Séminaire de Mathématiques

R. Fortet

Les problèmes isopérimétriques

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 6 (1938-1939), exp. n° 4, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1938-1939__6__A4_0>

VI. - E.

CERCLE MATHEMATIQUE

de l'Ecole Normale Supérieure

Sixième année 1938-1939

CALCUL des VARIATIONS

Les problèmes isopérimétriques

Exposé fait par M.R. FORTET, le lundi 30 Janvier 1939

Exemplaire n° 6

I.- PRELIMINAIRES

Problème isopérimétrique proprement dit :

Le problème isopérimétrique proprement dit consiste à chercher, parmi toutes les courbes planes, fermées, continues, rectifiables, de périmètre donné, celle qui enferme la plus grande aire. Analytiquement, et en coordonnées paramétriques, ce problème peut s'exprimer ainsi : parmi toutes les courbes planes, fermées, continues, rectifiables C pour lesquelles l'intégrale

$$J_C = \int_C \sqrt{x'^2+y'^2}\, dt$$

a une valeur déterminée J , chercher celle pour laquelle l'intégrale

$$I_C = \int_C (xy' - yx')\, dt$$

est maximum .

Problème isopérimétrique général :

Cet exemple conduit à poser ce que nous appellerons le problème isopérimétrique général, qui, en coordonnées paramétriques, peut s'énoncer ainsi :

Soit K une classe de courbes planes C, continues et rectifiables, $\overline{K}$ la sous-classe des courbes C de K pour lesquelles l'intégrale

$$J_C = \int_C G(x,y,x',y')\,dt$$

a une valeur déterminée $\overline{J}$; trouver la (ou les ...) courbe C de $\overline{K}$ pour laquelle l'intégrale

$$I_C = \int_C F(x,y,x',y')\,dt$$

est minimum (ou maximum) dans $\overline{K}$.

On peut se limiter évidemment au problème du minimum : c'est ce que nous ferons, sauf quand il s'agira du problème isopérimétrique proprement dit . Il y aura d'ailleurs à distinguer le problème du minimum absolu et celui du minimum relatif, le problème du minimum relatif fort et celui du minimum relatif faible .

D'autre part, on peut aussi poser le problème en coordonnées cartésiennes : mais nous ne considérerons guère que le cas paramétrique, nous bornant à des indications relativement au cas cartésien .

Signalons des généralisations possibles, en considérant des courbes C non plus planes, mais gauches, ou bien en considérant des fonctions F et G dépendant non seulement des dérivées du 1er ordre x' et y', mais aussi de dérivées d'ordre supérieur, etc .... Nous laisserons ces généralisations de côté .

Nous appellerons souvent le problème isopérimétrique général le problème de l'<u>extremum lié</u> (ou <u>conditionnel</u>) par opposition au problème ordinaire du calcul des variations qui est un problème d'<u>extremum libre</u> .

<u>Idées générales</u> .

Comme il était naturel, la théorie de l'extremum lié s'est développée en corrollaire de la théorie de l'extremum libre, de sorte que la première apparait généralement comme une extension de la seconde ; nous aurons donc, comme pour le calcul des variations ordinaire, à envisager deux points de vue, deux méthodes :

1°) Méthode analytique classique (Lagrange, Legendre, Jacobi, Weierstrass, Kneser, Lindeberg ....)

2°) Méthode directe (Tonelli) .

Mais les problèmes isopérimétriques qui présentent d'abord toutes les difficultés du Calcul des Variations ordinaire (puisqu'il s'agit d'extremum), offrent en outre des difficultés spéciales dues au fait que l'extremum est conditionné et qui ont gêné l'extension en question : elles ont néanmoins été surmontées, assez récemment il est vrai (Lindeberg,1909)

D'autre part, le problème isopérimétrique proprement dit, vu l'intérêt qu'il présente en lui-même, a fait l'objet de méthodes élémentaires directes dont nous dirons quelques mots (Bonnesen) .

<u>Hypothèses générales : notations</u> .

Nous supposons que le point (x,y) varie dans un domaine fermé A , borné (pour simplifier) . Les courbes C sont ordinaires , c'est-à-dire que leurs points appartiennent tous à A , qu'elles sont continues et rectifiables ; si elles ont en tous leurs points une tangente continue, nous dirons qu'elles sont de classe 1 .

F et G sont réelles et uniformes dans A , et pourvues, ainsi que leurs dérivées $F_{x'}$, $F_{y'}$, $G_{x'}$, $G_{y'}$ de dérivées partielles du 1er et du 2ème ordre finies et continues . Enfin F et G sont positivement homogènes d'ordre 1 en x' , y' .

