SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

JEAN KUNTZMANN

Conditions pour le minimum

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 6 (1938-1939), exp. nº 2, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1938-1939__6__A2_0>

VI.- B.

CERCLE MATHEMATIQUE

de l'Ecole Normale Supérieure

Sixième année 1938-1939

CALCUL des VARIATIONS

Conditions pour le minimum

Exposé fait par M. Jean KUNTZMANN, le lundi 12 Décembre 1938

Exemplaire n° 6

Reprenons le problème du calcul des variations dans le cas le plus simple .

Soit à déterminer une fonction $y = \varphi(x)$ dont la courbe représentative passe par deux points donnés A et B et qui rende minimum l'intégrale $\int_A^B f(x,y,y')\,dx$

En considérant une famille de fonctions de la forme $y(x) + \alpha\,\eta(x)$, on obtient une intégrale $J(\alpha)$ et on écrit : $J'(0) = 0$, $J''(0) \geq 0$.

Moyennant des hypothèses de régularité sur f et sur y que je suppose vérifiées dans tout cet exposé, la première condition se traduit par l'équation d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\,y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\,y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

On nomme <u>extrémales</u> les courbes intégrales de cette équation. S'il y a une fonction continue à dérivée continue satisfaisant aux conditions aux limites et rendant minimum l'intégrale , c'est parmi les extrémales qu'il faut la chercher .

<u>Notion de minimum</u> .

Comme en théorie des fonctions, il faut distinguer plusieurs espèces de minimum :

1) Minimum strict ou large suivant que l'égalité est exclue ou non ,

2) Minimum absolu ou relatif suivant que l'on considère toutes les fonctions ou seulement les fonctions suffisamment voisines .

$J'(0) = 0$, $J''(0) \geq 0$, sont des conditions nécessaires pour le minimum large, relatif , dans la famille linéaire, donc a fortiori dans l'ensemble des fonctions . Les autres méthodes que j'exposerai ne nous donnent également que des conditions de minimum relatif .

Mais pour parler de minimum relatif, il faut savoir ce que l'on entend par fonctions voisines .

L'idée la plus naturelle consiste à dire que $y(x)$ et $Y(x)$ sont voisines quand $|y - Y| < \varepsilon$. Mais ceci ne suffit pas. En effet, nous avons à considérer $f(x,y,y')$. Or $|y - Y| < \varepsilon$ n'entraine nullement $|y' - Y'| < \varepsilon$, donc n'entraine nullement $|f(x,y,y') - f(x,Y,Y')| < \varepsilon$. Nous sommes ainsi amenés à définir une deuxième sorte de voisinage : $|y - Y| < \varepsilon$, $|y' - Y'| < \varepsilon$. Le premier sera dit voisinage d'ordre 0 , le second, voisinage d'ordre 1 . On pourrait définir de même un voisinage d'ordre n .

Il y aura lieu alors de définir deux sortes de minimum :

le minimum faible pour le voisinage d'ordre 1 ,

le minimum fort pour le voisinage d'ordre 0 .

Le minimum fort entraine le minimum faible . La réciproque est fausse, et par suite la distinction est justifiée .

Remarquons encore que $J'(0) = 0$, $J''(0) \geq 0$ est une condition nécessaire pour le minimum faible puisque pour α assez petit $|y + \alpha\,\eta - y| < \varepsilon$, $|y' + \alpha\,\eta' - y'| < \varepsilon$.

Position du problème .

Revenons à l'équation différentielle des extrémales . Pour avoir une solution satisfaisante du problème du calcul des variations, il reste à répondre aux questions suivantes :

1) Existe-t-il des extrémales satisfaisant aux conditions aux limites ,

2) Reconnaitre si un arc d'extrémale donné fournit un minimum relatif pour l'intégrale parmi les courbes assujetties aux conditions aux limites (Ceci pour les diverses sortes de minimum) .

3) S'il y a des extrémales satisfaisant aux conditions aux limites, fournissent-elles un minimum ? (relatif) .

C'est surtout le second problème qui a intéressé les mathématiciens comme Legendre ou Euler . Mais dans la théorie qui nous occupe, les progrès de la solution du problème 2 ont coincidé avec une meilleure utilisation des résultats du problème 1 , ce qui montre que les préoccupations modernes relatives aux théorèmes d'existence ne sont pas purement artificielles .

