Séminaire de Mathématiques

C. Ehresmann

Les groupes de Lie à r paramètres

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. nº 5, p. 1-61
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A5_0>

IV. - E et F .

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-37

Les travaux de M. Elie CARTAN

Les GROUPES de LIE à r PARAMETRES

Exposés faits par M. EHRESMANN
les lundis 25 Janvier et 15 Février 1937

Exemplaire n° 3

Je me propose d'exposer les théorèmes généraux de la théorie des groupes de Lie à r paramètres , c'est-à-dire des groupes continus finis dans la terminologie de Lie . La plus grande partie de mon exposé est donc consacrée aux trois théorèmes fondamentaux de Lie et aux propriétés qui s'y rattachent . A la théorie classique de Lie j'ajouterai des résultats très importants qui sont principalement dus à M. Cartan . Comme la notion de groupe de Lie est assez complexe, je rappellerai d'abord un certain nombre de définitions ; par enrichissement de la notion primitive de groupe nous arriverons à la notion de groupe de Lie . Ces préliminaires me permettront aussi d'introduire les notations employées par la suite . Les chiffres romains entre parenthèses renvoient à l'index bibliographique .

DEFINITIONS

Groupe de transformations .

Soient x, x', ... les éléments ou points d'un ensemble E et soit G un ensemble de transformations ponctuelles biunivoque de E en lui-même . Les transformations de G étant désignées par s, t, s', t', ..., l'équation de la transformation s peut s'écrire symboliquement

$$x' = s\,x$$

On passe de x' à x par une transformation dite <u>transformation inverse</u> dont l'équation sera écrite sous la forme :

$$x = s^{-1}\,x'$$

L'équation

$$x' = s'(sx)$$

définit une transformation appelée <u>produit</u> des transformations s et s' . On dit que l'ensemble de transformations G forme un <u>groupe</u> lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes :

a) l'ensemble G contient le produit de deux transformations quelconques de G

$$(1) \qquad x' = s'(sx) = s''\,x \quad , \qquad s, s', s'' \subset G$$

b) G contient la transformation inverse d'une transformation quelconque de G :

$$x = s^{-1}x' = s'\,x' \quad , \qquad s, s' \subset G$$

Il résulte de ces deux axiomes que G contient la transformation identique , qui sera désignée par i :

$$x = i\,x$$

Groupe abstrait .

L'équation (1) définit dans l'ensemble G une loi de composition qui fait correspondre au couple ordonné (s,s') de deux éléments s et s' un élément s'' appelé produit. On écrit $s'' = s' s$. Cette loi de composition satisfait aux axiomes suivants :

a) associativité :

$$s''(s's) = (s''s')s$$

b) Il existe un élément i , appelé élément unité, tel que

$$s = i s = s i$$

c) A chaque élément s correspond un élément s^{-1} de G tel que

$$s^{-1}s = s s^{-1} = i .$$

On peut énoncer ces axiomes sans supposer que les éléments de G soient des transformations . Tout ensemble d'éléments dans lequel est définie une loi de composition satisfaisant aux axiomes précédents est appelé groupe abstrait .

A tout groupe de transformations correspond un groupe abstrait . Réciproquement, tout groupe abstrait admet une réalisation par un groupe de transformations : c'est-à-dire il existe un groupe de transformations dont les éléments sont en correspondance biunivoque avec ceux du groupe abstrait donné, cette correspondance respectant la loi de composition. Un exemple important d'une telle réalisation s'obtient de la façon suivante : La loi de composition du groupe abstrait G, écrite sous la forme

$$t' = s\,t \quad . \qquad (s,\ t,\ t' \subset G)$$

définit dans G une transformation ponctuelle biunivoque ($t \longleftrightarrow t'$) associée à un élément s donné. Cette transformation étant désignée par $\overleftarrow{s}$, on a

$$\overleftarrow{s'}\ \overleftarrow{s} = \overleftarrow{s'\,s} \quad .$$

L'ensemble des transformations $\overline{s}$ forme donc un groupe de transformations qui est bien une réalisation de G, et qu'on appelle le <u>premier groupe des paramètres</u> de G. La loi de composition écrite sous la forme

$$t' = t\,s \quad , \qquad (s,\ t,\ t' \subset G)$$

définit une transformation ponctuelle ($t \longleftrightarrow t'$) associée à s que nous désignons par $\overrightarrow{s}$. L'ensemble des transformations $\overrightarrow{s}$ forme encore un groupe. On l'appelle le <u>deuxième groupe des paramètres</u> ; mais ce n'est plus une réalisation de G, car on a : $\overrightarrow{s'}\ \overrightarrow{s} = \overrightarrow{s\,s'}$.

Groupe adjoint.

Soit $\tilde{s}$ la transformation $(t \longleftrightarrow t')$ définie dans le groupe abstrait G par

$$t' = s\, t\, s^{-1} \qquad . \qquad (s, t, t' \subset G)$$

On a : $\tilde{s}'\, \tilde{s} = \widetilde{s' s}$. L'ensemble des transformations $\tilde{s}$ forme donc un groupe qu'on appelle le groupe adjoint de G . Lorsque s est échangeable avec tout élément t, la transformation $\tilde{s}$ est la transformation identique . L'ensemble des éléments s qui jouissent de cette propriété forme un sous-groupe γ appelé le centre de G . Lorsque γ se réduit à l'élément unité, le groupe adjoint est une réalisation de G. Un sous-groupe g de G est dit invariant lorsqu'il est invariant par rapport au groupe adjoint de G . Si g est un sous-groupe invariant de G, on sait qu'on peut définir un groupe-quotient désigné par G/g . Si γ est le centre de G, le groupe adjoint de G est une réalisation du groupe quotient G/γ .

Groupe topologique .

Un groupe topologique est un groupe abstrait dans lequel on a défini une topologie telle que le point $s^{-1}s'$ soit une fonction continue du couple de points (s, s') .

On en déduit que s^{-1} est une fonction continue de s et que ss' est une fonction continue du couple (s,s'). En particulier, lorsque l'espace topologique formé par G est une variété topologique à r dimensions, nous dirons que G est un <u>groupe abstrait à r paramètres</u>.

<u>Groupe de transformations continu à r paramètres</u>.

C'est un groupe de transformations G satisfaisant aux conditions suivantes :

a) les transformations de G sont définies dans une variété topologique E_n à n dimensions.

b) En appelant $\mathcal{G}$ le groupe abstrait correspondant, on a défini dans $\mathcal{G}$ une topologie qui en fait un groupe continu abstrait à r paramètres.

c) L'équation de la transformation s étant

$$x' = s\,x \quad , \qquad (x,x' \subset E_n \; ; \; s \subset \mathcal{G})$$

le point x' est une fonction continue des deux points x et s.

<u>Noyau de groupe de transformations continu à r paramètres.</u>

Souvent, on est conduit à considérer un ensemble de transformations G qui ne forme pas un groupe continu au sens précédent, mais qui satisfait aux conditions suivantes :

a) Les transformations de G sont définies dans un domaine D d'une variété topologique E_n :

$$x' = s\,x \quad . \qquad (x \subset D : x' \subset E_n : s \subset G)$$

b) Dans l'ensemble G est définie une topologie qui en fait une variété à r dimensions.

c) G contient la transformation identique : $x = 1\,x$.

d) Il existe dans G un voisinage Δ de l'élément 1 tel que, si s et s' appartiennent à Δ , on ait :

$$x' = s'(sx) = (s's)\,x$$

$(s's)$ étant un élément s'' de G, pour tout x tel que $s'(sx)$ soit défini .

e) Si s appartient à Δ , la transformation inverse de $x' = sx$ est

$$x = s^{-1}\,x' = s'x'$$

où s' est un élément de G, pour tout x tel que $sx \subset D$.

f) Le point $x' = sx$ est une fonction continue des deux points s et x .

L'ensemble de transformations G satisfaisant aux conditions précédentes est appelé noyau de groupe de transformations continu à r paramètres . Par exemple, les transformations formant un voisinage de la transformation identique dans un groupe de transformations continu à r paramètres constituent un noyau de groupe .

Noyau de groupe abstrait continu à r paramètres .

C'est un ensemble d'éléments G satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Dans l'ensemble G est définie une topologie qui en fait une variété à r dimensions .

b) Dans un voisinage Δ d'un point i de G, on a défini une loi de composition qui fait correspondre au couple de deux points (s,s') de Δ un point ss' de G.

c) Lorsque s, s', s'', $(s's)$, $(s''s')$ appartiennent à Δ on a :

$$s''(s's) = (s''s')\,s$$

d) $$s\,i = i\,s = s \quad . \qquad (s \subset \Delta)$$

e) A chaque élément s de Δ correspond un élément s^{-1} de G tel que

$$s\,s^{-1} = s^{-1}\,s = i \quad .$$

f) Le point $s^{-1}\,s'$ est une fonction continue des deux points s et s' .

Par exemple un voisinage de l'élément unité d'un groupe continu abstrait à r paramètres forme un noyau de groupe .