M étant une fonction douée des propriétés précédentes, nous posons en général :

$$M_1 = \frac{M_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{M_{x'y'}}{x'y'} = \frac{M_{y'y'}}{x'^2}$$

Nous poserons

$$H = F + \lambda G$$

où λ est une constante ; et :

$$E(x,y;x',y';\overline{x}',\overline{y}';\lambda) = H(x,y;\overline{x}',\overline{y}';\lambda) - \overline{x}'H_{x'}(x,y;x',y';\lambda) - \overline{y}'H_{y'}(x,y;x',y';\lambda)$$

Si $x', y'; \overline{x}', \overline{y}'$ sont normalisés ($x'^2 + y'^2 = 1$, $\overline{x}'^2 + \overline{y}'^2 = 1$), on peut poser : $x' = \cos\theta$, $y' = \sin\theta$, $\overline{x}' = \cos\overline{\theta}$, $\overline{y}' = \sin\overline{\theta}$ et considérer la fonction :

$$E(x,y;\ \cos\theta, \sin\theta\ ;\ \cos\overline{\theta}, \sin\overline{\theta}\ ; \lambda)\ .$$

II.- METHODES CLASSIQUES - EXTREMITES FIXES

MINIMUM RELATIF

La classe K étant constituée par toutes les courbes ordinaires joignant deux points fixes intérieurs à A , nous nous proposons très précisément de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe C_o , toute entière à l'intérieur de A, ouverte et sans point multiple , de classe 1 , donne un minimum fort ou faible (nécessairement relatif) à l'intégrale I_C parmi la classe $\overline{K}$ de toutes les courbes ordinaires C pour lesquelles $J_C = J_{C_o}$

Condition préliminaire (condition N.E. pour G) :

Si C_o réalisait par exemple un maximum de J_C, une courbe C voisine de C_o ne pourrait pas satisfaire en général à l'égalité $J_C = J_{C_o}$ (on aura généralement $J_C < J_{C_o}$) ; C_o sera donc isolée dans la sous-classe $\overline{K}$ et il ne saurait être question de minimum relatif ; il faut donc déjà supposer que C_0 n'est pas une extrémante de J_G ; mais en fait, comme on le verra un peu plus bas, il est nécessaire pour la théorie que nous avons en vue de faire une hypothèse plus restrictive encore, à savoir que C_0 n'est pas une extrémale pour G (condition N.E. pour G) . Cette hypothèse est posée définitivement pour tout ce chapitre .

Méthode générale

Comme pour le problème ordinaire du Calcul des Variations, nous considérerons les courbes C non pas de K, mais de $\overline{K}$, et nous chercherons quelles conditions (nécessaires ou suffisantes) il faut imposer à C_0 pour que la différence $I_C - I_{C_0}$ soit ≥ 0 quelle que soit C , du moins lorsque C appartient à un voisinage (d'ordre 0 ou d'ordre 1) suffisamment étroit de C_0 . Nous prendrons comme paramètre l'arc s des courbes C .

A) Recherche des conditions nécessaires

Une courbe C , voisine d'ordre 0 de C_0, a des coordonnées de la forme :

$$x = x_0 + \xi \qquad\qquad y = y_0 + \eta$$

avec ξ et η petits : ξ et η représentent la variation de C_0 ; mais il nous faut de plus choisir ξ et η de telle sorte que C soit dans $\overline{K}$: ξ et η constitueront alors une

<u>variation admissible</u> : sans chercher pour le moment la variation admissible la plus générale , nous ferons choix d'une variation admissible spéciale, suffisante pour établir les lère, 2ème et 3ème conditions nécessaires .

p_1, p_2, q_1, q_2 étant quatre fonctions arbitraires nous poserons

$$\xi = \varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 \qquad\qquad \eta = \varepsilon_1 q_1 + \varepsilon_2 q_2$$

où ε_1 et ε_2 sont des constantes, et nous déterminerons ε_2 en fonction de ε_1 de telle sorte qu'elle soit infiniment petite avec ε_1 et que $J_C = J_{C_0}$; or :

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} J_C\right]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \int_{C_0} (G_x p_2 + G_y q_2 + G_{x'} p'_2 + G_{y'} q'_2)\, ds = N_2$$

Comme C_0 n'est pas extrémale pour G, on peut choisir p_2 et q_2 de telle sorte que $N_2 \neq 0$: l'équation $J_C = J_{C_0}$ détermine alors (fonctions implicites) ε_2 : on trouve :

$$\varepsilon_2 = -\frac{N_1}{N_2}\varepsilon_1 + \varphi(\varepsilon_1)\,\varepsilon_1$$

où $\varphi(\varepsilon_1) \longrightarrow 0$ avec ε_1 ; N_1 désigne $\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} J_C\right]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$

nous poserons de même : $M_1 = \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} I_C\right]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$, on a alors :

$$\Delta^1 I_C = \varepsilon_1 (M_1 - \frac{M_2}{N_2} N_1) + \varphi(\varepsilon_1)\, \varepsilon_1$$

