SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

CHARLES PISOT

Méthodes directes du calcul des variations

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 6 (1938-1939), exp. n° 3, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1938-1939__6__A3_0>

3

VI. - 3.

CERCLE MATHEMATIQUE

de l'Ecole Normale Supérieure

Sixième année 1938-1939

CALCUL des VARIATIONS

Méthodes directes du calcul des variations

Exposé fait par M. Charles PISOT, le lundi 19 Décembre 1938

Exemplaire n° 6

Les résultats des conférences précédentes nous ont montré comment on pouvait trouver un minimum relatif pour une intégrale . Or les problèmes qui ont conduit au calcul des variations posent souvent la question de savoir s'il y a une fonction qui donne à l'intégrale une valeur plus petite que toute autre fonction, c'est-à-dire de savoir si l'on peut atteindre le minimum absolu . Les méthodes étudiées jusqu'à présent ne peuvent que rarement résoudre ce problème ; rappelons par exemple le cas de la plus courte distance entre deux points d'un plan. L'existence de minima relatifs n'entraine pas celle d'un minimum absolu . Considérons, par exemple, la courbe C , continue, à tangente continue, suivante: soit Γ un cercle de centre O et de rayon R . A partir d'un point P_o nous marquons des points P_1, P_2, ...,P_n,... tels que les angles $\widehat{P_n O P_{n+1}}$ soient tous égaux à $\theta . 2\pi$, θ étant un nombre irrationnel . Ensuite, autour de chaque point P_n comme centre, nous traçons l'arc de cercle limité aux cordes P_nP_{n-1} et P_nP_{n+1} , passant par les milieux de ces cordes et ayant des points extérieurs à Γ quand son centre est un point P d'indice pair, ou au contraire, n'ayant aucun point extérieur à Γ si son centre est un point P d'indice impair . Soit a le rayon commun à tous ces cercles , $(a = \frac{1}{2} P_oP_1)$. Soit alors A un point de OP_o situé du côté opposé à P_0 par rapport à O , et à une distance $AO > R+a$ et cherchons le minimum absolu d de la distance de A à la courbe C. On a nécessairement $d \geq OA - (R+a)$. D'autre part si le point P_{2n} est assez voisin du point S de Γ diamétralement opposé à P_0, la droite OP_{2n} donne un minimum relatif dont la valeur est $OP_{2n} - a$. Comme les points P_{2n} sont partout denses sur Γ , on a des minima relatifs aussi voisins que l'on veut de $OA - (R+a)$. Cependant cette valeur n'est pas atteinte pour aucune courbe issue de A . En effet, on devrait avoir un point P_{2n} en S , c'est-à-dire un angle $2n.\,\theta\,.2\pi$ devrait être égal à $(2k+1)\pi$, d'où $\theta = \dfrac{2k+1}{4n}$, ce qui ne peut avoir lieu, car θ est irrationnel . Il n'y a donc pas de minimum absolu pour la distance du point A à la courbe C .

On est donc obligé de chercher d'autres méthodes pour démontrer l'existence d'un minimum absolu pour les intégrales étudiées dans le calcul des variations. C'est là l'oeuvre , d'une part, de M.Hilbert et de ses continuateurs parmi lesquels je citerai surtout MM.Lebesgue et Tonelli, d'autre part, de M.Hadamard . Les premiers ont cherché à transposer dans le calcul fonctionnel les méthodes employées pour démontrer qu'une fonction atteint sa borne inférieure.

Les résultats obtenus sont alors de purs théorèmes d'existence. M.Hadamard a utilisé une méthode inspirée du calcul par approximations successives qui lui fournit un moyen théorique de câlculer la fonction qui donne à l'intégrale la valeur minimum absolue .

METHODE de M. HILBERT

Nous allons donner quelques idées sur la façon dont M.Hilbert a résolu le problème en prenant comme exemple une intégrale de la forme $I = \int_a^b f(x,y,y')\,dx$, f étant une fonction positive,intégrable pour toute valeur de x , y(x), y'(x) d'un certain champ D . L'ensemble des valeurs prises par I pour les fonctions du champ D a une borne inférieure J . La question qui se pose alors est de savoir si cette borne inférieure J est effectivement atteinte pour une fonction de D .