La variation seconde

Si on voulait suivre l'ordre historique, il faudrait d'abord exposer comment Legendre et Jacobi transforment la condition $J''(0) \geq 0$. Mais on a vu dans l'exposé précédent un exemple où $J''(0)$ était positif et où il n'y avait cependant pas minimum (même faible) . A vrai dire, cela tenait à des circonstances assez particulières ; en fait la condition $J''(0) \geq 0$ est suffisante pour qu'il y ait minimum faible, dès qu'est remplie la condition auxiliaire $f''_{y'^2} \neq 0$.

Par contre, elle n'est pas suffisante pour assurer le minimum fort . On arrivera ainsi facilement à former des exemples où il y ait minimum faible , mais non minimum fort . Le plus connu est $f = y'^2 + y'^3$.

D'autre part, comme le fait remarquer M.Hadamard, la condition $J''(0) \geq 0$ revient à montrer que la courbe $\eta = 0$ fournit un minimum de l'intégrale

$$J'' = \int \left(f''_{y^2} \eta^2 + 2 f''_{yy'} \eta \eta' + f''_{y'^2} \eta'^2 \right) dx$$

où les f'' sont des fonctions de x seul , et les méthodes de Legendre et de Jacobi sont au fond équivalentes aux méthodes de Weierstrass pour l'intégrale générale $\int f(x,y,y')\,dx$

Pour ces deux raisons, j'exposerai les résultats de Legendre et de Jacobi que dans la mesure où ils prennent place dans la théorie de Weierstrass .

Cette manière de faire a encore un autre avantage: elle permet de traiter à la fois le cas des extrémités fixes et le cas où une extrémité est variable sur une courbe donnée.

LE PREMIER PROBLEME

Avant d'examiner le cas général, nous allons traiter un exemple :

Soit $\int \sqrt{y(x'^2 + y'^2)}\, dt$ ou $\int \sqrt{y(1+y'^2)}\, dx$

Les extrémales dont les paraboles de directrice Ox , il y a seulement à considérer les points pour lesquels $y \geq 0$.

Proposons-nous de construire les paraboles passant par A et B (fig.1, page 30) . Le foyer est à l'intersection des cercles de centre A et B tangents à Ox . Le lieu des points pour lesquels il y a deux solutions confondues est la parabole de foyer A et de tangente au sommet l'axe des x , qui est l'enveloppe de la famille . Si B est intérieur à cette parabole, il y a deux solutions . Si B est extérieur pas de solution . Si B est sur la parabole, une solution double .

Soit maintenant le cas général. Nous devons nous contenter d'étudier les extrémales voisines d'une extrémale donnée.

L'équation différentielle d'une extrémale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

s'étudiera par les méthodes classiques si le coefficient de y'', $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ est $\neq 0$. Nous avons d'ailleurs seulement besoin de supposer $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \neq 0$ sur l'arc. On dira alors que l'arc est régulier.

La condition de transversalité est résoluble en y' au voisinage de toute transversale, sauf dans le cas (que nous écartons complètement) où la direction transversale serait la tangente. En dehors de ce cas, on peut représenter les extrémales passant par un point ou transversales à une courbe et voisine d'une extrémale donnée, par $y = g(x, \lambda)$ g étant une fonction continue et dérivable des deux variables x et λ, en vertu de la théorie des équations différentielles puisqu'on a des conditions initiales pour x, y, y', fonctions continues et dérivables d'un paramètre.
Si, de plus, on pose $\xi(x) = g'_\lambda(x, 0)$, $\xi(x)$ satisfait à l'équation obtenue en dérivant l'équation des extrémales par rapport à λ.

$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$, c'est l'équation aux variations de l'équation d'Euler ; on l'appelle souvent équation de Jacobi . C'est elle que Jacobi utilise pour transformer $J''(0)$. Il obtient

$$J''(0) = \int f''_{g'^2}\left(\frac{u\eta' - u'\eta}{u^2}\right)^2 dx$$

u étant une solution quelconque de l'équation de Jacobi .