On doit donc avoir :

$$M_1 - \frac{M_2}{N_2} N_1 = 0 \qquad (1)$$

Mais, p_2 et q_2 étant choisis, $-\frac{M_2}{N_2}$ est une constante numérique $+\lambda_o$ qui ne dépend que de C_o, de p_2, q_2 ; mais d'après (1), où M_1 et N_1 ne dépendent que de C_o, p_1, q_1, on voit que λ_o ne dépend réellement que de C_o. Et on voit facilement que (1) s'écrit, en posant $H = F + \lambda_o G$:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_1 = 0} = 0$$

Remarquons que cette démonstration n'exige pas que C_o soit de classe 1, ni privée de points multiples.

D'où la première condition nécessaire :

<u>1ère condition nécessaire ou règle d'Euler (R.I.d'E.)</u>

Pour que C_o soit une extrémante relative forte ou faible de I_C dans $\overline{K}$, il faut qu'il existe un nombre λ_o (et d'ailleurs il n'y en aura qu'un sous la condition N.E. pour G) tel que C_o soit une extrémale pour la fonction $H = F + \lambda_o G$.

λ_o est dit la constante isopérimétrique relative à C_o ; chaque arc α_o de C_o qui n'est pas une extrémale de G est évidemment lui aussi extrémal pour H, avec la même constante isopérimétrique que C_o (conservation de la constante isopérimétrique) .

Autrement dit C_o doit être solution du système :

$$H_x - \frac{d}{ds} H_{x'} = 0 \qquad H_y - \frac{d}{ds} H_{y'} = 0 \qquad (2)$$

ou de l'équation :

$$H_{xy'} - H_{x'y} + H_1 . (x'y'' - x''y') = 0 \qquad (3)$$

<u>2ème condition nécessaire ou condition de Legendre</u> .

On établit à peu près comme dans le calcul des variations ordinaire que : pour que C_o soit une extrémante relative forte ou faible de I_C dans $\overline{K}$, il faut que l'on ait le long de C_o :

$$H_1 = H_1 (x_o, y_o ; \cos \theta_o , \sin \theta_o ; \cos \theta , \sin \theta ; \lambda_o) \geq 0$$

(Condition de Legendre large le long de la courbe C_o ou $L_{\ell C_o}$)

Et de même :

<u>3ème condition nécessaire ou condition de Weierstrass</u> .

Pour que C_o soit une minimante relative forte pour I_C dans $\overline{K}$, il faut que l'on ait le long de C_o, quel que soit :

$$E(x_o, y_o ; \cos \theta_o , \sin \theta_o ; \lambda_o) \geq 0$$

(Condition de Weierstrass large forte le long de C_o ou

$W_{\ell C_0}$ forte).

Pour que C_0 soit une minimante relative faible pour I_C dans $\overline{K}$, il faut que l'on ait le long de C_0, quel que soit :

$$E(x_0, y_0 ; \cos\theta_0, \sin\theta_0 ; \cos\theta, \sin\theta ; \lambda_0) \geq 0$$

du moins pour θ suffisamment voisin de θ_0.
(Condition de Weierstrass large faible le long de C_0 ou $W_{\ell C_0}$ faible).

<u>4ème condition nécessaire ou de Jacobi</u> .

Soient P_1 et P_2 les extrémités fixes des C ; supposons que C_0 satisfasse à la règle isopérimétrique, avec constante isopérimétrique λ_0 et à la condition de Legendre stricte $\left(H_1 = H_1(\lambda_0) > 0 \text{ sur } C_0\right)$; les extrémales D de $F + \lambda G$ issues de P_1 forment une famille à deux paramètres λ et ω (ω représentant par exemple le coefficient angulaire de la tangente en P_1 à l'extrémale) ,admettant une représentation paramétrique de la forme :

$$x = \varphi(s, \omega, \lambda) \qquad y = \psi(s, \omega, \lambda) \qquad (0 \leq s)$$

Pour $\omega = \omega_0$, $\lambda = \lambda_0$, on obtient $D_0 = C_0$. Par analogie avec la théorie de l'extremum libre, peut-on définir sur C_0 un foyer conjugué de P_1 ? Nos extrémales dépendant de deux paramètres n'ont pas d'enveloppe ; mais posons :

$$z = \chi(s, \omega, \lambda) = \int_0^s G(\varphi, \psi, \varphi'_s, \psi'_s)\, ds$$