A tout noyau de groupe de transformations correspond un noyau de groupe abstrait. Réciproquement tout noyau de groupe abstrait admet des réalisations par des noyaux de groupe de transformations.

La notion de groupe de Lie fait intervenir des notions de géométrie différentielle en plus des notions précédentes. Je rappelle qu'une <u>variété différentiable</u> est une variété topologique V_n dans laquelle on a défini un ensemble de systèmes de coordonnées locales (système de coordonnées locales = correspondance topologique entre un domaine de V_n et un domaine de l'espace euclidien) tel que tout point de V_n figure dans l'un d'eux au moins et tel que deux systèmes de coordonnées qui sont définis dans un même domaine de V_n se correspondent par une transformation de coordonnées continûment différentiable. (Convenons de dire toujours différentiable au lieu de continuement différentiable).
Lorsque chacune de ces transformations de coordonnées locales est p fois différentiable ou analytique, la <u>variété V_n est dite p fois différentiable ou analytique</u>. Dans une variété p fois différentiable se trouvent définies les fonctions q fois différentiables, où $p \geq q$. Dans une variété analytique se trouvent définies les fonctions q fois différentiables, où q est quelconque, ainsi que les

fonctions analytiques .

Groupe abstrait différentiable .

Nous dirons qu'un groupe abstrait continu à r paramètres est p fois différentiable lorsque l'on peut choisir des systèmes de coordonnées locales avec lesquelles la variété du groupe soit p fois différentiable, le produit $s\ t$ de deux éléments s et t étant alors une fonction p fois différentiable, des deux points s et t . On définit de même la notion de groupe abstrait analytique . Pour qu'un groupe soit p fois différentiable, il faut et il suffit qu'il existe au voisinage de l'élément unité un système de coordonnées locales par rapport auquel le produit $s\ t$ soit p fois différentiable par rapport à s et t .

Groupe abstrait de Lie

C'est un groupe abstrait deux fois différentiable . Nous montrerons plus loin qu'on peut toujours introduire des coordonnées locales telles qu'un groupe abstrait de Lie soit analytique .

Groupe de transformations de Lie .

Soit G un groupe de transformations continu à r paramètres opérant dans un espace E_n . Soit $\mathcal{G}$ le groupe abstrait continu correspondant. et écrivons l'équation de la transformation s sous la forme :

$$x' = s\,x \quad , \qquad (x, x' \subset E_n \; : \; s \subset \mathcal{G}) .$$

Nous dirons que G est p fois différentiable (analytique) lorsqu'on peut choisir dans E_n et $\mathcal{G}$ des systèmes de coordonnées locales avec lesquelles ces variétés soient p fois différentiables (analytiques) , le point x' étant alors une fonction p fois différentiable (analytique) des points s et x . On dit que G est un <u>groupe de transformations de Lie</u> lorsqu'il est deux fois différentiable .

On démontre facilement le théorème suivant :

<u>Si G est un groupe de transformations p fois différentiable (analytique) , le groupe abstrait $\mathcal{G}$ correspondant est également p fois différentiable</u> (analytique).

On définit de même les notions de <u>noyau de groupe abstrait de Lie</u> et de <u>noyau de groupe de transformations de Lie</u> . Les résultats que nous indiquerons à propos des groupes de Lie sont le plus souvent valables sans modification notable dans le cas des noyaux de groupes de Lie : il sera inutile de le faire remarquer dans chaque cas .

Lie lui-même s'est borné en principe aux groupes donnés sous forme analytique . Les axiomes que nous adoptons pour définir la notion de groupe de Lie sont à peu près ceux d'un mémoire de Schur (II) . Nous démontrerons plus loin le résultat important dû à Schur que tout groupe de transformations de Lie qui est transitif peut être mis sous la forme analytique ; mais il n'en est pas toujours de même pour les groupes intransitifs .

Isomorphisme .

Un isomorphisme entre deux groupes abstraits est une correspondance biunivoque entre les éléments de l'un et ceux de l'autre , cette correspondance respectant la loi de composition . Lorsqu'il s'agit de deux groupes topologiques ou de deux groupes différentiables (analytiques), on a les notions d'isomorphisme topologique ou d'isomorphisme différentiable (analytique) en plus de l'isomorphisme ordinaire .

Similitude ou équivalence de deux groupes de transformations

Deux groupes de transformations G et G' qui opèrent respectivement dans les ensembles E et E' sont dits semblables ou équivalents lorsqu'il existe entre E et E' une correspondance biunivoque transformant G en G' . Il y a également lieu de considérer les notions d'équivalence topologique, différentiable ou analytique .

LES DEUX ESPECES D'EQUIPOLLENCE DANS UN GROUPE ABSTRAIT DIFFERENTIABLE

On sait qu'à chaque point x d'un espace différentiable est associé un espace linéaire d'origine x, appelé espace linéaire tangent. Un point quelconque de cet espace linéaire peut être représenté par $x+dx$, et dx en désigne un vecteur d'origine x. A une transformation différentiable ($x \longrightarrow y$) correspond une transformation linéaire de l'espace tangent en x dans l'espace tangent en y. Soit alors G un groupe abstrait différentiable à r paramètres et considérons le premier groupe des paramètres qui est défini par :

$$s' = t\, s \qquad , \qquad (\text{transformation } s \longleftrightarrow s')$$

A la transformation $(s \longleftrightarrow s')$, qui est différentiable, correspond une transformation linéaire entre les espaces tangents en s et en s' que nous représentons par :

$$s' + ds' = t(s + ds) \; , \qquad (\text{transformation } ds \longleftrightarrow ds')$$

Cette transformation fait correspondre d'une façon biunivoque à tout vecteur ds d'origine s un vecteur ds' d'origine s' ; de plus elle est bien déterminée lorsque les points s et s' sont donnés. La relation involutive et transitive ainsi déterminée dans l'ensemble des vecteurs de la variété G sera appelée <u>équipollence de première espèce</u> . En particulier, le vecteur ds d'origine s est équipollent de première espèce au vecteur $\vec{\omega}$ d'origine i et d'extrémité $s^{-1}(s+ds)$. Dans l'espace tangent en i introduisons un repère cartésien d'origine i (c'est-à-dire r vecteurs de base). Les composantes du vecteur $\vec{\omega}$ seront des formes linéaires du vecteur ds ; nous les désignons par $\omega_i(s,ds)$ où $i = 1, 2, \ldots, r$. Pour que deux vecteurs soient équipollents de première espèce, il faut et il suffit qu'on ait:

$$\omega_i(s',ds') = \omega_i(s,ds) \quad , \quad (i=1,2,\ldots,r)$$

Ces équations différentielles s'appellent les <u>équations de définition du premier groupe des paramètres</u> .

De la même façon, les transformations linéaires

$$s' + ds' = (s + ds)\,t \quad , \quad (\text{transformation } ds \longleftrightarrow ds')$$

qui sont associées aux transformations

$$s' = s\,t \qquad (\text{transformation } s \longleftrightarrow s')$$

du deuxième groupe des paramètres, définissent dans l'ensemble des vecteurs de G une relation appelée <u>équipollence de deuxième espèce</u> . En particulier , appelons $\vec{\varpi}$ le vecteur d'origine i et d'extrémité $(s+ds)s^{-1}$ qui est équipollent de deuxième espèce au vecteur ds d'origine s . Les composantes de $\vec{\varpi}$ sont r formes linéaires ϖ (s,ds) . L'équipollence de deuxième espèce s'exprime par le système d'équations

$$\varpi_i(s',ds') = \varpi_i(s,ds) \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

Ce sont les <u>équations de définition du deuxième groupe des paramètres</u> .

Le transformation $s' = s^{-1}$ qui est également différentiable, échange les deux systèmes d'équipollence. On montre facilement qu'elle vérifie le système différentiel :

$$\omega_i(s,ds) + \varpi_i(s',ds') = 0$$

Il est important de remarquer que les r formes $\omega_i(s,ds)$ sont linéairement indépendantes pour tout point s ; il en est de même des formes $\varpi_i(s,ds)$.

<u>Groupe adjoint linéaire</u> .

La transformation

$$t' = s\, t\, s^{-1} \qquad (\text{transformation } t \longleftrightarrow t')$$

du groupe adjoint de G est évidemment différentiable . Comme le point i reste fixe, à cette transformation est associée une transformation linéaire opérant sur les vecteurs d'origine i . Cette transformation linéaire fait correspondre au vecteur $\vec{\omega}(s,ds)$ le vecteur $\vec{\varpi}(s,ds)$. Ses équations s'obtiennent donc en exprimant les formes $\varpi_i(s, ds)$ en fonction des formes $\omega_i(s, ds)$:

$$\varpi_i(s, ds) = \alpha_{ij}\,\omega_j(s, ds) .$$

L'ensemble de ces transformations forme un groupe appelé groupe adjoint linéaire .

PREMIER THEOREME FONDAMENTAL DE LIE

Transformations infinitésimales .