Dans ce qui va suivre, nous utiliserons seulement le fait que y est une fonction de x et de λ , $y = g(x, \lambda)$ continue , à dérivées continues . Nous pouvons donc élargir un peu nos hypothèses et admettre , par exemple, les conditions suivantes :

1) A chacune des conditions aux limites correspond une famille d'extrémales , $y = g(x,\lambda)$, continue , à dérivées continues , se réduisant pour $\lambda = 0$ à l'extrémale de base .

2) $g'(x,0)$, non identiquement nul .

3) $f''_{y'^2}$ n'est nul sur aucun segment de l'extrémale de base .

Ces conditions seront certainement remplies si l'arc est régulier .

La généralisation ainsi obtenue est d'ailleurs plus ou moins illusoire puisqu'on suppose, d'une part, que l'équation a un point singulier, d'autre part, que les solutions sont régulières . Ce n'est pourtant pas impossible , comme le montre l'exemple $\int (x^2 + y^2)\, y'^2\, dx$.

Faire passer une courbe de la famille par un point revient à résoudre en λ , l'équation $y_1 = g(x_1, \lambda)$. D'après la théorie des fonctions implicites , il y a une solution et une seule voisine de 0 pour x et y voisins d'un point x_1 , y_1 , $y_1 = g(x_1, 0)$, où g'_λ n'est pas nul . Il en résulte l'existence d'une petite bande entourant tout arc de courbe où $g'(x,0) \neq 0$, et par chaque point de laquelle passe une extrémale et une seule .

Si les extrémales ont un point fixe A , g'_λ est nul en ce point, mais $\dfrac{g'_\lambda}{x - x_1} \neq 0$.
Les points autres que A où $g'_\lambda(x,0) = 0$ s'interprétent facilement, ce sont les points de contact de l'extrémale de départ avec l'enveloppe des extrémales de la famille . Le premier de ces points, à partir de A, s'appelle le foyer de l'extrémale dans la famille considérée .

Théorème de JACOBI .

On doit à Jacobi le théorème très important suivant:
Si l'arc AB contient un foyer de la famille d'extrémales assujetties à l'une des conditions aux limites , cet arc ne fournit certainement plus un extremum parmi les courbes assujetties aux conditions aux limites .

Voyons d'abord sur un exemple la signification de ce théorème .

Considérons $f(x,y,y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Les extrémales sont les droites qui donnent un minimum à l'intégrale, et la transversalité s'exprime par l'orthogonalité . Considérons les extrémales transversales à une courbe , par exemple, à une ellipse . Leur enveloppe est la développée de l'ellipse (Fig.2 ,page 26) .

On a $BD + DC = BA$. D'où $BC < AB$ quel que soit C voisin de A , mais à droite; a fortiori, pour un point situé au delà de B .

Nous vérifions dans ce cas le théorème de Jacobi.

Les démonstrations du théorème de Jacobi sont diverses . On formera, par exemple, une courbe variée avec deux morceaux d'extrémale, l'un transversal à C (ou passant par A) l'autre passant par B . On peut s'arranger pour que cette courbe donne à l'intégrale une plus petite valeur que l'extrémale (dans le cas du minimum) . On a une courbe brisée, mais on peut supprimer le point anguleux en changeant très peu l'intégrale .

On peut aussi, comme le fait Kneser, développer la théorie des enveloppes et généraliser le théorème sur l'arc de la développée .

L'exemple de l'ellipse nous permet également de voir ce qu'il se passe si B est au foyer . En général, il n'y a déjà plus minimum relatif comme nous l'avons vu (point ordinaire) . Par contre, en E (foyer en pointe) il y a encore minimum relatif ; il n'y a plus minimum relatif en F (foyer en talon) . Un autre cas est celui où l'enveloppe est réduite à un point. C'est ce qui se serait produit si on avait pris un cercle . Il y a encore minimum relatif si B est au centre, et toutes les extrémales donnent la même valeur à l'intégrale .

Nous désignons par : condition de Jacobi stricte, condition de Jacobi large, les deux conditions :

J_s Pas de foyer même en B

J_ℓ Pas de foyer entre A et B .

La condition J_ℓ est nécessaire pour qu'il y ait extremum .

Pour continuer, nous allons supposer remplie la condition J_s .