Les formules $x = \varphi$, $y = \psi$, $z = \chi$ définissent dans l's^3 une famille de courbes $\overline{D}$ à deux paramètres, dont on peut extraire des familles à un paramètre admettant une enveloppe (congruences) : parmi les foyers de la courbe $\overline{D}_0$ correspondant à C_0 dont le paramètre est positif (s'il y en a), l'un a un paramètre plus petit que les autres, soit s_0 ; le point P'_1 de C_0 de paramètre s_0 sera dit le foyer conjugué de P_1 sur C_0. On démontre que, sous les hypothèses mentionnées plus haut, pour que C_0 soit une minimante relative, forte ou faible, de I_C dans $\overline{K}$, il faut que $L_0 \leq s_0$ (condition de Jacobi large, J_ℓ), c'est-à-dire que P_2 doit être entre P_1 et P'_1.[1]

Observons que s_0 peut être défini comme la plus petite racine positive du Jacobien $\Delta(s, \omega_0, \lambda_0)$:

$$\Delta(s, \omega_0, \lambda_0) = \begin{vmatrix} \varphi_s & \varphi_\omega & \varphi_\lambda \\ \psi_s & \psi_\omega & \psi_\lambda \\ \chi_s & \chi_\omega & \chi_\lambda \end{vmatrix}$$

---

(1) Dans le problème d'extremum libre relatif à $F + \lambda_0 G$, on définit sur C_0 un foyer conjugué P''_1 de P_1 : il est à présumer, et on démontre effectivement, que P'_1 est au moins aussi éloigné de P_1 que P''_1.

Idée de la démonstration

v_1 et v_2 désignant symboliquement deux variations admissibles donnant à $\Delta^2 I_C$ -ou à $\Delta^2 (I_C + \lambda_0 J_C)$ - des valeurs Δ_1^2 et Δ_2^2 , $v_1 + hv_2$ est aussi une variation admissible (ou du moins satisfait à $\Delta^1 J_C = 0$) et donne à $\Delta^2 J_C$ la valeur :

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + \alpha.h + \Delta_2^1 .h^2$$

où α est une certaine quantité ; si l'on peut choisir v_1 de telle sorte que $\Delta_1^2 = 0$, puis v_2 de telle sorte que $\alpha \neq 0$, et il est clair que, pour h petit et de signe convenable , on pourra avoir $\Delta^2 < 0$, et C_0 ne sera pas minimante .

Or on démontre que si P'_1 est entre P_1 et P_2, un tel choix de v_1 et de v_2 est possible (Démonstration compliquée; une grosse difficulté vient de ce que la variation v_1 trouvée présente des dérivées discontinues) .

B) Recherche de conditions suffisantes

Supposons que C_0 , toujours sous l'hypothèse N.E.pour G ,

a) satisfait à la règle isopérimétrique avec constante isopérimétrique λ_0 ,

b) satisfait à la condition de Legendre stricte

$(H_1(\lambda_0) > 0,\ L_{sC_0})$.

c) satisfait à la condition de Jacobi stricte $(s_\bullet > L_0,\ I_s)$.

On peut alors affirmer que C_0 est minimante relative faible de C_0 dans $\overline{K}$. Pour traiter le cas du minimum fort, on raisonne de la façon suivante :

<u>L'extrémale C'_0</u> :

Il existe une extrémale C'_0 de $F + \lambda_0 G$ dont C_0 est un arc, mais dont l'origine M_1 précède P_1, tandis que son extrémité M_2 est au delà de P_2 ; C'_0 est tout entière intérieure à A, ouverte et sans points multiples, de longueur $L'_0 (> L_0)$.

<u>La famille d'extrémales $D_{\omega,\lambda}$</u>.

Tout au moins si λ et ω sont suffisamment voisins de λ_0 et ω_0 (ω_0 = coefficient de direction de C'_0 en M_1), il existe une extrémale $D_{\omega,\lambda}$ de $F + \lambda G$ issue de M_1, de coefficient de direction ω en M_1, tout entière dans A, sans points multiples. En désignant par t l'arc sur $D_{\omega,\lambda}$, $D_{\omega,\lambda}$ peut être représenté par :

$$x = \varphi(t, \omega, \lambda) \qquad y = \psi(t, \omega, \lambda)$$

Posons :

$$\chi(t, \omega, \lambda) = \int_0^t G\left[\varphi, \psi, \varphi'_t, \psi'_t\right] dt$$