Soit G une famille de transformations opérant dans une variété différentiable E_n à n dimensions et correspondant d'une façon biunivoque aux points d'une variété différentiable $\mathcal{G}$ à r dimensions . La transformation qui correspond au point s de $\mathcal{G}$ étant définie par

$$x' = s\,x , \qquad (x, x' \subset E_n ; \quad s \subset \mathcal{G})$$

nous supposons que x' est une fonction différentiable de s et x . En considérant x' comme une fonction de s seul, la différentielle de cette fonction fait correspondre à tout vecteur ds d'origine s un vecteur dx' d'origine x' . Cette correspondance , qui est linéaire, peut s'écrire

$$x' + dx' = (s + ds)\,x .$$

En remplaçant x par $s^{-1}x'$, on a :

$$(1) \qquad x' + dx' = (s + ds)\, s^{-1}\, x' .$$

A tout vecteur ds d'origine s correspond ainsi dans E_n un champ de vecteurs X qui dépend de s et de ds . Un champ de vecteurs X peut aussi être considéré comme une transformation infinitésimale , c'est-à-dire une transformation qui fait correspondre à chaque point x' un point $x' + dx'$, où $dx' = X(x')$. Par $X(x')$ nous représentons le vecteur du champ X dont l'origine est en x'.

En général, la transformation infinitésimale (1) c'est-à-dire le champ de vecteurs X , dépend de $2r$ paramètres numériques . Mais supposons maintenant que G soit un groupe de transformations différentiable. Alors $\mathcal{G}$ est un groupe abstrait différentiable . La transformation infinitésimale X dépendra uniquement du point $(s+ds)s^{-1}$, c'est-à-dire du vecteur que nous avons désigné par $\vec{\varpi}\,(s,ds)$. En appelant $\varpi_i(s,ds)$ les r composantes du vecteur $\vec{\varpi}\,(s,ds)$ par rapport à un repère cartésien dans l'espace tangent à $\mathcal{G}$ en i , on aura $X = \varpi_i\, X_i$. (Nous supprimons le signe $\sum$ pour la sommation par rapport à un indice qui se répète deux fois) . L'équation (1) peut donc se mettre sous la forme

$$dx' = \varpi_i (s, ds) \; X_i(x')$$

Les r champs de vecteurs X_i sont linéairement indépendants; c'est-à-dire il n'existe pas des constantes c_i non toutes nulles telles qu'on ait $c_i \, X_i \equiv 0$.
En effet, supposons qu'il existe des constantes telles que $c_i \, X_i \equiv 0$, et considérons le système différentiel :

$$\frac{\varpi_1}{c_1} = \frac{\varpi_2}{c_2} = \dots = \frac{\varpi_r}{c_r}$$

Lorsque le point s décrit dans $\mathcal{G}$ une courbe intégrale de ce système , la transformation $x' = s\,x$ ne change pas ce qui est contraire à nos hypothèses .

On a des résultats analogues lorsqu'on considère la transformation infinitésimale :

$$x + dx = s^{-1} \; (s+ds) \; x \; .$$

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

<u>Premier théorème fondamental de Lie</u> : <u>Soit un groupe de transformations différentiable à r paramètres, et soit $x' = sx$ l'équation de la transformation s de ce groupe</u> . <u>La transformation infinitésimale</u>

$$x' + dx' = (s+ds) \; s^{-1} \; x'$$

peut se mettre sous la forme

$$\text{(a)} \qquad dx' = \varpi_i\,(s,ds)\; X_i\;(x') \quad .$$

où les X_i désignent r champs de vecteurs (ou transformations infinitésimales) linéairement indépendants, les $\varpi_i(s,ds)$ étant r formes de Pfaff linéairement indépendantes en tout point s .

La transformation infinitésimale

$$x + dx = s^{-1}\;(s+ds)\; x$$

peut se mettre sous la forme

$$\text{(b)} \qquad dx = \omega_i(s,ds)\; X_i\;(x)$$

où les $\omega_i(s,ds)$ sont également r formes de Pfaff linéairement indépendantes en chaque point s .

En considérant dans l'équation $x' = s\,x$ le point x comme fixe et x' comme fonction de s , cette fonction x' satisfait à l'équation différentielle (a) . En considérant x' comme fixe et x comme fonction de s, cette fonction x satisfait à l'équation différentielle

$$\text{(b')} \qquad dx + \omega_i(s,ds)\; X_i\;(x) = 0$$

Remarques

Les transformations infinitésimales considérées dans ce théorème s'appellent les transformations infinitésimales du groupe considéré. Elles forment une famille linéaire à r paramètres, ou un espace vectoriel à r dimensions.

Soit X un champ de vecteurs dans E_n et f une fonction numérique différentiable définie dans E_n. Lorsqu'on pose $dx = X$, la différentielle df au point x prend une valeur numérique déterminée que Lie désigne par le symbole Xf. En choisissant un système de coordonnées différentielles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans E_n, le vecteur X est défini par des composantes $X^1, X^2, \ldots, X^n$ et on a

$$Xf = X^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X^n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

La transformation infinitésimale que nous désignons par la lettre X est habituellement désignée par le symbole Xf.

<u>Réciproque du premier théorème fondamental de Lie</u>. <u>Soit G une famille de transformations opérant dans une variété deux fois différentiable E_n telle que chaque transformation corresponde à un point s d'une variété deux fois différentiable $\mathcal{G}$ à r dimensions, l'équation de la transformation correspondant au point s étant</u>

$$x' = s x \quad , \qquad (x, x' \subset E_n \; ; \quad s \subset \mathcal{G})$$

<u>Supposons que les conditions suivantes soient remplies</u> :

1) Les transformations de G sont définies pour les points x d'un domaine D de E_n.

2) G contient la transformation identique : $x = ix$.

3) Le point x' est une fonction deux fois différentiable des points s et x.

4) En considérant x comme fixe et x' comme fonction de s, cette fonction satisfait à l'équation différentielle :

$$dx' = \varpi_i(s, ds)\ X_i\ (x')$$

les X_i étant r champs de vecteurs linéairement indépendants et les $\varpi_i(s, ds)$ étant r formes de Pfaff linéairement indépendantes en chaque point s.

Conclusions : La famille G forme un noyau de groupe de transformations défini dans le domaine D.

De l'indépendance linéaire des X_i et des ϖ_i il résulte d'abord qu'il existe dans la variété $\mathcal{G}$ un voisinage v de i tel qu'à deux points distincts de v correspondent deux transformations distinctes de la famille G. Considérons ensuite les deux transformations

$$\begin{aligned} x' &= a\,x \\ x'' &= s\,x' \end{aligned} \qquad (a, s \subset v)$$

Supposons que le point s décrive dans $\mathcal{G}$ un arc deux fois différentiable, allant de i à b ; le point s sera une fonction deux fois différentiable $\varphi(t)$ d'un paramètre numérique t. En posant $s = \varphi(t)$, le système différentiel

$$(1) \qquad \varpi_i(s',ds') = \varpi_i(s,ds) \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

devient un système d'équations différentielles déterminant s' en fonction de t et admettant une solution unique pour des conditions initiales données. A l'arc $\widehat{ib}$ décrit par s correspond ainsi un arc bien déterminé d'origine a décrit par s'. Sur cet arc le point s' est une fonction bien déterminée du point s de l'arc $\widehat{ib}$. Considérons la transformation :

$$x''' = s'x$$

En supposant x fixe, les points x'' et x''' sont des fonctions de t qui satisfont toutes deux à l'équation différentielle

$$dx = \varpi_i(s,ds)\,X_i(x) \quad , \text{ où } \quad s = \varphi(t)$$

Comme pour $s = i$, les points x'' et x''' sont confondus avec le point ax, les points x'' et x''' sont confondus quel que soit t. Donc

$$x''' = s'x = s(a\ x)$$

cequi constitue un des axiomes vérifiés par un noyau de groupe de transformations . De la même façon le système (1) fait correspondre à tout arc $\widehat{ai}$ un arc $\widehat{ia'}$ et on a :

$$a'(a\ x) = i\ x = x$$

On voit ainsi que G satisfait à tous les axiomes vérifiés par un noyau de groupe de transformations .

Si la famille G ne contient pas la transformation identique mais satisfait à toutes les autres hypothèses de l'énoncé, les transformations

$$x' = s\ c^{-1} x$$

où s est supposé voisin de c, forment unnoyau de groupe.

<u>Remarque</u> : Soit G un groupe différentiable . En résolvant les équations de définition du deuxième groupe de paramètres

$$\varpi_i\ (s',ds') = \varpi_i\ (s,ds)$$

par rapport à ds' , on obtient les transformations infinitésimales du premier groupe des paramètres sous la forme

$$ds' = \varpi_i\ (s,ds)\ A_i\ (s')$$

En résolvant les équations

$$\omega_i\ (s',ds') = \omega_i\ (s,ds)$$

par rapport à ds' , on obtient les transformations infinitésimales du deuxième groupe des paramètres sous la forme

$$ds' = \omega_i (s,ds)\, B_i (s')$$

Exemples .- Groupes de Lie à un paramètre .