Il existe alors une petite région R entourant l'arc AB ,(extrémités comprises) et une famille d'extrémales comprenant l'arc AB, et telle qu'il passe une extrémale et une seule de la famille par tout point de la petite région. C'est évident, sauf en ce qui concerne l'extrémité A dans le cas des extrémales issues de A . Mais en prenant les extrémales issues d'un point situé sur le prolongement de l'arc et assez voisin de A pour que son foyer soit au delà de B, la difficulté disparait, tout au moins dans le cas régulier. Si la condition indiquée plus haut est remplie, Weierstrass dit qu'on a un champ, et Monsieur Hadamard, un faisceau régulier .

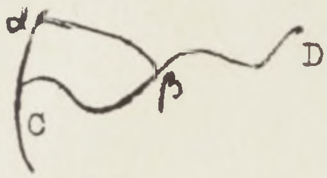
On désigne par u(x,y) la pente au point (x,y) de l'extrémale du champ qui passe en ce point, et par l'indice 0 , ce qui est relatif à l'extrémale primitive (qui ne joue aucun rôle particulier dans le faisceau).

Exemple de la parabole . - Le foyer conjugué de A pour la famille des paraboles issues de A est le contact avec la parabole enveloppe . Ce point est situé sur la corde focale de A . Donc la parabole dont le foyer est situé en dessous de AB ne convient jamais .

LE DEUXIEME PROBLEME

Méthode de WEIERSTRASS .

Jusqu'ici nous avions comparé une extrémale fixe à une famille de courbes variables . L'idée de la méthode de Weierstrass est de comparer une courbe fixe aux extrémales d'un champ .



Soit une courbe CD et une extrémale du champ $\alpha\ \beta$. On a appris à évaluer la variation de l'intégrale relative à l'arc $\alpha\ \beta$

$$\delta J = \left[\left[f(x,y,y') - y' f'_{y'}(x,y,y')\right] \delta x + f'_{y'}(x,y,y')\ \delta y\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$+ \int_{\alpha}^{\beta} \delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$$

l'intégrale est nulle .

On peut rendre le terme tout intégré relatif à nul en prenant la courbe C transversale au faisceau . δJ dépend seulement du déplacement de β , ou encore on peut exprimer la valeur de l'intégrale le long d'un arc $\alpha\beta$ par une intégrale prise le long de la courbe L, lieu de β .

Plus précisément

$$J_L - J_{\Gamma} = \int_L E(x,y,u,y')\ dx$$

où

$$E = f(x,y,y') - f(x,y,u) - (y'-u)\ f'_u\ (x,y,u)$$

<u>Conditions pour le minimum faible large</u> .

Conditions suffisantes :

1) J_s

2) $E\ (x,y,u,y') \geqq 0$ $\quad$ y, y' voisins de y_0, y'_0 (u est toujours voisin de y'_0)

On peut transformer cette condition en écrivant

$$E(x,y,u,y') = \frac{(y'-u)^2}{2\,!} \quad f''_{y'^2}\left[x,y,u+\theta(y'-u)\right]$$

Nous appellerons conditions de Legendre large ou stricte , les conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} L_\ell & f''_{y'^2} \geqq 0 \\ L_s & f''_{y'^2} > 0 \end{array}\right\} \text{ pour } y' \text{ voisin de } y'_0$$

Les conditions J_s et L_ℓ (dans R) constituent donc un système de conditions suffisantes . D'autre part, L_ℓ sur l'extrémale, et pour $y' = y'_0$, est une condition nécessaire , car $f''_{y'^2} < 0$ en un point entraine $f''_{y'^2} < 0$ dans une petite région , ce qui est une condition suffisante pour qu'il y ait maximum dans cette région .

Dans le cas régulier, il faut remplacer L_ℓ sur l'extrémale (et pour $y' = y'_0$) par L_s qui entraine L_s dans une région R .

En résumé :

Minimum faible

Néc.	Suf.
J_ℓ L_ℓ extrémale	J_s L_ℓ région

Cas régulier

Néc.	Suf.
J_ℓ L_s extrémale	J_s L_s extrémale

Remarquons qu'un arc régulier satisfaisant à la condition de Jacobi stricte donne toujours un maximum ou un minimum . Remarquons que cet extremum est toujours strict.

Conditions pour le minimum fort large .