Soit $\overline{D}_{\omega,\lambda}$ la courbe de l'espace à trois dimensions définie par :

$$x = \varphi \quad , \quad y = \psi \quad , \quad z = \chi$$

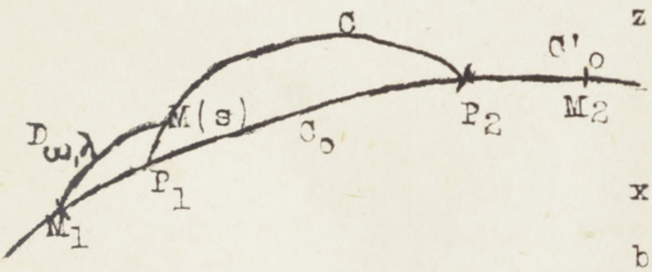
$\overline{C}_0$ désignant la courbe de l'espace qui correspond à C_0 comme $\overline{D}_{\omega,\lambda}$ correspond à $D_{\omega,\lambda}$, par tout point de l'espace voisin de $\overline{C}_0$ passe une $\overline{D}_{\omega,\lambda}$ et une seule .

<u>La formule de Weierstrass</u> :

Soit C, de la classe $\overline{K}$, voisine de C_0 et d'équation

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s)$$

Posons :



$$z = z(s) = J_{C'_0}(M_1P_1) + \int_0^s G\left[x(s),y(s),x'_s,y'_s\right] ds$$

$x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ définissent une courbe $\overline{C}$ de l'espace . <u>Si $\overline{C}$ est voisine de $\overline{C}_0$</u> on établit , à peu près comme pour le problème de l'extremum libre, que :

$$I_C - I_{C_0} = \int_C E\left[x(s),y(s);\varphi_t,\psi_t;x'_s,y'_s;\lambda_s\right] ds$$

où λ_s désigne le λ de la $\overline{D}_{\omega,\lambda}$ qui passe par le point de l'espace de coordonnées : $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$. On utilise essentiellement le fait que

$$J_{M_1M \text{ sur } D} = J_{M_1P_1 \text{ sur } C'_0} + J_{P_1M \text{ sur } C}$$

Conclusions

Si C est voisine d'ordre 1 de C_o , $\overline{C}$ est voisine de $\overline{C}_o$; mais si le voisinage est seulement d'ordre 0, on ne peut rien dire . Aussi pendant longtemps, on en est resté là : ce sont Lindeberg et Tonelli qui surent aller plus loin.

D'abord, si, C étant voisine d'ordre 0 de C_o , sa longueur L est voisine de la longueur L_o de C_o , on peut montrer que $\overline{C}$ est voisine de $\overline{C}_o$; et alors si C_o satisfait à la condition de Weierstrass stricte forte (W_{sC_o} forte) , c'est-à-dire si

$$E(x_o,y_o;\cos\theta_o,\sin\theta_o\,;\sin\theta,\cos\theta\,;\lambda_o) > 0$$

le long de C_o , quel que soit θ , la formule de Weierstrass indique que

$$I_C - I_{C_o} > 0$$

Reste le cas où L ne serait pas voisine de L_o (donc supérieure à L_o) ; on démontre que dans ce cas , on a :

$$(I + \lambda_o J)_C > (I + \lambda_o J)_{C_o}$$

et comme $J_C = J_{C_o}$, il reste :

$$I_C > I_{C_o}$$

ce qui établit , sous les hypothèses indiquées plus haut, que la condition de Weierstrass stricte forte le long de C_o est suffisante pour que C_o soit une minimante relative forte.

L'ensemble de nos résultats peut être résumé dans le tableau suivant :

	Min. faible	Min. fort
cond. nécess.	R.I. L_{ℓ, C_0} W_{ℓ, C_0} faible J_ℓ	R.I. L_{ℓ, C_0} W_{ℓ, C_0} forte J_ℓ
cond. suffis.	R.I. L_{s, C_0} J_s	R.I. L_{s, C_0} J_s W_{s, C_0} forte

C) <u>Loi de réciprocité</u>

Si C_0 est extrémale pour $F + \lambda_0 G$, elle est aussi extrémale pour $G + \left(\frac{1}{\lambda_0}\right) F$; ceci fait soupçonner l'existence de rapports entre le problème d'extremum de I_C pour J_C constant, et le problème d'extremum, dit réciproque, de J_C pour I_C constant. Ce rapport, connu sous le nom de loi de réciprocité, peut être précisé de la façon suivante :

Si C_0, satisfaisant à la condition N.E. pour F et pour G à la fois, satisfait aux conditions nécessaires (suffisantes) indiquées au tableau précédent pour l'un des problèmes, elle satisfait également aux conditions nécessaires (suffisantes) pour le problème réciproque .