Soit G un groupe abstrait différentiel à un paramètre . La variété G est alors une droite ou un cercle . Le premier groupe des paramètres est défini par une seule équation différentielle :

$$(1) \qquad \omega(s',ds') = \omega(s,ds)$$

On peut introduire dans G un paramètre t tel que $\omega(s,ds) = dt$. Alors, l'équation (1) devient : $dt' = dt$ La loi de composition du groupe est donc $t' = t + t_1$ dans le cas où la variété G est une droite , et $t' = t + t_1$ (mod.1) dans le cas où G est un cercle . Le groupe est donc abélien . Remarquons que l'on a :

$$\varpi(s,ds) = \omega(s,ds) = dt$$

Soit maintenant

$$(2) \qquad x' = s\,x \quad , \qquad (x, x' \subset E_n \; ; \; s \subset G)$$

la transformation générale d'un groupe de transformations de Lie à un paramètre . La transformation infinitésimale associée à $(s+ds)\,s^{-1}$ sera, en introduisant dans G un paramètre numérique convenable t :

$$(3) \qquad dx' = dt\, X(x')$$

L'équation (2) est la solution de l'équation différentielle (3) telle que pour $t=0$ on ait $x' = x$. Nous dirons que le groupe de transformations considéré est engendré par la transformation infinitésimale X.

Réciproquement, toute transformation infinitésimale définie dans E_n par un champ de vecteurs X supposé différentiable, engendre un noyau de groupe de transformations qu'on obtient en prenant la solution de l'équation différentielle (3) qui se réduit à $x' = x$ pour $t = 0$.

GENERATION D'UN GROUPE DE LIE PAR SES TRANSFORMATIONS INFINITESIMALES

Soit G un groupe abstrait de Lie à r paramètres et considérons un sous-groupe g représenté par une courbe différentiable passant par le point i de G. Nous dirons que g est un sous-groupe de Lie à un paramètre. En remarquant que tout vecteur tangent à g est équipollent de première et de deuxième espèce à un vecteur d'origine i et tangent à g , on voit que la courbe g est une courbe intégrale du système différentiel

$$(1) \qquad \omega_i (s,ds) = a_i \, dt \qquad (a_i = C^{te} , i=1,2,\ldots,r)$$

ou encore du système différentiel

$$\varpi_i (s,ds) = a_i \, dt$$

Soit $s = f(a_i , t)$ la solution de (1) telle que $s=i$ pour $t=0$; cette solution fournit g . En réalité t n'intervient que par les produit $a_i t$. En donnant aux constantes a_i tous les systèmes de valeurs possibles, le point $s = f(a_1 t , \ldots , a_r t)$ décrit tous les sous-groupes de Lie à un paramètre . Si l'on pose $t=1$, on obtient encore tous les points de ces sous-groupes . Les nombres a_i sont appelés les paramètres canoniques du point $s = f(a_1,\ldots,a_r)$ Dans un voisinage suffisamment petit de i , les paramètres canoniques forment un système de coordonnées locales deux fois différentiables dans la variété G . Par rapport à ce système de coordonnées les sous-groupes de Lie à un paramètre sont représentés par les droites passant par i . Remarquons que le système des paramètres canoniques est déterminé à une transformation linéaire homogène près .

Supposons maintenant que G soit un groupe de transformation de Lie, réalisation du groupe abstrait $\mathcal{G}$. Les transformations d'un sous-groupe de Lie à un paramètre s'obtiennent en remplaçant dans l'équation différentielle

$$dx' = \varpi_i(s,ds)\, X_i\,(x')$$

les formes ϖ_i par $a_i dt$, ce qui donne

$$dx' = dt\,(a_i\, X_i\,(x'))$$

et en prenant la solution $x' = f(a_1 t, \dots, a_r t, x)$ qui se réduit à $x' = x$ pour $t=0$. Le paramètre t intervient seulement par les produits $a_i t$. La transformation de paramètres canoniques a_i s'obtient en posant $t=1$ dans la solution ainsi considérée . Toute transformation de G voisine de la transformation identique (au sens de la topologie de $\mathcal{G}$) appartient à un sous-groupe de Lie à un paramètre bien déterminé et correspond à des paramètres canoniques bien déterminés . On dit que G est engendré par la famille des transformations infinitésimales $a_i X_i$.

Une transformation de G non voisine de la transformation identique peut appartenir à plusieurs sous-groupes de Lie à un paramètre . Il peut même arriver qu'elle n'appartienne à aucun sous-groupe de Lie à un paramètre . Par exemple, considérons le groupe linéaire réel unimodulaire de transformation générale :

$$x' = ax + by \, . \qquad ab' - ba' = 1$$
$$y' = a'x + b'y$$

Une transformation dont l'équation caract-ristique admet deux racines négatives ne peut être engendrée par aucune transformation infinitésimale de la forme :

$$\frac{dx'}{dt} = \alpha x' + \beta y'$$

$$\frac{dy'}{dt} = \alpha' x' + \beta' y'$$

On peut indiquer une classe intéressante de groupes dont chacun est engendré en entier par ses transformations infinitésimales . Ce sont les groupes semi-simples clos . (E.Cartan ,IV) . Un tel groupe est caractérisé par le fait que la forme quadratique

$$\varphi(a) = c_{ikh} \, c_{jhk} \, a_i \, a_j$$

est définie . Dans la variété du groupe on peut alors définir une métrique riemannienne en posant :

$$d\sigma^2 = c_{ikh} \, c_{jhk} \, \omega_i(a, da) \, \omega_j(a, da) \, .$$

Les géodésiques de cette métrique riemannienne sont les sous-groupes de Lie à un paramètre ainsi que les courbes qui s'en déduisent par les transformations du premier groupe des paramètres (E.Cartan, III,chap.3). L'espace de Riemann défini est normal , c'est-à-dire il jouit de la propriété suivante : Sur toute géodésique on peut reporter, à partir d'un point donné, une longueur donnée arbitraire . La propriété fondamentale d'un espace de Riemann normal est la suivante : Deux points donnés arbitraires de cet espace sont toujours reliés par un arc de géodésique . Cela veut dire que tout élément d'un groupe semi-simple clos appartient au moins à un sous-groupe de Lie à un paramètre .

LES EQUATIONS DE MAURER-CARTAN

Soit G un groupe abstrait de Lie à r paramètres et considérons les équations de définition des deux groupes des paramètres :

$$(1) \qquad \omega_i(s', ds') = \omega_i(s, ds)$$

$$(2) \qquad \varpi_i(s', ds') = \varpi_i(s, ds)$$

le système (1) est complètement intégrable et admet pour solution générale : s' = ts . De même , le système (2) est

complètement intégrable, sa solution générale étant $s'=st$.
On a les équations :

$$(3) \qquad d\,\omega_i = \sum_{(jk)} c_{jki}\, \omega_j \wedge \omega_k$$

Comme le système dérivé de (1) est une conséquence algébrique du système (1), on voit que les quantités c_{ijk} sont des constantes. On les appelle les <u>constantes de structure</u> et les équations (3) sont appelées <u>équations de Maurer-Cartan</u>. On aura de même les équations

$$(4) \qquad d\,\varpi_i = \sum_{(jk)} \bar{c}_{jki}\, \varpi_j \wedge \varpi_k$$

où les quantités $\bar{c}_{ijk}$ sont également des constantes.
Remarquons que le système

$$(5) \qquad \omega_i\,(s',ds') + \varpi_i\,(s,ds) = 0$$

est complètement intégrable, son intégrale générale étant $s' = t\,s^{-1}$. On en conclut, en considérant le système dérivé de (5) que $\bar{c}_{ijk} = -c_{ijk}$.

Réciproquement, supposons que dans une variété G à r dimensions et deux fois différentiable, on considère r formes de Pfaff $\omega_i\,(s,ds)$, linéairement indépendantes.

Les équations (1) permettent alors de définir dans G une relation d'équipollence ; mais celle-ci n'est pas en général associée à un groupe de Lie . Supposons de plus que le système (3) soit vérifié, les quantités c_{ijk} étant des constantes . Alors le système (1) est complètement intégrable ; c'est-à-dire , en se bornant à un voisinage v d'un point i il existe une solution et une seule définie pour tout point de v et transformant le point i en un point donné t. Soit $s' = ts$ cette solution . C'est la loi de composition d'un noyau de groupe dont l'élément unité est le point i . Donc pour que les équations (1) définissent un noyau de groupe de Lie, il faut et il suffit que les formes $\omega_i(s,ds)$ vérifient un système d'équations de Maurer-Cartan .