Conditions suffisantes :

1) J_s

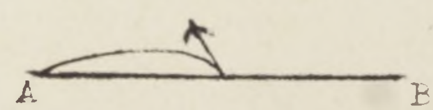
2) $E(x,y,u,y') \geq 0$ pour y voisin de y_0 et y' quelconque .

On peut encore écrire $f''_{y'^2}(x,y,y') \geq 0$ pour y voisin de y_0 , y' quelconque .

Cette nouvelle condition entraine la première, mais a l'inconvénient de ne pas lui être équivalente . Elle a l'avantage de ne pas contenir u . Nous appellerons conditions de Weierstrass large, stricte, les conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} W_\ell & \dfrac{E(x,y,u,y')}{(y'-u)^2} \geq 0 \\ W_s & \dfrac{E(x,y,u,y')}{(y'-u)^2} > 0 \end{array}\right\} \text{ pour } y' \text{ quelconque}$$

On montre que la condition W_ℓ sur l'extrémale (pour y' quelconque) est nécessaire , en prenant une courbe variée de la forme indiquée :



En résumé :

Minimum fort

Néc.	Suff.
J_ℓ W_ℓ (extrémale)	J_s W_ℓ région

On peut passer de la condition W sur l'extrémale à la condition W dans la région, sous les deux conditions suivantes :

1) la condition est remplie d'une manière stricte .
2) $|y'| < M$ pour toutes les courbes variées .

Mais alors, on n'a plus à proprement parlé minimum fort .

Le troisième problème .

On peut remarquer que si les conditions qui interviennent (tout au moins les conditions suffisantes) sont remplies pour l'extrémale de base, elles sont également remplies pour les extrémales du champ suffisamment voisines . En modifiant un peu la présentation, on pourrait obtenir des résultats sur la famille à deux paramètres des extrémales voisines d'une extrémale donnée .

AUTRES PROBLEMES DE CALCUL DES VARIATIONS

J'indiquerai rapidement comment se présente le cas paramètrique et le cas de deux fonctions inconnues .

Cas paramétrique.

On introduit une fonction $\mathcal{E}(x,y,X',Y',x',y') = f(x,y,X',Y') - x'f'_{x'} - y'f'_{y'} = \mathcal{E}(x,y,\cos\Theta,\sin\Theta,\cos\theta,\sin\theta)$ si on prend pour paramètre l'arc .

Occupons-nous du minimum fort .

On trouve :

$\mathcal{E} \geq 0$ au voisinage de la courbe suffisant , θ quelconque

$\mathcal{E} \geq 0$ sur la courbe , nécessaire . θ quelconque .

$\mathcal{E} > 0$ sur la courbe entraine $\mathcal{E} \geq 0$ au voisinage, θ quelconque .

En effet, il ne se présente plus la même difficulté pour le cas non paramétrique .

Remarquons que si f est une fonction homogène de x',y', et non plus seulement positivement homogène, $\mathcal{E}(x',y') > 0$ entraine $\mathcal{E}(-x',-y') < 0$, si bien qu'il ne saurait y avoir maximum que dans le cas exceptionnel où $\mathcal{E}$ serait nul sur l'extrémale quels que soient x',y' . On voit facilement que c'est le cas où il n'y a qu'un nombre fini d'extrémales.

Cas de deux fonctions inconnues.

Il se présente deux différences principales . D'abord un champ ne présente pas toujours de surface transversale . Par exemple, une congruence de droites n'est pas toujours une congruence de normales . Mais il y a en général un champ transversal à une surface donnée, et cela nous suffit. D'autre part, $f''_{y'^2}$ va être remplacé par une forme quadratique $f''_{y'^2}\, u^2 + 2\, f''_{y'z'}\, u\, v + f''_{z'^2}\, v^2 = 0$

Or, on a les résultats suivants sur les formes quadratiques:

1) si

$$\begin{vmatrix} f''_{y'^2} & f''_{y'z'} \\ f''_{y'z'} & f''_{z'^2} \end{vmatrix} = 0$$

la forme est un carré parfait multiplié par un coefficient

2) si

$$\begin{vmatrix} f''_{y'^2} & f''_{y'z'} \\ f''_{y'z'} & f''_{z'^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

(et c'est cela qui remplace la condition $f''_{y'^2} \neq 0$) la forme se laisse mettre sous une et une seule des trois formes

$$A^2 + B^2 \quad , \; - A^2 - B^2 \quad . \qquad A^2 - B^2$$

Le premier cas correspond au minimum , le second au maximum. Le troisième n'a pas d'équivalent dans le cas d'une seule variable . C'est quelque chose d'analogue à un col dans la théorie des maxima ordinaires . Les recherches de M.Morse portent justement non seulement sur les maxima et les minima , mais aussi sur ces autres catégories d'extrémales .