En particulier, le conjugué P'_1 de P_1 sur C_0 est le même dans les deux problèmes

D) Application au problème isopérimétrique proprement dit (modifié) .

Etant donné deux points P_1 et P_2 (que l'on peut supposer d'ordonnées égales) nous cherchons la courbe C_0 joignant P_1 à P_2 , de longueur donnée ℓ , c'est-à-dire telle que

$$J_{C_0} = \int_{C_0} \sqrt{x'^2+y'^2}\ dt = \ell \qquad G = \sqrt{x'^2+y'^2}$$

et pour laquelle l'intégrale :

$$I_C = \int_C (xy'-yx')\ dt \qquad F = xy'-yx'$$

est maxima . (Géométriquement, ceci revient à peu près à chercher la courbe C_0 pour laquelle l'aire comprise entre C_0 et la corde P_1P_2 est maxima; je dis "à peu près" parce que nous considérons des aires algébriques, tandis que dans le problème de géométrie les aires seraient essentiellement positives, ce qui entraine quelques différences .

Nous supposons $\ell > P_1P_2$, sans quoi la sous-classe $\overline{K}$ serait vide, ou réduite à un seul élément - le segment P_1P_2, si $\ell = P_1P_2$- L'existence de C_o n'est pas assurée a priori, mais si C_o existe elle ne sera évidemment pas extrémale pour G (puisque $\ell > P_1P_2$) et nous devons la rechercher parmi les extrémales de la fonction :

$$H = xy' - yx' + \lambda \sqrt{x'^2+y'^2}$$

L'équation (3) s'écrit ici :

$$2 + \lambda \, . \, \frac{x'y'' - x''y'}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ou :

$$\frac{1}{r} = - \frac{2}{\lambda}$$

r désignant le rayon de courbure des extrémales : celles-ci sont des arcs de cercles (en principe, une extrémale pourrait être constituée par plusieurs arcs de cercles pris sur des cercles de même rayon mais de centres différents ; mais il ne peut en être ainsi, le problème étant régulier) . Parmi ces arcs, seuls nous intéressent ceux qui joignent P_1 à P_2 directement et sont déterminés par les conditions :

$$\frac{P_1P_2}{2|r|} = \sin \frac{\ell}{2|r|} \qquad\qquad 2\pi|r| > \ell$$

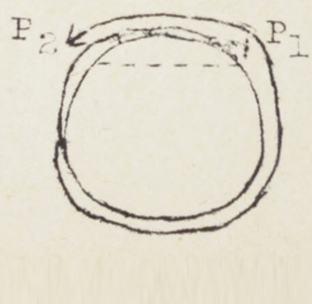
et peut-être aussi d'autres (arcs indirects) qui ne satisfont pas à la condition

$$2\pi\,|r| > \ell\,.$$

Pour qu'un de ces arcs soit maximant,

arc direct

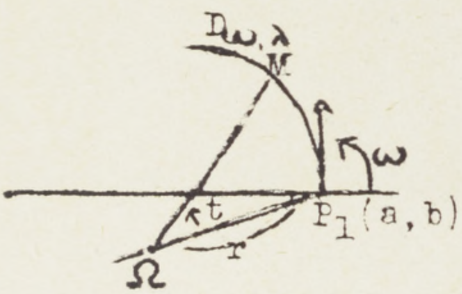
arc indirect



il faut que la condition de Legendre soit satisfaite ($H_1 \leq 0$) sur cet arc ; il faut donc $\lambda < 0$ (et alors on a la condition de Legendre stricte) ; $\lambda < 0$ entraine $r > 0$, ce qui élimine déjà un certain nombre d'arcs .

Passons à la condition de Jacobi;avec le paramètre t indiqué par la figure, on trouve :

$$\Delta(t,\omega,\lambda) = -\frac{\lambda^2}{4}\sin\frac{t}{2}\left\{t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}\right\}$$



dont la plus petite racine positive est $t = 2\pi$; P'_1 est en P_1 , la condition de Jacobi ne sera pas vérifiée sur les arcs indirects . Il ne reste qu'un arc possible, C_0 , direct ; pour être sûr que C_0 convient, il suffit de constater qu'il satisfait à la condition de Weierstrass forte stricte : or ici :

$$E(x_0,y_0;\cos\theta_0,\sin\theta_0;\cos\theta,\sin\theta;\lambda_0) = \lambda_0\left[1 - \cos(\theta - \theta_0)\right]$$

évidemment < 0 (puisque $\lambda_0 < 0$) .

L'arc C_0 résoud donc le problème . On observera qu'ici les $D_{\omega,\lambda}$ sont des hélices .