Il semble assez naturel de raisonner de la façon suivante : Puisque J est la borne inférieure de I pour une fonction de D, on peut extraire de D une suite $\mathcal{F}$ de fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$,.... telles que

$$\lim_{n=\infty} I_n = \lim_{n=\infty} \int_a^b f\left[x,y_n(x),y'_n(x)\right] dx = J .$$

Ou bien J est atteint pour une certaine fonction de $\mathcal{F}$, ou la suite $\mathcal{F}$ contient une infinité de fonctions . C'est ce dernier cas que nous devons examiner .

Le fait que $\lim_{n=\infty} I_n = J$ n'entraine nullement que les fonctions y_n correspondantes aient une limite. Considérons, par exemple, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+y'^2}$ où le champ D est l'ensemble des fonctions ayant une dérivée continue, et passant par les points $x = 0$, $y = 0$, et $x = 1$, $y = 0$. Si on prend pour famille $\mathcal{F}$ de fonctions y_n , les fonctions $y_n(x) = n \sin \pi x$, on a $I_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}}$ et $\lim_{n=\infty} I_n = 0 = J$, quoique $y_n(x)$ ne tende vers aucune limite dans D . On peut même supposer les fonctions $y_n(x)$ bornées, par exemple soit $\mathcal{F}$ la famille $y_n(x) = h \sin \pi n x$, où h est constant, on a encore $I_n = \frac{1}{\sqrt{1+h^2n^2\pi^2}}$ et $\lim_{n=\infty} I_n = 0$. Ces fonctions quoique bornées dans leur ensemble n'ont pas de fonction limite .

Une condition assez naturelle à imposer à l'ensemble D, c'est la propriété que toute famille de fonctions de D ait au moins une fonction limite, on dit alors que la famille D est compacte . Mais cela encore ne suffit pas , car il peut très bien se faire que la fonction limite n'appartienne plus à la famille D . Il est inutile d'en donner des exemples particuliers, nous n'avons qu'à rappeler que par exemple les fonctions limites de fonctions continues peuvent être discontinues . Si la fonction limite appartient à D, on dit que D est compact en soi .

Compacité.

Une première partie du problème se rapporte donc uniquement aux champs de fonctions D et consiste dans la recherche de champs compacts en soi . M.Lebesgue, à la suite de M.Ascoli, a montré que tout ensemble de fonctions bornées , également continues, est compact en soi . Je rappelle qu'également continu veut dire que $|y(x) - y'(x)|$ peut être rendu inférieur à un quantité δ tendant vers 0 avec $|x - x'|$ et indépendante de la fonction y particulière choisie dans D . La démonstration en a été esquissée par M.Hilbert et détaillée par M.Lebesgue . Ces auteurs considèrent dans l'intervalle de variation (a,b) de x une suite dénombrable $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ de points partout denses . La famille D étant bornée, l'ensemble des valeurs des fonctions de D pour $x=x_1$ est borné et a, par suite, au moins un point d'accumulation α_1 . On peut donc extraire de D une suite infinie D_1 : $y_{1,1}(x)$, $y_{1,2}(x)$, ... , .. $y_{1,n}(x)$,.... telle que pour $x = x_1$, l'on ait : $|y_{1,n}(x_1) - \alpha_1| \leq \frac{1}{n}$. De même , de D_1 on peut extraire une nouvelle suite indéfinie D_2, convergeant vers un point α_2 pour $x = x_2$, de sorte que $|y_{2,n}(x_2) - \alpha_2| \leq \frac{1}{n}$. Cette suite étant extraite de D_1 , on a nécessairement : $y_{2,n}(x) = y_{1,m}(x)$ avec $m \geq n$, donc $|y_{2,n}(x_1) - \alpha_1| \leq \frac{1}{n}$

De proche en proche , on forme ainsi des suites D_1, D_2, ... , D_i , ... telles que $|y_{i,n}(x_j) - \alpha_j| \leq \frac{1}{n}$ pour $j = 1,2,...,i,...$

Désignons alors par $\mathcal{F}$ la suite diagonale $y_1(x) = y_{1,1}(x)$,...., $y_n(x) = y_{n,n}(x)$, ... Cette suite converge pour toutes les valeurs x_1, x_2,...., x_i,.... de l'ensemble dénombrable vers des valeurs α_1, α_2,...., α_i...