Le minimum absolu .

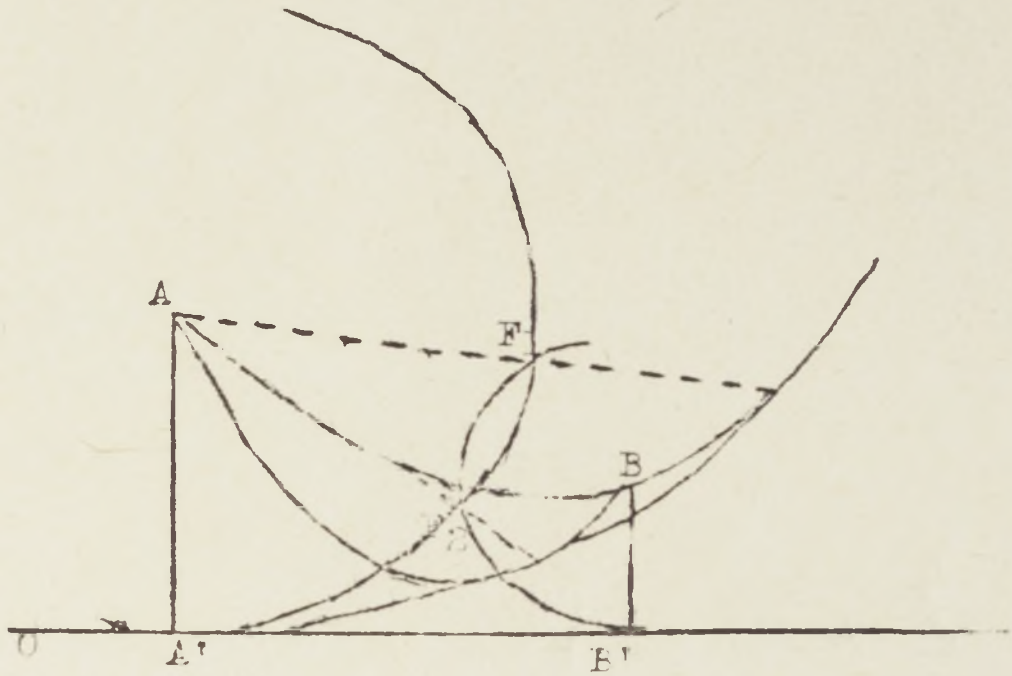
Avec ce nouveau problème nous abordons des questions de calcul des variations global . Nous allons examiner seulement les exemples suivants :

Cas de la distance . - Les conditions suffisantes de Weierstrass supposent l'existence d'un champ . Un champ n'est pas forcément réduit à une région infiniment petite entourant l'arc de départ . Par exemple, les droites $y = C$ transforment le plan tout entier en un champ, et comme E est ≥ 0 dans tout le champ, on est certain que le segment AB est plus court chemin de A à B .

Ellipse et ses normales . - Le minimum absolu est fourni par un segment, donc par une des normales . D'un point de l'ellipse, on peut mener 2, 3 ou 4 normales à l'ellipse. Laquelle de ces normales est la plus courte . Cette normale cesse d'être la plus courte lorsqu'on traverse le lieu des normales égales, c'est-à-dire les axes de la ecnique. La plus petite normale est donc celle dont le pied est dans le même quadrant que le point dont elle est issue. On voit que le minimum absolu cesse avant le minimum relatif .