III.- METHODE DIRECTE - EXTREMUM ABSOLU

La méthode directe s'attaque au problème de l'extremum absolu (dont l'extremum relatif fort est un cas particulier) . Elle est caractérisée par le fait qu'avant de chercher l'extremum, elle s'efforce de savoir s'il existe .

Sauf avis contraire, nous continuons à poser le problème en paramétrique avec un paramètre t quelconque.

A) Existence de l'extremum absolu .[1]

Considérons la sous-classe $\overline{K}$ de K, définie par $J_C = \overline{J}$; il faut d'abord être assuré que $\overline{K}$ existe (n'est pas vide); ceci fait, soit m la borne (inférieure, par exemple) de I_C dans $\overline{K}$: il y aura mimimum (conditionnel) absolu si, et seulement si, I_C atteint la valeur m dans $\overline{K}$.

Si $\overline{K}$ est un ensemble compact et fermé, il suffira comme on sait, que I_C soit semi-continue inférieurement pour qu'il en soit ainsi . On sera assuré que $\overline{K}$ est compact et fermé si J_C est une fonctionnelle continue de C (au sens du voisinage d'ordre 0) ; cela a lieu par exemple si, les longueurs des C de K étant bornées, J_C est de la forme :

(1) Pour cette question d'existence, on peut se contenter en ce qui concerne F et G, d'hypothèses moins restrictives que celles indiquées p.4 .

$$J_C = \int_C \left[M(x,y)x' + N(x,y)y' \right] dt \qquad \text{(M et N continues)}$$

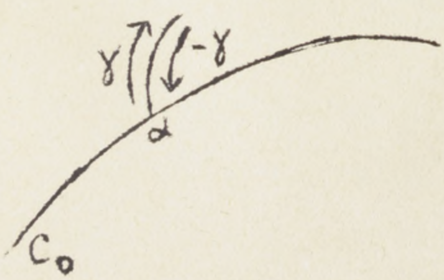
Mais la continuité de J_C est exceptionnelle (elle n'est pas réalisée par exemple dans le problème isopérimétrique proprement dit) . Il faut donc trouver des conditions plus larges, en nous bornant à supposer (par exemple) J_C semi-continue inférieurement .

Tout revient à ceci : peut-on trouver une suite de courbes $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n, \ldots\ldots$ de $\bar{K}$ tendant vers une courbe C_0, telles que $I_{C_n} \longrightarrow m$ et que :

a) $I_{C_n} = m$; b) C_0 soit dans $\bar{K}$

Si les C de K sont de longueur bornée, toute suite C_n de $\bar{K}$ est compacte et peut être supposée convergente vers une courbe C_0 ; mais généralement C_0 ne sera pas dans $\bar{K}$. On aura (vu la semi continuité inférieure de J_C) $J_{C_0} \leq \bar{J} = J_{C_n}$.

Dans certains cas, on peut déduire de C_0 une courbe C'_0 appartenant à $\bar{K}$: par exemple, si on a : $G \geq 0$ dans A il suffit d'adjoindre à C_0 un arc γ de longueur convenable



ayant son origine en α sur C_0 et qui sera parcouru dans les deux sens ; on pourra avoir ainsi $J_{C_0+\gamma+(-\gamma)} = \bar{J}$, si $J_{\gamma+(-\gamma)} = \bar{J} - J_{C_0}$

D'autre part, si I_C est continue ou semi-continue inférieurement, on aura : $I_{C_0} = m$; mais $I_{C_0+\gamma+(-\gamma)}$ sera généralement $\neq m$; sauf toutefois si I_C est de la forme :

$$I_C = \int_C \left[M(x,y)x' + N(x,y)y' \right] dt$$

parce que, évidemment : $\int_{\gamma+(-\gamma)} \left[Mx' + Ny' \right] dt = 0$.

Rappelons que pour que J_C soit semi-continue inférieurement, il suffit , G étant ≥ 0 que G_1 soit ≥ 0 . On a donc :

Théorème d'existence

Si on a :

a) $G \geq 0$; b) $G_1 \geq 0$; c) $F = Mx' + Ny'$

il existe un minimum et un maximum absolu de I_C dans $\bar{K}$ (pourvu que $\bar{K}$ existe) .

Ce théorème s'applique évidemment au problème isopérimétrique proprement dit . Ajoutons que M. Tonelli , en perfectionnant ce procédé et d'autres analogues, a établi de nombreux théorèmes d'existence, généralement plus compliqués que celui-ci .

Cas des coordonnées cartésiennes .