Ce dernier ensemble est un ensemble continu . En effet on a :

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leq |\alpha_i - y_n(x_i)| + |y_n(x_i) - y_n(x_j)| + |y_n(x_j) - \alpha_j|$$
$$\leq \frac{2}{n} + \delta$$

dès que n dépasse i et j , étant la quantité indépendante de n intervenant dans la définition de l'égale continuité . Comme n peut être pris aussi grand que l'on veut et que δ est indépendant de n , on a $|\alpha_i - \alpha_j| \leq \delta$, ce qui démontre la proposition . Il existe donc une fonction continue $y(x)$ prenant pour $x = x_1, \ldots, x_i, \ldots$ les valeurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots$ et δ en est encore le module de continuité. La famille D est donc compacte en soi .

Il en est en particulier ainsi si les fonctions y de D vérifient une condition de Lipchitz de la forme $|y(x+h) - y(x)| \leq M h$, M étant un nombre fixe, le même pour tout le champ D .

Tous ces raisonnements s'appliquent au cas où au lieu d'une fonction $y(x)$, on a un système d'un nombre fini de fonctions d'un nombre fini de variables . En particulier, prenons pour D une famille de courbes C rectifiables de longueur bornée par un nombre L indépendant de C. Soit s l'arc de l'une des courbes C , ℓ sa longueur, prenons alors $t = \frac{s}{\ell}$ pour paramètre . C sera alors décrite en entier si t décrit le segment $[0, 1]$. Les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ forment alors une famille de fonctions également continues . En effet, la corde ne dépasse pas l'arc, donc :

$$(1) \quad \left[x(t+h)-x(t)\right]^2 + \left[y(t+h)-y(t)\right]^2 + \left[z(t+h)-z(t)\right]^2 \leq h^2\ell^2 \leq h^2L^2$$

par suite chacun des crochets ne dépasse pas en valeur absolue le nombre L h . Toute famille de courbes rectifiables de longueur bornée, variant dans un champ borné, a donc au moins une courbe limite et cette courbe limite vérifie une inégalité de la forme (1) . Cette inégalité exprime que la longueur d'une ligne polygonale arbitraire inscrite dans la courbe limite est bornée supérieurement par le nombre L . La courbe est donc rectifiable et appartient au champ D . Le champ D est par suite compact en soi

<u>Semi-Continuité</u> .

Il est évident que cette condition de compacité en soi n'est pas suffisante pour affirmer l'existence du minimum . En effet, il peut bien se faire que l'intégrale prise pour la fonction limite ne soit pas égale à la limite des valeurs des intégrales . Ainsi, si nous reprenons l'exemple $\int_0^1 \frac{dx}{1+y'^2}$ et si nous prenons la famille $y_n(x) = \frac{h}{\pi n} \sin \pi n x$, cette famille est également continue car $|y'_n(x)| = |h \cos \pi n x| \leq h$ et elle a pour limite la fonction $y(x) \equiv 0$. Or $I_n = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}$ et pour $y(x) \equiv 0$ on a $I = 1$.

Or si nous considérons l'intégrale $\int_C ds$, la première qui se soit présentée dans le calcul des variations, on voit que si C est une courbe rectifiable donnée, sa longueur ℓ est la borne inférieure des longueurs des courbes rectifiables tendant vers C . De façon plus précise, $\varepsilon > 0$ étant donné à l'avance , on peut trouver un nombre η assez petit pour que toute courbe rectifiable C' dont la distance de chaque point à C est inférieure à η ait une longueur $\ell' \geq \ell - \varepsilon$. En effet, il en est ainsi pour des lignes polygonales, et on en déduit le théorème pour toute courbe rectifiable . On exprime ce fait en disant que la longueur d'une courbe est une fonction semi-continue inférieurement .

Il est alors facile de démontrer que cette dernière condition est suffisante pour démontrer l'existence d'une fonction donnant à l'intégrale sa valeur minimum . En effet, supposons que si y(x) et $y_n(x)$ sont deux fonctions du champ D compact en soi et si

$$I = \int_a^b f\left[x, y(x), y'(x)\right] dx \quad \text{et} \quad I_n = \int_a^b f\left[x, y_n(x), y'_n(x)\right] dx$$

l'on ait $I_n \geq I - \varepsilon$ dès que $|y(x) - y_n(x)| < \eta$.
Alors, si l'on prend pour $y_n(x)$ les fonctions pour lesquelles I_n tend vers J , on pourra , en vertu de la compacité de la famille, en extraire une suite ayant une limite y(x) et l'on aura $I \leq I_n + \varepsilon$ et par suite , si n augmente indéfiniment $I \leq J$. Comme J est la borne infé-

rieure, il en résulte que $I = J$.