DEUXIEME THEOREME FONDAMENTAL DE LIE

Soit G un groupe de transformations de Lie à r paramètres . En reprenant les notations du premier théorème fondamental de Lie, considérons les équations :

(1) $\qquad x' = s\,x$

(2) $\qquad dx' = {}_i(s,ds)\, X_i\,(x')$

L'équation différentielle (2) est complètement intégrable ;

l'équation (1) en fournit la solution qui se réduit à $x'=x$ pour $s=1$. L'équation (2) peut être remplacée par l'équation

$$(3) \qquad df(x') = \varpi_i(s,ds)\, X_i f(x')$$

où $f(x)$ est une fonction numérique arbitraire deux fois différentiable. Par dérivation extérieure de (3) on obtient l'équation :

$$(4) \qquad 0 = \big(d\varpi_i(s,ds)\big)\, X_i f(x') + d\big(X_i f(x')\big) \wedge \varpi_i(s,ds)$$

Pour que (2) soit complètement intégrable, il faut et il suffit que (4) soit une conséquence algébrique de (3). En tenant compte de (3) et en posant

$$(5) \qquad d\varpi_i = -\sum_{(jk)} c_{jki}\, \varpi_j \wedge \varpi_k$$

l'équation (4) devient :

$$(6) \qquad 0 = -\sum_{(jk)} c_{jki}\, \varpi_j \wedge \varpi_k X_i f + \sum_{(jk)} \varpi_j \wedge \varpi_k \left[X_j(X_k f) - X_k(X_j f)\right]$$

Etant donnés les symboles de Lie de deux transformations infinitésimales,

$$Xf = X^\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \qquad \text{et} \qquad Yf = Y^\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

nous posons :

$$[XY]f = X(Yf) - Y(Xf) = \left(X^{\mu}\frac{\partial Y^{\lambda}}{\partial x_{\mu}} - X^{\lambda}\frac{\partial Y^{\mu}}{\partial x_{\lambda}}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}}$$

Le symbole $[XY]f$ est le symbole de Lie d'une transformation infinitésimale que nous désignerons par $[XY]$ et qui s'appelle le crochet des transformations infinitésimales X et Y . Il résulte alors de (6) :

(7) $$[X_j X_k] f = c_{jki} X_i f$$

De (6) et (7) on conclut que les quantités c_{ijk} ne dépendent ni de s ni de x' ; ce sont des constantes . Ceci démontre encore une fois les équations de Maurer-Cartan , et nous sommes arrivés à l'équation (7) qui constitue le deuxième théorème fondamental de Lie .

Deuxième théorème fondamental de Lie : Si $x_1, \dots, x_r$ sont r transformations infinitésimales linéairement indépendantes d'un groupe de Lie à r paramètres , on a :

$$[X_i X_j] = c_{ijk} X_k$$

où les quantités c_{ijk} sont des constantes dites constantes

Réciproque : Etant données, dans une variété E_n r transformations infinitésimales différentiables et linéairement indépendantes , telles que

$$[X_i X_j] = c_{ijk} X_k$$

où c_{ijk} = Cte. la famille de transformations infinitésimales $a_i X_i$ engendre un noyau de groupe de transformations de Lie à r paramètres, défini dans un domaine de E_n

Pour démontrer la réciproque, il suffit de démontrer qu'on peut déterminer dans un domaine à r dimensions, r formes de Pfaff linéairement indépendantes, $\varpi_i(s,ds)$, telles que

$$(1) \qquad d\varpi_i = - \sum_{(jk)} c_{jki}\, \varpi_j \wedge \varpi_k$$

En effet, ces formes étant déterminées, l'équation

$$dx' = \varpi_i\,(s,ds)\; X_i\,(x')$$

est complètement intégrable, et ses solutions, que nous écrivons sous forme $x' = s\,x$, constituent, d'après la réciproque du premier théorème de Lie, un noyau de groupe de Lie à r paramètres.

Supposons $r \leq n$. On peut trouver dans un domaine D de E_n des transformations infinitésimales X_{r+1} ..... X_n, telles que X_1, X_2, ..., X_r, ... , X_n soient linéairement indépendantes. Alors on a identiquement :

$$df = \varpi_\alpha\, X_\alpha\, f \qquad (\alpha = 1,2,\ \ldots,\ n)$$

où ϖ_α sont n formes de Pfaff linéairement indépendantes dans D . Nous pouvons écrire :

$$[X_\alpha X_\beta] = c_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$$

$$c_{ij\lambda} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, r ; \lambda > r)$$

Par dérivation extérieure de $df = \varpi_\alpha X_\alpha f$, on trouve :

$$d\varpi_\alpha = -\sum_{(\beta\gamma)} c_{\beta\gamma\alpha} \varpi_\beta \wedge \varpi_\gamma .$$

Le système

$$\varpi_\lambda = 0 \quad , \quad \text{où} \quad \lambda = r+1, \ldots, n$$

est complètement intégrable . On peut donc introduire de nouvelles variables s_1 , s_2 ......s_n telles que la solution générale de ce système soit :

$$s_\lambda = Cte \qquad (\lambda = r+1, \ldots, n).$$

Donnons aux variables s_λ , où $\lambda > r$, des valeurs constantes . Les formes ϖ_i , où $i=1,\ldots r$, ne dépendent plus que de $s_1,\ldots s_r$ et satisfont à (1) .

Si $r > n$, il suffit de montrer , pour appliquer le raisonnement précédent, qu'on peut trouver r transformations infinitésimales $W_1, \ldots, W_r$ définies dans une variété à N dimensions, où $N > r$, et telles qu'on ait encore $[W_i W_j] = c_{ijk} W_k$. On y arrive en con-

sidérant la variété E_N , où $N = nr$, dont chaque point est défini comme un ensemble quelconque de r points $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... , $x^{(r)}$ de E_n . Un vecteur W dans E_n peut être considéré comme la somme de r vecteurs $X^{(1)}$, ... , $X^{(r)}$ de E_n ayant respectivement pour origine $x^{(1)}$, ... $x^{(r)}$
Posons $W_i = X_i^{(1)} + \dots + X_i^{(r)}$. Nous avons ainsi dans E_N les transformations infinitésimales W_i qui vérifient bien les relations

$$\left[W_i \; W_j\right] = c_{ijk} \; W_k$$

<u>CALCUL DES FORMES ϖ_i ET ω_i</u>

<u>EN FONCTION DES PARAMETRES CANONIQUES</u>

La transformation générale d'un noyau de groupe engendré par la famille de transformations infinitésimales $a_i X_i$ peut s'obtenir en intégrant l'équation :

$$dx' = a_i \; dt \; X_i \; (x')$$

et en prenant la solution x' fonction de t telle que $x' = x$ pour $t=0$. Le paramètre t n'intervenant que par les produits $u_i = a_i t$, on aura l'équation de la transformation générale en fonction des paramètres u_i .
Les formes ϖ_i (u,du) se mettent alors sous la forme :

$$\varpi_i \; (u,du) = a_i \; dt \; + \; \overline{\varpi}_i$$

Les formes $\overline{\omega}_i$ dépendant de da_i , t et a_i , s'annulent pour t = 0 . Les équations de Maurer-Cartan deviennent :

$$da_i \wedge dt + d\,\overline{\omega}_i = -\sum_{(jk)} c_{ijk}(a_j dt + \overline{\omega}_j) \wedge (a_k dt + \overline{\omega}_k)$$

Ecrivons que dans cette identité le coefficient de dt est nul :

$$(1) \qquad \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial t} = da_i - c_{jki}\, a_j\, \overline{\omega}_k$$

C'est un système d'équations différentielles dans lequel les fonctions inconnues sont les formes $\overline{\omega}_i$, la variable étant t . Les formes $\overline{\omega}_i$ cherchées forment la solution telle que $\overline{\omega}_i = 0$ pour t=0. En donnant à t la valeur 1, les formes ω_i ainsi déterminées deviennent les formes $\overline{\omega}_i$ (a,da) exprimées en fonction des paramètres canoniques . Ecrivons le système (1) sous forme matricielle :

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t} = (da) - A\,(\overline{\omega})$$

$$(da) = \begin{pmatrix} da_1 \\ \vdots \\ da_r \end{pmatrix}, \quad (\overline{\omega}) = \begin{pmatrix} \overline{\omega}_1 \\ \vdots \\ \overline{\omega}_r \end{pmatrix} \qquad A = (A_{ik}) = (c_{jki}\, a_j)$$

La solution cherchée est alors :

$$(\varpi) = \frac{e^{-A} - 1}{-A}\,(da)$$

De même les formes $\omega_i\,(a,da)$ en fonction des paramètres canoniques s'obtiennent en intégrant le système

$$\frac{\partial \varpi_i}{\partial t} = da_i + c_{jki}\,a_j\,\varpi_k$$

On trouve ainsi :

$$(\omega) = \frac{e^{A} - 1}{A}\,(da)$$

Remarquons que les paramètres canoniques de deux transformations inverses sont égaux et de signes contraires et on vérifie que

$$\varpi_i(a,da) + \omega_i\,(-a,-da) = 0$$

Il est remarquable que les formes ϖ_i et ω_i aient des expressions analytiques en fonction des paramètres canoniques . Les équations de définition du premier groupe des paramètres étant analytiques, la loi de composition d'un groupe de Lie G est analytique par rapport au système de coordonnées locales formées par les paramètres canoniques . On en déduit qu'on peut toujours introduire dans la variété d'un groupe de Lie G un ensemble de systèmes de coordonnées locales par rapport auxquels le groupe G est analytique .

Nous verrons plus que les systèmes de coordonnées locales qui jouissent de cette propriété sont déterminés à des transformations analytiques près .