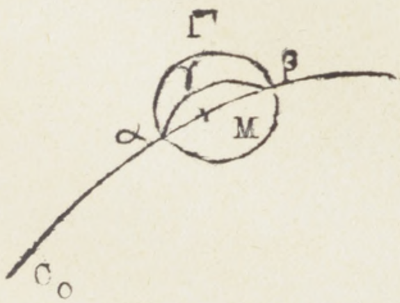
On a vu, dans la conférence précédente, que, au point de vue de la continuité et de la semi-continuité, le cas paramétrique et le cas cartésien présentent des différences notables : ces différences subsistent , pour les mêmes raisons, dans la théorie de l'extremum lié .

B) Recherche de l'extrémante .

Sachant que la courbe C_o qui réalise l'extremum absolu existe, comment la déterminer ? Si on est assuré que l'extremum absolu est en même temps relatif, et que la condition N.E. pour G est satisfaite par C_o , on appliquera tout simplement les méthodes du chapitre précédent .

L'extremum absolu ne sera pas relatif si certains points ou arcs de C_o font partie de la frontière de A , ou si C_o est, partiellement ou totalement, isolée dans la classe K.

Précisons ce dernier point : soit M un point de C_o , Γ un cercle suffisamment petit de centre M, coupant C_o en α et β : traçons dans Γ un arc quelconque γ joignant α à β : si la courbe déduite de C_o par le remplacement de $\widehat{\alpha\beta}$ par γ appartient à K quel que soit γ , M est dit d'indifférence . Si tous les points de C_o sauf peut-être ses extrémités, sont d'indifférence, C_o ne sera pas isolée dans K .



Quoi qu'il en soit, on peut établir les propriétés suivantes :

Soit α_0 un arc de C_0, minimante absolue de I_C dans $\overline{K}$, dont tous les points, sauf peut-être ses extrémités, sont intérieurs à A et d'indifférence :

a) α_0 est une extrémale de G ou de $F + \lambda G$, pour $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ (dans le second cas, la valeur λ_0 est unique et indépendante de l'arc α_0 considéré sur C_0).

b) si α_0 est de classe 1, on a sur α_0 : $H_1 \geqq 0$

c) si α_0 est de classe 1, on a sur α_0 :

$$E(x_0, y_0; \cos\theta_0, \sin\theta_0; \cos\theta, \sin\theta; \lambda_0) \geqq 0$$

C) Loi de réciprocité .

La loi de réciprocité peut être formulée également pour l'extremum absolu; parmi les divers énoncés - non exactement équivalents- qu'on peut en fournir, indiquons le suivant à titre d'exemple :

S'il y a toujours une minimante (maximante) de I_C dans $\overline{K}$ pourvu que $\overline{K}$ ne soit pas vide, si le minimum (maximum) de I_C dans $\overline{K}$ est une fonction croissante (par exemple) de la valeur de J_C dans $\overline{K}$, toute courbe C_0 minimante (maximante) pour I_C dans $\overline{K}$ est maximante (minimante) pour J_C dans la sous-classe des C pour lesquelles $I_C = I_{C_0}$.

IV.- METHODE DIRECTE de M. BONNESEN

pour le problème isopérimétrique proprement dit.

On se place ici au point de vue strictement géométrique. Etant donnée une courbe C fermée, de longueur L, limitant une aire S, on montre que l'on a :

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

l'égalité n'étant valable que pour le cercle ; ce qui établit bien la propriété maximante du cercle.

$\frac{L^2}{4\pi}$ est dit le déficit isopérimétrique de C.

1°) On montre qu'on peut se borner à considérer les courbes C convexes ; si C n'est pas convexe, son enveloppante (plus petite figure convexe contenant C) a une longueur $L' \leq L$ et enferme une aire $S' \geq S$, de sorte que le déficit de C est au moins égal à celui de son enveloppante et si ce dernier est positif, il en sera de même de celui de C.

2°) r désignant le rayon du cercle inscrit dans C (plus grand cercle contenu dans C), on établit que :

$$r L - S \geq \pi r^2$$

ou :
$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \left(\frac{L}{2\pi} - r\right)^2$$

On établit d'abord la propriété pour un polygone ; puis on fait tendre le polygone vers C .
(on peut raisonner aussi sur le cercle circonscrit) .

3°) On prouve que, sauf pour le cercle :

$$\frac{L}{2\pi} > r$$

V.- BIBLIOGRAPHIE

1°) BOLZA Lectures on the Calculus of Variations
(exposé simple , mais non à jour, spécialement pour la condition suffisante de Weierstrass)
(Chicago, 1904)

2°) TONELLI Fondamenti di Calcolo delle Variazioni .
(Bologne , Zanichelli, tomes I,1921 et II,1923)

3°) BONNESEN Les problèmes des isopérimètres .
(Paris, Gauthier-Villars, 1929) .