Nous venons de voir que la longueur d'une courbe est une fonction semi-continue inférieurement dans tout champ borné D de courbes rectifiables à longueur bornée. Si en particulier, nous prenons pour D le champ des courbes rectifiables tracées sur une surface donnée entre deux points donnés, nous avons établi l'existence d'une courbe rectifiable particulière de cette surface, de longueur minima, quand la surface donnée a des plans tangents variant continûment avec le point de contact.

Monsieur Lebesgue a montré encore que pour un champ borné D de courbes rectifiables de longueur bornée, les intégrales $\int_C f(x,y,z)\,ds$ sont semi-continues inférieurement lorsque f est une fonction continue en x, y, z, positive, $\geq k > 0$. En effet, soit C_n une courbe voisine tendant vers C. Partageons C en m parties de longueur respective ℓ_i, $i=1,2,\ldots,m$, et C_n en intervalles de longueur $\ell_{n,i}$ tendant respectivement vers les intervalles ℓ_i. Alors, comme on a vu, $\ell_{n,i} \geq \ell_i - \varepsilon_{n,i}$ où $\lim_{n=\infty} \varepsilon_{n,i}=0$. Soit f_i la borne inférieure de $f(x,y,z)$ quand x, y, z se trouve sur l'arc ℓ_i de C, et $f_{n,i}$ la borne correspondante pour C_n. f étant continue on a $|f_i - f_{n,i}| < \varepsilon_n$ avec

$\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. On a :

$$I_n \geq \sum_{i=1}^{m} \ell_{n,i} f_{n,i} \geq \sum_{i=1}^{m} (\ell_i - \varepsilon_{n,i})(f_i - \varepsilon_n) \geq \sum_{i=1}^{m} \ell_i f_i - \varepsilon_{n,i} f_i - \varepsilon_n \ell_i$$

f étant continue, f_i est bornée supérieurement, de même que ℓ_i , on peut donc choisir n assez grand pour que $I_n \geq \sum\limits_{i=1}^{m} \ell_i f_i - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ étant donné d'avance . En faisant alors augmenter m indéfiniment, de façon que la plus grande des quantités ℓ_i tende vers 0 , on a $\lim\limits_{m=\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} \ell_i f_i = I$, d'où $I_n \geq I - \varepsilon$.

La méthode de M.Hilbert s'étend aussi aux intégrales doubles , et c'est là où elle a donné des résultats très importants . Mais les difficultés rencontrées sont plus grandes et on est obligé en général de connaitre déjà une solution du problème dans un cas particulier . Je rappelle ici la démonstration du principe de Dirichlet par Hilbert, qui est basée sur le fait que les fonctions harmoniques dans un cercle forment une famille compacte en soi et que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet pour un cercle .

Monsieur Lebesgue a de même utilisé la méthode de Hilbert pour démontrer qu'il existe une surface d'aire minima passant par un contour donné C , lorsque C vérifie les conditions suivantes :

1°) C est rectifiable et sa projection sur un certain plan P est convexe,

2°) L'angle avec la normale à P de tout plan coupant C en trois points, est borné inférieurement par une constante positive non nulle .

Ici aussi, M. Lebesgue s'appuie sur le fait que le problème peut être résolu lorsque le contour donné est plan .

M. Tonelli a considérablement élargi le champ des fonctions f pour lesquelles l'intégrale I est semi-continue inférieurement . Il a en même temps montré que la fonction donnant à I sa valeur minimum absolue vérifie en général l'équation d'Euler , donc est une extrémale .

METHODE de M. HADAMARD

M. Hadamard a suivi une autre voie pour démontrer l'existence d'un minimum absolu de l'intégrale $I = \int_0^a f(x,y,y')\,dx$. Considérons le cas où l'on cherche un minimum de la fonction $z = \varphi(x,y)$. En un point x_0, y_0 de cette surface, on peut déterminer la ligne de plus grande pente par la condition $\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = - d\alpha$. En résolvant ce système différentiel, on obtient des fonctions $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ prenant pour $\alpha = 0$ les valeurs x_0, y_0 et telles que si α croit, la fonction $z(\alpha) = \varphi\left[x(\alpha), y(\alpha)\right]$ décroit, car $\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]$ est négatif. Si pour $\alpha = \infty$, $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ ont des limites atteintes uniformément, il en sera ainsi pour $z(\alpha)$ et $\frac{\partial z}{\partial \alpha} \longrightarrow 0$, on voit donc que l'on aboutit à un point tel que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ ce qui en général sera un minimum de la fonction z.