TROISIEME THEOREME FONDAMENTAL DE LIE

En supposant les formes ω_i exprimées en fonction des paramètres canoniques, nous pouvons dériver extérieurement les équations de Maurer-Cartan :

$$(1) \qquad d\omega_i = \sum_{jk} c_{jki} \, \omega_j \wedge \omega_k$$

En remarquant que $d(d\omega_i) \equiv 0$, on obtient ainsi

$$\sum_{(jk)} (c_{jki} \, d\omega_j \wedge \omega_k - c_{jki} \, \omega_j \wedge d\omega_k) = 0$$

Comme $c_{jki} = -c_{kji}$, on aura

$$2 \sum_{(jk)} c_{jki} \, d\omega_j \wedge \omega_k = 0$$

$$c_{jki} \, c_{h\ell j} \, \omega_h \wedge \omega_\ell \wedge \omega_k = 0$$

Il en résulte le

<u>Troisième théorème fondamental de Lie</u> : <u>Les constantes de de structure d'un groupe de Lie satisfont aux conditions suivantes, dites conditions de Lie</u> :

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0$$

$$\sum_j \left(c_{jki}\, c_{h\ell j} + c_{jhi}\, c_{\ell kj} + c_{j\ell i}\, c_{khj} \right) = 0$$

Réciproque : Etant donné un ensemble de constantes c_{ijk} où $i,j,k = 1,2,\ldots,r$, satisfaisant aux conditions de Lie, il existe un noyau de groupe de Lie admettant ces constantes comme constantes de structure .

Les conditions de Lie s'obtiennent aussi en appliquant l'identité de Jacobi :

$$\left[[XY]\ Z \right] + \left[[YZ]\ X \right] + \left[[ZX] \right] Y = 0$$

où X, Y, Z sont trois champs de vecteurs, aux transformations infinitésimales X_i d'un groupe de Lie . Mais ceci suppose que les champs de vecteurs sont deux fois différentiables, ce qui n'est pas forcément le cas pour les X_i d'un groupe de Lie.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de déterminer dans un domaine à r dimensions, r formes de Pfaff ω_i linéairement indépendantes et satisfaisant aux équations de Maurer-Cartan . Si le problème est possible, on obtiendra les formes ω_i en prenant l'intégrale du système

$$(2) \qquad \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = da_i + c_{jki}\, a_j\, \omega_k$$

telle que $\omega_i = 0$ pour $t=0$, et en y posant $t=1$.
En appelant $\overline{\omega}_i$ les formes qui forment la solution de (2)

telle que $\bar{\omega}_i = 0$ pour $t = 0$, les formes $d\,\bar{\omega}_i$ dans lesquelles on a posé $dt = 0$ satisfont à :

$$(3) \qquad \frac{\partial (d\,\bar{\omega}_i)}{\partial t} = c_{jki}\, da_j\, \bar{\omega}_k + c_{jki}\, a_j\, d\,\bar{\omega}_k$$

Le système (3) dans lequel on considère les formes $d\,\bar{\omega}_i$ comme des fonctions inconnues de t admet la solution $d\,\bar{\omega}_i = \sum_{(jk)} c_{jki}\, \bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_k$, pourvu que les conditions de Lie soient vérifiées . Cette solution satisfait aux conditions initiales : $d\,\bar{\omega}_i = 0$ pour $t=0$. Donc les formes ω_i qu'on obtient en posant $t=1$ dans $\bar{\omega}_i$, satisfont bien aux équations de Maurer-Cartan .

Algèbre de Lie . Les constantes de structure c_{ijk} d'un groupe de Lie ne sont pas déterminées d'unefaçon univoque . En effet, les transformations infinitésimales X_i qui forment une base de la famille linéaire des transformations infinitésimales peuvent être remplacées par des combinaisons linéaires indépendantes à coefficients constants ; les constantes c_{ijk} subissent alors également une certaine transformation ; mais dans l'espace vectoriel à r dimensions dont les éléments sont les transformations infinitésimales, on a une loi de composition bien déterminée . A deux éléments X, Y correspond un élément déterminé, le crochet $[XY]$.

qui est une fonction linéaire de X et de Y et qui satisfait aux axiomes suivants :

$$[XY] = -[YX]$$

$$\big[[XY]\,Z\big] + \big[[YZ]\,X\big] + \big[[ZX]\,Y\big] = 0$$

On appelle algèbre de Lie un espace vectoriel A_r dans lequel on a défini une loi de composition $[XY]$, linéaire en X et en Y et satisfaisant aux axiomes précédents. A tout groupe de Lie à r paramètres, correspond une algèbre de Lie à r dimensions. Réciproquement, toute algèbre de Lie à r dimensions peut être réalisée par l'ensemble des transformations infinitésimales d'un noyau de groupe de Lie à r paramètres. Il est clair que si deux noyaux de groupes de Lie sont isomorphes par un isomorphisme deux fois différentiable, les algèbres de Lie correspondantes sont également isomorphes et réciproquement. Par conséquent, la classification des groupes de Lie au point de vue local (c'est-à-dire des noyaux de groupes) se ramène à la classification des algèbres de Lie, problème qui sera traité dans un autre exposé.

On doit à M.E.Cartan le théorème suivant, qui est peut-être le plus surprenant de toute la théorie ;

<u>Il existe toujours un groupe de Lie au sens global</u>

<u>tel que l'ensemble de ses transformations infinitésimales réalise une algèbre de Lie donnée</u> .

Lie a donné de la réciproque de son troisième théorème fondamental une démonstration qui entraîne, lorsqu'elle est valable, le théorème de M.Cartan . Considérons en effet l'espace vectoriel A_r formé par l'algèbre de Lie donnée . Considérons dans cet espace la transformation

$$dX = \left[YX \right]$$

où Y est un point fixe, le point X étant ainsi transformé en un point $X + dX$. Nous la considérons comme une transformation infinitésimale linéaire dans l'espace A_r . On montre d'ailleurs que c'est la transformation infinitésimale générale du groupe adjoint linéaire . Soient X_i , r vecteurs de base de A_r , et désignons par E_i la transformation infinitésimale

$$dX = \left[X_i \; X \right]$$

le crochet $\left[E_i \cdot E_j \right]$ correspond à la transformation infinitésimale

$$dX = \left[X_i \left[X_j \; X \right] \right] - \left[X_j \left[X_i \; X \right] \right]$$

qui s'écrit, en vertu des axiomes de l'algèbre de Lie

$$dX = \left[[X_i \; X_j] \; X \right]$$

Donc $[E_i \; E_j]$ est la transformation infinitésimale correspondant à $[X_i \; X_j]$. Les E_i ne sont pas nécessairement linéairement indépendants, car dans G_r, il peut exister des éléments Y qui sont échangeables avec tous les éléments X (c'est-à-dire $[YX] = 0$). Considérons le cas où il n'existe aucun élément Y de cette espèce. Les transformations infinitésimales E_i sont alors linéairement indépendantes et forment une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Lie donnée. Elles engendrent donc un noyau de groupe G dont les transformations sont linéaires et sont par suite définies dans tout l'espace A_r. Soit alors G' l'ensemble des transformations linéaires dont chacune est le produit d'un nombre fini de transformations de G. On voit facilement que G' est un groupe de Lie au sens global.

La démonstration précédente n'est pas valable dans le cas général. Mais comme toute famille de transformations infinitésimales linéaires qui forme une algèbre de Lie engendre un groupe de transformations linéaires au sens global, le théorème de M. Cartan résulte du théorème suivant, démontré récemment par M. Ado, et qui sera traité dans l'exposé de Chevalley.

<u>Toute algèbre de Lie admet une réalisation fidèle</u>

par des transformations infinitésimales linéaires.

Remarquons encore qu'à une algèbre de Lie peuvent correspondre plusieurs groupes abstraits de Lie au sens global. Mais il ne lui correspond qu'un seul groupe abstrait de Lie simplement connexe. De plus, celui-ci est le groupe de recouvrement simplement connexe de tout autre groupe abstrait de Lie correspondant à l'algèbre de Lie donnée.

LES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE DE LIE

Soit G un groupe abstrait à r paramètres. Un sous-groupe g de G sera appelé sous-groupe de Lie, lorsque la variété g est différentiable. De même, $\mathcal{G}$ étant une réalisation de G par un groupe de transformations de Lie un sous-groupe $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{G}$ sera appelé sous-groupe de Lie lorsqu'il correspond à un sous-groupe de Lie g de G. Tout sous-groupe de Lie $\mathfrak{g}$ est évidemment engendré par une famille linéaire de transformations infinitésimales de $\mathcal{G}$. Pour qu'une telle famille, $a_i Y_i$, engendre un sous-groupe il faut et il suffit que

$$[Y_i \; Y_j] = \gamma_{ijk} \; Y_k \qquad (i,j,k=1,2,\ldots,h)$$

la détermination des sous-groupes de Lie est donc un problème purement algébrique. En employant un système de coordonnées formés par des paramètres canoniques, tout sous-groupe de Lie de G est représenté par une variété plane au voisinage de l'élément unité .

