> . La même conclusion vaut pour les méridiennes des surfaces de révolution d'aire minima (chainettes) . Mais on peut aussi remarquer que la même intégrale ($\int z\, ds$) intervient dans la cote du centre de gravité d'un fil homogène pesant ,flexible , inextensible et de largeur donnée entre deux points . Et l'on sait alors que la "chainette" d'indice 1 correspond aussi au minimum de l'intégrale dans la famille des courbes joignant ses extrémités et de <u>même longueur qu'elle</u> .

Que l'on impose aux courbes variées de passer par un point ou d'avoir une longueur donnée, cela fait une condition qui se traduit par l'égalité d'une certaine expression à un nombre . Le fait est général :

<u>L'indice de M.Marston Morse d'une extrémale satisfaisant à la condition de Legendre (ou à celle de Weierstrass + régularité) , c'est le plus petit nombre de conditions numériques auxquelles il faut astreindre les courbes variées admissibles pour que, dans la famille ainsi restreinte, l'intégrale acquiert un minimum strict relatif faible (ou fort) sur l'extrémale</u>[1].

Exactement comme en un <u>point stationnaire</u> d'une <u>fonction</u> réelle de plusieurs variables numériques, l'"indice" (nombre de carrés négatifs dans la décomposition en carrés de la différentielle seconde - supposée non dégénérée-) est le plus petit nombre de relations qu'il faut imposer aux coordonnées d'un point variable pour que, sur la variété (régulière) définie, par ces relations, la fonction présente un nimimum relatif strict au point stationnaire considéré . Seulement alors, le nombre de carrés positifs de la différentielle seconde est aussi le plus petit nombre

---

(1) En toute rigueur, il convient de supposer l'extrémale non dégénérée c'est-à-dire d'indicatrice non dégénérée; et les conditions régulières c'est-à-dire admettant des différentielles premières (éventuellement des variations premières) non nulles sur l'extrémale .

de relations à imposer pour obtenir un maximum; et cette <u>symétrie</u>, quant aux notions de minimum et de maximum, ne peut se retrouver pour une extrémale qu'en se permettant d'enfreindre non seulement la <u>condition de Jacobi</u>, mais aussi la <u>condition de Legendre</u> .

Soit donc une extrémale Γ pouvant ne satisfaire, ni à la condition de Jacobi, ni à celle de Legendre, mais seulement à la condition de régularité : la forme quadratique de Legendre (celle dont les coefficients sont les dérivées secondes $f_{p^i p^j}\left[x,\bar{y}(x),\bar{p}(x)\right]$) se décompose en n carrés indépendants dont un certain nombre, soit ℓ, sont négatifs . De la transformation, selon Legendre, Jacobi et Clebsch, de la variation seconde de l'intégrale I [(1)], résulte alors qu'un système convenable de ℓ équations différentielles du premier ordre et d'un certain nombre de conditions numériques définit, dans la famille de toutes les courbes variées admissibles, une <u>sous-famille</u> dans laquelle Γ correspond à un minimum strict relatif faible de I . Aucun autre système ne jouit de cette propriété s'il ne comprend pas au moins ℓ équations différentiel-

---

(1) Cf. <u>J.HADAMARD</u> , <u>Leçons sur le calcul des variations</u> Paris, Hermann, 1910, p.336.

les régulières [2] ; ce plus petit nombre ℓ de *relations fonctionnelles* à imposer aux courbes variées pour obtenir un minimum de I sur Γ , c'est ce que nous appellerons *l'indice de Legendre* . Quant au plus petit nombre de *conditions numériques* qu'il faut adjoindre aux ℓ équations différentielles pour définir une famille minimisante, lorsque l'une au moins des extrémités des courbes variées doit rester fixe, il est au plus égal au nombre de foyers, situés sur Γ , du lieu de l'autre extrémité . Par suite, au plus égal à ce nombre augmenté de n dans le cas général; nous l'appellerons *l'indice de Jacobi*. Bien entendu, d'après ce que nous avons vu, quand l'indice de Legendre est nul (auquel cas la condition de Legendre est satisfaite) l'indice de Jacobi n'est autre que celui de M.Marston Morse.

Ainsi, pour les fonctions de variables numériques on peut *classer* les points stationnaires d'après le nombre de relations nécessaires à l'obtention d'un minimum . Pour les intégrales curvilignes, la *classification des extrémales* à ce même point de vue fait intervenir *deux nombres* : un nombre de relations fonctionnelles entre les

---

(1) C'est-à-dire dont les équations aux variations à partir de Γ soient linéaires .

fonctions indéterminées qui sont, dans le domaine des *fonctionnelles* ce que les relations entre les variables sont dans le domaine des *fonctions* ; et un nombre de conditions numériques qui restent, elles, *du même ordre* que les relations imposées entre les variables numériques . L'indice de Legendre est d'ordre infiniment plus élevé que celui de Jacobi .

On comprend alors pourquoi la théorie des "*critical values*" donnée par M.Morse initialement pour les fonctions de variables numériques a pu être étendue par lui aux intégrales curvilignes quand est vérifiée la condition de Legendre. La variation seconde qui se présente comme intégrale d'une forme quadratique par rapport aux variations des fonctions indéterminées et à leurs dérivées, peut bien être considérée comme une forme quadratique à une infinité de variables numériques . Mais, et c'est là le fait esentiel , de ce que l'indice de Legendre est nul, la partie négative se comporte comme une forme quadratique à un nombre fini de variables, le nombre des racines caractéristiques du problème secondaire, l'*indice de M.Marston Morse* .