Dans le problème du calcul des variations, nous n'avons plus un point initial x_0, y_0, mais une fonction. Nous allons donc chercher une fonction $y(x, \alpha)$ qui pour $\alpha = 0$ se réduise à une fonction donnée $y_0(x)$, à dérivée seconde continue, qui vérifie les conditions $y(0, \alpha) = 0$, $y(a, \alpha) = h$, quel que soit α, telle que $I(\alpha) = \int_0^a f\left[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\right] dx$ soit une fonction décroissante de α. Nous supposerons que f a des dérivées partielles finies du 2ème ordre.

Nous indiquerons par une barre la dérivation par rapport à α, ainsi $\overline{I}$ représentera $\frac{\partial I}{\partial \alpha}$. On a :

$\overline{I} = \int_0^a Q\, \overline{y}'\, dx$ où $Q = \frac{\partial f}{\partial y'} - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y} dx - h$ est l'expression obtenue par Du Bois Raymond . Pour que $\overline{I}$ soit négatif, nous déterminons $\overline{y}'$ par la condition : $\overline{y}' = -Q$. h s'obtient en écrivant que $\overline{y}(a,\alpha) = 0$, d'où

$$h = \frac{1}{a}\int_0^a \left[\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\right] dx$$

On a ainsi un système différentiel où α est la variable indépendante :

$$\overline{y}' = -Q \quad , \qquad \overline{y} = -\int_0^x Q\,dx$$

La méthode des approximations successives de M. Picard permet de démontrer que ce système a une solution $y(x,\alpha)$, $y'(x,\alpha)$ et une seule , se réduisant pour $\alpha = 0$ à $y_0(x)$, $y'_0(x)$ lorsque les conditions de Lipchitz suivantes sur f sont réalisées :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+h,y'+h') - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')\right| < M\,(|h| + |h'|)$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y'}(x,y+h,y'+h') - \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')\right| < M\,(|h| + |h'|)$$

α restant inférieur à un nombre α_0 dépendant des valeurs minima de $|y_0|$ et $|y'_0|$. En vertu de la convergence uniforme de la méthode des approximations, $y(x,\alpha)$ et $y'(x,\alpha)$ sont continues en α .

$y_0(x)$ admettant une dérivée seconde $y''_0(x)$ continue, on peut avec la même méthode déterminer une fonction continue $y^*(x,\alpha)$ se réduisant pour $\alpha = 0$ à $y''_c(x)$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$\bar{y}^* = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(-Q) = A\, y^* + \varphi(x,y,y')$$

où $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ et $\varphi(x,y,y') = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\, y'$

Une méthode analogue à celle de la variation des constantes permet de montrer que l'on a $y^*(x,\alpha) = y''(x,\alpha)$. Les fonctions $y(x,\alpha)$ ont donc des dérivées secondes continues quel que soit α .

On a ainsi établi l'existence pour $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$ de fonctions $y(x,\alpha)$ et $y'(x,\alpha)$ pour lesquelles I est une fonction décroissante de α . Pour pouvoir établir l'existence de ces fonctions quel que soit α , il faut avoir des limites supérieures de $|y(x,\alpha)|$ et $|y'(x,\alpha)|$.

Une limite supérieure de $|y(x,\alpha)|$ peut être obtenue facilement . Par exemple supposons que f vérifie les conditions : $f > 0$ et $f > k|y'|$ dès que $|y'| > k'$, k et k' étant deux constantes . Alors :

$$|y| \leq \int_0^x |y'|\, dx < \frac{1}{k}\int_0^x f\, dx + k'x < \frac{I(\alpha)}{k} + k'\alpha < \frac{I(0)}{k} + k'\alpha$$

Il est plus difficile de trouver une limite supérieure de $|y'(x,\alpha)|$. Supposons réalisées les conditions suivantes :

I. $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \geq \varepsilon > 0$ lorsque $0 \leq x \leq a$

$|y| < \dfrac{I(0)}{k} + k'a$ et y' quelconque .