Concernant les sous-groupes d'un groupe de Lie, on doit à M.E.Cartan deux théorèmes importants contenus dans l'énoncé suivant qui est un peu plus général :

<u>Théorème</u> : <u>G étant un groupe abstrait de Lie, soient g un ensemble fermé de G et V un voisinage de l'élément unité i tels que, si s et s' sont deux points appartenant à g et à V , le point $s's^{-1}$ appartienne également à g : alors la partie de g contenu dans un voisinage suffisamment petit de i forme un voisinage de i sur un sous-groupe de Lie</u> .

Supposons que le système de coordonnées formé par les paramètres canoniques soit valable dans V . En utilisant les notions de géométrie euclidienne dans l'espace des paramètres canoniques, soit V' l'intérieur d'une hypersphère de centre i contenue dans V . En supposant que g ne soit pas proprement discontinu dans V, il existe une suite de points s_1 , ... , s_n, ... de g tendant vers i . Les droites is_n admettent au moins une droite d'accumulation $i\delta$. Soit s un point de $i\delta$ intérieur à V' . Soit p_n

le plus grand entier tel que la distance de i au point $(s_n)^{p_n}$ soit inférieure ou égale à la distance is. Alors le point s est évidemment point d'accumulation des points $(s_n)^{p_n}$ et appartient donc à g. L'ensemble des segments de droite passant par i et appartenant à g forme évidemment la partie intérieure à V' d'une variété plane g'. Le point i admet alors un voisinage $V'' \subset V'$ tel que tous les points de g situés dans V'' appartiennent à g'. Sinon, il y aurait en dehors de g' une suite de points $\sigma_1 \ldots\ldots \sigma_n \ldots$ appartenant à g et tendant vers i. Soit h une variété plane de dimension $r-r'$ (où r = dimension de G, r' = dimension de g') et rencontrant g' au seul point i. Appelons $\sigma g'$ la variété qui se déduit de g' par la transformation du premier groupe des paramètres correspondant au point σ. La variété $\sigma_n g'$, qui est analytique, rencontre h en un point σ'_n qui appartient à g et qui tend vers i lorsque σ_n tend vers i. L'ensemble des droites $i\,\sigma'_n$ admettra une droite d'accumulation située dans h. Cette droite d'accumulation devrait aussi appartenir à g' ce qui est impossible. Donc, à l'intérieur de V'', g est confondu avec g'.

Les théorèmes de M. Cartan, qui résultent immédiatement de l'énoncé précédent, sont :

I.- <u>Si g est un sous-groupe du groupe de Lie G, et si g est fermé dans G, on peut trouver dans G un voisinage V de l'élément unité tel que les éléments de g intérieurs à V soient les éléments de la partie d'un sous-groupe de Lie intérieure à V</u> .

II.- <u>Tout sous-groupe continu à k paramètres d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie</u> .

Nous disons qu'un sous-groupe g de G est continuement isomorphe à un groupe topologique $\overline{g}$, lorsque g est une représentation isomorphe et continue de $\overline{g}$ dans G. Si $\overline{g}$ est un groupe continu à k paramètres, nous disons aussi que g est un sous-groupe continu à k paramètres . Le théorème II se généralise un peu : <u>Lorsqu'un sous-groupe d'un groupe de Lie est continuement isomorphe à un groupe topologique localement compact, c'est un sous-groupe de Lie</u> .

<u>Remarque</u>

Un sous-groupe de Lie g d'un groupe de Lie G n'est pas forcément fermé dans G . <u>Exemple</u> : le tore à deux dimensions est la variété d'un groupe de Lie à deux paramètres . On sait que chaque point du tore peut être représenté par un couple de deux nombres réels (x,y) modulo 1 . Nous définissons un groupe de Lie en prenant la loi de composition suivante :

$$x'' = x + x' \qquad (\text{mod.} 1)$$
$$y'' = y + y'$$

Les sous-groupes continus à un paramètre sont les géodésiques (de la métrique euclidienne du plan x,y) définies par $y = tx$. Si t est irrationnel, la géodésique $y = tx$ n'est pas un ensemble fermé sur le tore . mais un ensemble partout dense sur le tore .

Application à l'isomorphisme de deux groupes de Lie

Les sous-groupes de Lie à un paramètre ont une définition purement topologique : ce sont les sous-groupes continus à un paramètre . On en déduit le théorème suivant :

Etant donnés deux groupes de Lie , G et G' , tout isomorphisme continu entre G et G' est analytique par rapport à des coordonnées locales analytiques définies dans G et dans G' .

Un système de coordonnées locales dans G est dit analytique lorsque la loi de composition de G est analytique par rapport à ce système . Si G et G' sontdeux groupes continus à r et à r' paramètres , tout isomorphisme continu dans un sens entre G et G' est topologique (c'est-à-dire continu dans les deux sens) et par suite $r=r'$. C'est une conséquence des théorèmes suivants :

1) Tout groupe continu à r paramètres peut être recouvert par un ensemble dénombrable de voisinages (E.Cartan, IV,p.7)

2) Toute transformation biunivoque et continue d'un espace bicompact dans un espace de Hausdorff est une homéomorphie (P.Alexandroff et H.Hopf , TOPOLOGIE, p.95) .

3) Un ensemble de dimension r ne peut pas être la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de dimensions inférieures à r .

Soit G et G' deux groupes de Lie à r paramètres et considérons un isomorphisme topologique entre G et G' . Rapportons G et G' à des systèmes de paramètres canoniques . L'isomorphisme considéré fait correspondre à toute droite de G passant par i une droite de G' passant par i' . Nous pouvons supposer que les vecteurs de base des deux systèmes de coordonnées se correspondent deux à deux . Tout élément s voisin de i est d'une façon bien déterminée le produit de r éléments $c_1 . \dots . c_k$ où c_k est un élément de l'axe de coordonnées d'indice k . Le point s est une fonction analytique des points $c_1 . \dots . c_r$. De même tout point s' voisin de i' est d'une façon bien déterminée le prosuit de r éléments $c'_1, \ldots, c'_r$ appartenant respectivement aux axes de coordonnées choisis dans G'. Soient $c'_1, \ldots, c'_r$ les points de G' correspondant respectivement aux points $c_1, \ldots, c_r$ de G. Le point s', produit de $c'_1, \ldots, c'_r$ correspond alors au point s, produit de $c_1, \ldots$ c_r. La correspondance entre s et s' est donc analytique et par suite linéaire par rapport aux paramètres canoniques. Avec notre choix particulier des systèmes de coordonnées, les points s et s' ont les mêmes paramètres canoniques.

Le théorème ainsi démontré peut s'énoncer encore de la façon suivante :

Dans un groupe de Lie deux systèmes de coordonnées locales analytiques (ou deux fois différentiables) définis dans un même domaine, se déduisent l'un de l'autre par une transformation analytique (ou deux fois différentiable).

ESPACES HOMOGENES DE LIE

Un groupe de transformations G défini dans une variété E_n est dit transitif si tous les points de E_n sont équivalents par rapport à G, c'est-à-dire s'il existe une transformation qui transforme un point arbitraire x en un point arbitraire x' . Nous appellerons <u>espace homogène</u>, une variété E_n dans laquelle on a défini un groupe de transformations continu à r paramètres qui est transitif dans E_n ; ce groupe sera appelé le <u>groupe de structure</u> de l'espace homogène . En particulier, on aura un <u>espace homogène de Lie</u> si le groupe de structure est un groupe de transformations de Lie à r paramètres .

<u>Exemples</u> : espace euclidien , espace affine, espace projectif .

Soit E_n un espace homogène , $\mathfrak{G}$ son groupe de structure , $\mathfrak{g}$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ formé par l'ensemble des transformations qui laissent fixe un point O de E_n . Les lettres G et g désigneront les groupes abstraits correspondants . On voit facilement que g est fermé dans G . De plus, g n'admet pas de sous-groupe invariant dans G. Car s'il existait un tel sous-groupe , chacune de ses transformations laisserait invariants tous les pòints de E_n et serait donc la transformation identique . L'ensemble des transformations de $\mathfrak{G}$ qui transforment le point O en un point x est l'ensemble sg formé par les produits d'un élément particulier s par un élément quelconque de g. Les points x correspondent donc d'une façon biunivoque aux ensembles sg . Par hypothèse, la transformation qui fait correspondre à un point s de G le point x correspondant à sg est une transformation continue .