Parabole. - $f''_{y'^2}$ étant positif pour $y > 0$, il y a certainement minimum fort . Les paraboles issues de A et limitées à l'enveloppe forment un champ . Comme $f''_{y'^2}$ et par suite E sont positifs dans ce champ, on voit que toute ligne AB tracée dans ce champ donnera une plus grande valeur à l'intégrale que l'extrémale AB . Si, au contraire, la courbe sort du champ, on démontre que le contour AA'B'B donne à l'intégrale une valeur plus petite que la courbe. Il restera alors à comparer ces deux contours ; le deuxième présente des points anguleux, des points où $f''_{y'^2}$ est nul, enfin un arc qui n'est pas un arc d'extrémale, mais un arc de frontière . Ce phénomène se présente également si on recherche le minimum d'une fonction ; il peut être obtenu en un point frontière .

Fig.1



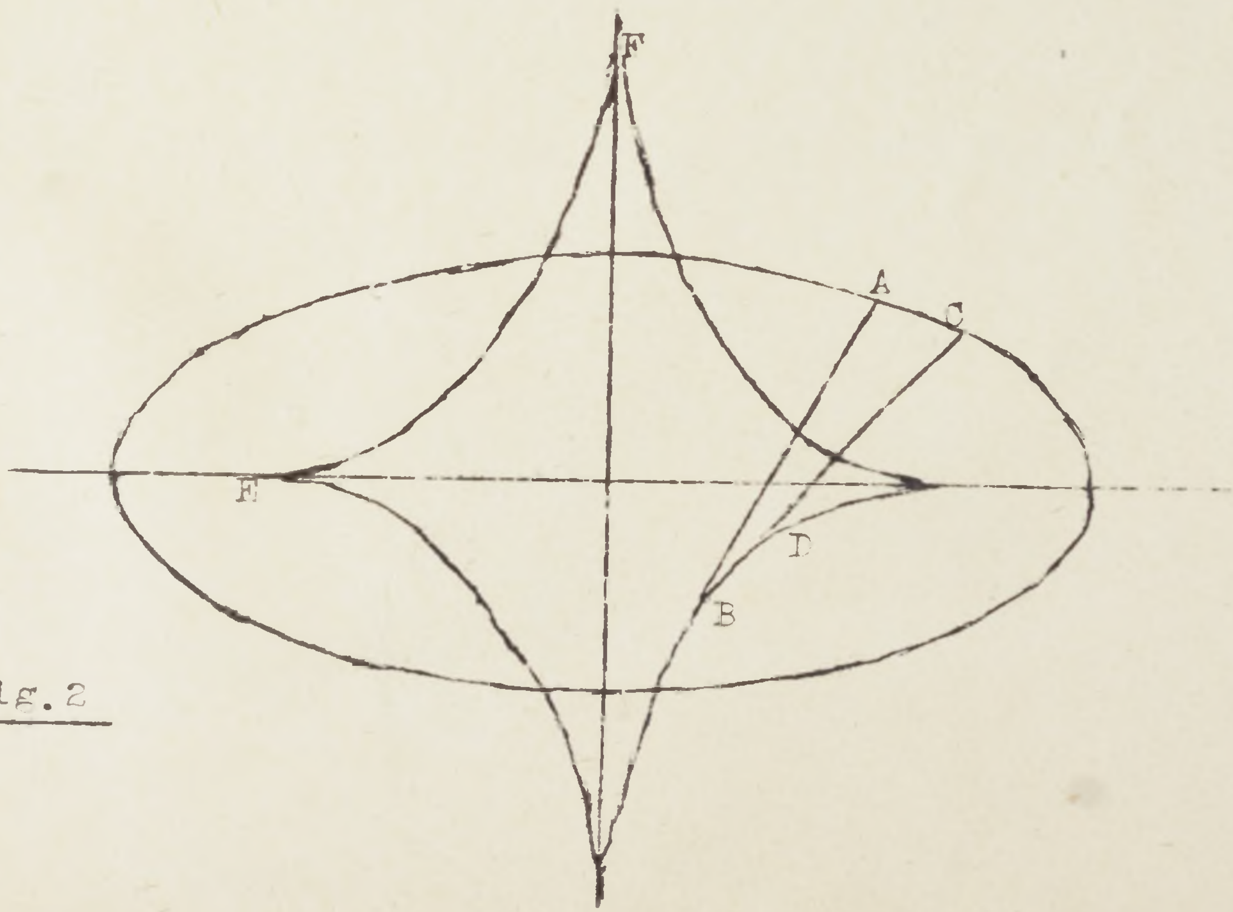


Fig.2