(Le problème de calcul des variations correspondant est donc régulier).

II. $\dfrac{\varphi^2(x,y,y')}{f(x,y,y')}$ est borné supérieurement quand x,y,y' sont dans le champ précédent .

On détermine d'abord une limite supérieure de $J(\alpha) = \int_0^a y''^2 dx$ en partant de la relation $\bar{y}'' = Ay'' + \varphi(x,y,y')$

De la limite obtenue on peut déduire une borne supérieure de $|y'|$ lorsque f vérifie une certaine condition supplémentaire , par exemple :

III. $f(x,y,y')$ est un infiniment grand avec $|y'|$ d'ordre supérieur à $|y'|^{1+\theta}$, $\theta > 0$.

On en déduit que $y(x,\alpha)$ et $y'(x,\alpha)$ existent et sont bornés en valeur absolue pour toute valeur positive de α . Enfin $y(x,\alpha)$ tend uniformément vers une fonction $y(x,\infty)$ quand α augmente indéfiniment , quand on a encore la nouvelle condition :

IV. L'expression $B = A\,\bar{y}'^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\bar{y}'\bar{y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\bar{y}^2 \geq gA\,\bar{y}'^2$

g étant une constante positive . En effet, on a alors :

$$\bar{\bar{I}} = -2\int_0^a Q\,\bar{Q}\,dx = 2\int_0^a \bar{Q}\,\bar{y}'\,dx ,$$

et par intégration par parties :

$$\bar{\bar{I}} = 2\int_0^a B\,dx \geq 2g\int_0^a A\,\bar{y}'^2\,dx \geq -2g\,\varepsilon\,\bar{I}$$

On en tire :

$$|\bar{I}| = \left|\int_0^a \bar{y}'^2\,dx\right| < C\,e^{-2g\varepsilon\alpha}$$

et comme $\int_0^a y''^2 dx$ et $\int_0^a \bar{y}''\,dx$ restent finis, on en déduit que $|\bar{y}'|$ tend vers 0 comme $e^{-C\alpha}$. $y'(x,\alpha)$ tend donc uniformément vers une limite $\bar{y}' = -Q$, $Q=0$ pour $y(x,\infty)$, c'est-à-dire que $y(x,\infty)$ est une extrémale Γ.

Cette extrémale Γ est indépendante de la courbe initiale $y_0(x)$ choisie . En effet, si $y_1(x)$ est une autre courbe initiale , considérons la courbe $y_0 + t\,y_1$ dépendant continûment de t . L'extrémale devra aussi dépendre continûment de t , or elle joint deux points fixes , et la variation seconde étant positive, il n'y a pas d'extrémales infiniment voisines d'une extrémale donné, passant par deux points donnés . Cette extrémale Γ donne bien un minimum absolu pour I , car la courbe initiale $y_0(x)$ est arbitraire et on arrive à I_Γ en faisant décroître I .

L'existence du minimum absclu est donc démontré sous des conditions très générales, la condition I de régularité étant indispensable . Les conditions II et III peuvent être réalisées en prenant une représentation paramétrique convenable ; si elles ne sont pas réalisées; le minimum peut être obtenu par une courbe qui ne peut se mettre sous la forme $y = f(x)$, mais qui est coupée plus d'une fois par une parallèle à Oy . Enfin, la condition IV est réalisée chaque fois que a est assez petit . De façon précise, si $\lambda = \max \frac{1}{A}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\right|$, $\mu = \max \frac{1}{A}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right|$ IV est rempli dès que $1 - \frac{2\lambda a}{\pi} - \frac{\mu a^2}{\pi^2} > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

HILBERT : Uber das Dirichletsche Prinzip

J. reine u. angew. Math. T.129 (1905) p.63-67
Math. Annal. T. 59 (1904) p.161-186

LEBESGUE : Intégrale , longueur , aire

Annali di math. Série III - T.7 (1902) p.342-359

TONELLI : Rendiconti circ. math. di Palermo -
T.39 (1915) p.233
T.44 (1920) p.167

HADAMARD : Comptes rendus Acad. Sciences -
T.143 (1906 2ème sem.) p.1127-1129
Mémoires des savants étrangers T.33 (1908) N°4 chap IV