Supposons maintenant que le groupe abstrait G soit un groupe de Lie à r paramètres ; mais nous ne supposerons pas que le groupe de transformations G est un groupe de transformations de Lie . Comme g est fermé dans G c'est un sous-groupe de Lie de G . Soit V un voisinage de i dans lequel on peut introduire le système de coordonnées formé par les paramètres canoniques ; g sera représenté dans V par une variété plane à k dimensions . Considérons dans V une variété plane P à $r-k$ dimensions qui rencontre g au seul point i . Si s est voisin de i , l'ensemble sg est une variété analytique qui rencontre P en un seul point t voisin de i . Si v est un voisinage suffisamment petit de i dans la variété plane P , les ensembles tg et $t'g$ correspondent à deux points distincts t et t' de v sont distincts . Cela nous permet de définir un espace topologique que nous appellerons espace quotient $G/_g$ et dont les points sont les ensembles sg . Nous définissons comme voisinage de l'élément origine g l'ensemble des éléments tg , où t est un point d'un voisinage

v de 1 dans P. Un voisinage de l'élément $s_o g$ sera alors l'ensemble des éléments $s_o tg$, où t est un point quelconque de v . L'espace $G/_g$ sera donc une variété à $r-k$ dimensions . Si nous faisons correspondre à l'élément s de G la transformation $sg \dashrightarrow s_o sg$, l'espace $G/_g$ devient un espace homogène dont le groupe de structure est une réalisation du groupe abstrait G .

Montrons que les espaces homogènes E_n et $G/_g$ sont topologiquement équivalents . Les points de E_n et de $G/_g$ correspondant d'une façon biunivoque aux ensembles sg, nous avons bien une transformation biunivoque T entre E_n et $G/_g$. Il suffit de démontrer que T est topologique . T est continu dans le sens de $G/_g$ sur E_n . En effet, à un voisinage d'un point x_o de E_n correspond dans G un voisinagede $s_o g$, ce voisinage étant composé d'ensembles sg . Il y correspond donc dans $G/_g$ un voisinage de l'élément $s_o g$, ce qui démontre la continuité de T dans le sens de $G/_g$ sur E_n . Le fait que la transformation est topologique résulte ensuite des propriétés suivantes :

1) l'espace $G/_g$ peut être recouvert par une famille dénombrable de voisinages ,

2) toute transformation biunivoque et continue d'un espace bicompact dans un espace de Hausdorff est une homéomorphie.

3) un ensemble de dimension n ne peut pas être la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de dimension inférieure à n .

On a donc le théorème :

Tout espace homogène E_n dont le groupe de structure est une réalisation continue d'un groupe abstrait de Lie G est équivalent à un espace quotient $G/_g$, où g est un sous-groupe qui est fermé dans G et qui ne contient aucun sous-groupe invariant dans G .

Démontrons enfin le théorème suivant :

L'espace E_n du théorème précédent est un espace homogène de Lie . On peut choisir dans E_n et dans G des coordonnées locales, définies à des transformations analytiques près , telles que le groupe de structure soit analytique.

Reprenons les notations que nous avons employées pour définir l'espace quotient $G/_g$. Nous pouvons toujours supposer que les paramètres canoniques des points de P sont $a_1, \ldots, a_n$, et $a_\lambda = 0$ pour $\lambda > n$. Prenons dans v qui est l'image d'un voisinage du point O de E_n , le système de coordonnées défini par $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Considérons un voisinage $v_1 \subset v$. On peut trouver dans G un voisinage $V_1 \subset V$ de i tel que la variété stg rencontre v en un

point t' bien déterminé lorsque $t \subset v_1$, $s \subset V_1$.
Le point t' sera une fonction analytique de s et t : $t' = \varphi(s,t)$. Nous avons ainsi dans le voisinage v de E_n et dans le voisinage V de G des systèmes de coordonnées locales tels que les transformations du groupe de structure, $x' = sx$, sont analytiques par rapport à s et x , lorsque $s \subset V_1$, $x \subset v_1$. On en déduit ensuite, par les transformations du groupe de structure et par celles du premier groupe des paramètres, des systèmes de coordonnées locales recouvrant E_n et G. Par rapport à ces coordonnées locales le groupe de structure sera analytique . De plus, les coordonnées locales qui jouissent de cette propriété sont bien définies à des transformations analytiques près . En effet nous avons déjà démontré ce fait pour ce qui concerne la variété G Rapportons donc les points t et t' de v à un nouveau système de coordonnées dans v tel que $t' = \varphi(s,t)$ soit une fonction analytique, en supposant s rapporté au système des paramètres canoniques . On passe alors des anciennes coordonnées définies dans v aux nouvelles par la transformation analytique $t' = \varphi(t',i)$ où le point t' dans $\varphi(t',i)$ est rapporté aux anciennes coordonnées .

Le théorème précédent généralise le théorème suivant dû à Schur (II) :

Tout groupe de transformations de Lie qui est transitif peut être rendu analytique par un choix convenable de systèmes de coordonnées dans la variété du groupe et dans l'espace où opère le groupe .

L'hypothèse de transitivité est essentielle pour la validité de ce théorème . Il y a des groupes de transformation de Lie intransitifs qu'on ne peut pas mettre sous forme analytique .

La notion de transitivité se définit évidemment aussi pour un noyau de groupe de transformations . On voit encore que tout noyau de groupe de transformations transitif qui est une réalisation continue d'un noyau de groupe de Lie peut être défini de la façon suivante :

Soient G un noyau de groupe de Lie et g un noyau de sous-groupe de Lie qui ne contient aucun sous-groupe invariant dans G . Soit E_n l'ensemble dont les éléments sont les classes sg , les voisinages étant définis comme précédemment . L'ensemble des transformations sg s_0sg forment alors un noyau de groupe de transformations de Lie qui est transitif et qu'on peut mettre sous la forme analytique .

Remarque sur la réciproque du deuxième théorème fondamental de Lie

D'après le théorème de M. Cartan, tou noyau de groupe abstrait de Lie admet un prolongement formant un groupe de Lie au sens global . Il reste à savoir si tout noyau de groupe de transformations de Lie admet également un prolongement formant un groupe de transformations de Lie au sens global . D'une façon plus précise, supposons que dans un domaine D_n on ait défini r transformations infinitésimales X_i linéairement indépendantes et telles que $[X_i\ X_j] = c_{ijk} X_k$ Il existe alors dans D_n un voisinage v tel que les transformations infinitésimales $a_i X_i$ engendrent un noyau de groupe dont les transformations sont définies dans v . Peut-on choisir ce voisinage v de telle façon qu'il existe un groupe de transformations de Lie $\mathcal{G}$ opérant dans un espace E_n et une représentation de v sur un voisinage v' dans E_n tels que les transformations infinitésimales $a_i X_i$ dans v correspondent par cette représentation aux transformations infinitésimales $a_i X'$ de $\mathcal{G}$ dans v' ?

<u>Un tel prolongement n'est pas toujours possible</u> . En effet le noyau de groupe abstrait de Lie G admet un prolongement bien déterminé $\overline{G}$ formant un groupe de Lie simplement connexe . Le noyau de sous-groupe de Lie g (qui n'admet pas de sous-groupe invariant dans G) admet un prolongement $\overline{g}$ bien déterminé dans $\overline{G}$. Si $\overline{g}$ n'est pas fermé dans $\overline{G}$, le noyau de groupe de transformations défini par G et g n'ad-

met pas de prolongement formant un groupe de transformations au sens global . On donne facilement un exemple d'un groupe $\bar{G}$ simplement connexe , admettant un sous-groupe $\bar{g}$ qui ne soit pas fermé dans $\bar{G}$ et qui ne contienne aucun sous-groupe invariant dans $\bar{G}$ (voir IX) .

Dans cet exposé, j'ai dû passer sous silence plusieurs problèmes importants de la théorie des groupes de Lie ; par exemple le problème de la détermination de tous les groupes de Lie et celui de l'équivalence par rapport à un groupe de transformations de Lie (théorie du repère mobile) . Les questions que j'ai traitées ici conduisent au problème général : trouver des critères de nature topologique pour qu'un groupe soit un groupe de Lie. Est-ce que tout groupe abstrait continu à r paramètres est un groupe de Lie ? Une réponse partielle à cette question a été donnée par M. J. von Neumann, qui a démontré que lorsqu'un groupe continu à r paramètres est compact, c'est un groupe de Lie . Le résultat est encore valable lorsque le groupe considéré est un groupe topologique compact , localement connexe et de dimension finie .

Un complément intéressant aux résultats que j'ai indiqués est aussi fourni par un théorème de H.Cartan :

<u>Tout noyau de groupe de transformations continu à</u>

<u>r paramètres dont les transformations sont analytiques complexes est un noyau de groupe de Lie</u> .

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

I. - S.LIE Theorie der Transformationsgruppen (tomes 1,2.3)

II.- F.SCHUR Uber den analytischen Charakter der eine endlische continuierliche Transformations-gruppe darstellenden Funktionnen (Math. Ann. t. 41)

III.-E.CARTAN La géométrie des groupes de transformations (Journal de Mathématiques pures et appl.1927)

IV.- E.CARTAN La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs (Mémorial 1930, fasc.XLII)

V. - E.CARTAN Repère mobile - Groupes continus - Espaces généralisés (Actualités scient. et ind.194)

VI.- E.CARTAN La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie (Enseignement math. 1936)

VII.-E.CARTAN La théorie des groupes continus finis et la géométrie différentielle traitée par la théorie du repère mobile (Gauthiers-Villars 1937)

VIII.-H.CARTAN Sur les groupes de transformations analytiques (Actualités scient. et ind. 198)

IX.- C.EHRESMANN Sur les espaces localement homogènes (Enseignement math. 1936) .