ÉLIE CARTAN

Les problèmes d'équivalence

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. n° 4, p. 1-40

<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A4_0>

IV.- D.

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-37

LES TRAVAUX de M.ELIE CARTAN

Les PROBLEMES d'EQUIVALENCE

Exposé fait par M.Elie CARTAN, le lundi 11 Janvier 1937

Exemplaire n° 3

Le problème dont je vais m'occuper, est, sous sa forme la plus générale, la recherche des conditions d'équivalence de deux systèmes de formes différentielles, ou d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, par rapport à un groupe de transformations continues au sens de Lie. Mais ce n'est pas sous cette forme générale que nous le considérerons, parce que nous ne sommes pas encore en possession d'une théorie générale des groupes continus , cette théorie trouvant précisément son origine dans la théorie d'équivalence, en apparence restreinte, que nous allons exposer . Elle s'appuie sur la théorie des systèmes de Pfaff en involution ; d'autre part, elle est à la base de la géométrie différentielle générale (méthode du repère mobile), de la théorie des espaces généralisés et d'une théorie d'intégration de certains systèmes différentiels qui admettent des caractéristiques de Cauchy. Il est bien entendu que les données seront toujours supposées analytiques , bien que les méthodes et les résultats gardent souvent leur validité sous des hypothèses moins restreintes .

Tout problème d'équivalence ressortit à l'Analyse, mais comporte préalablement un problème d'algèbre , qui est souvent d'une nature triviale, mais qu'il est important de mettre en évidence . Par exemple deux formes différentielles au même nombre n de variables , la première construite avec les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et leurs différentielles, la seconde construite avec les variables $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ et leurs différentielles , ne pourront être équivalentes, c'est-à-dire transformables l'une dans l'autre, par une trasformation analytique faisant passer des variables x_i aux variables $\overline{x}_i$, que si en deux points correspondants $(x,\overline{x})$ les deux formes , considérées comme formes algébriques en dx_i et $d\overline{x}_i$, sont algébriquement équivalentes , c'est-à-dire transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire faisant passer des dx_i aux $d\overline{x}_i$. S'il s'agit de deux formes différentielles quadratiques et que l'une soit décomposable en une somme de $p < n$ carrés indépendants, il faudra qu'il en soit de même pour l'autre . S'il s'agit de deux formes différentielles cubiques, (non extérieures) à trois variables, ces formes égalées à zéro peuvent être interprétées , quand on y regarde les différentielles comme des coordonnées homogènes d'un point dans un plan, comme définissant deux cubiques, l'équivalence des formes exigera qu'on puisse passer d'une cubique à l'autre par une substitution linéaire sur les coordonnées . d'où égalité des invariants projectifs de ces deux cubiques . Restons dans le cas général ; d'après un théorème classique les deux formes cubiques données F et $\overline{F}$ pourront être écrites

$$F = \omega_1^3 + \omega_2^3 + \omega_3^3 - 6\,k\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$$

$$\overline{F} = \overline{\omega}_1^3 + \overline{\omega}_2^3 + \overline{\omega}_3^3 - 6\,\overline{k}\,\overline{\omega}_1\,\overline{\omega}_2\,\overline{\omega}_3$$

ou $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont trois expressions de Pfaff linéairement indépendantes en dx_1, dx_2, dx_3 , et de même pour $\overline{\omega}_1$ $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$. Les formes canoniques ainsi obtenues peuvent être écrites d'un nombre fini de manières . L'équivalence des deux formes exigera la compatibilité de l'un au moins d'un nombre fini de systèmes de la forme

$$(1) \qquad \overline{k} = k \quad , \quad \overline{\omega}_1 = \omega_1 \; , \quad \overline{\omega}_2 = \omega_2 \; , \quad \overline{\omega}_3 = \omega_3$$

correspondant aux différentes manières (en nombre fini) d'identifier algébriquement les formes F et $\overline{F}$.

Revenons au cas de deux formes différentielles quadratiques à n variables et supposons-les définies positives . Chacune peut être ramenée à une somme de n carrés indépendants

$$F \equiv \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^2$$

$$\overline{F} \equiv \overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2 + \dots + \overline{\omega}_n^2$$

Ici l'identification algébriques des deux formes est possible d'une infinité de manières, on passe des ω_i à $\overline{\omega}_i$ par une substitution linéaire orthogonale. La condition d'équivalence des deux formes, au sens du problème qui nous intéresse est donc ici la condition de compatibilité de système de Pfaff obtenu en exprimant que les $\overline{\omega}_i$ se déduisent des ω_i par une substitution linéaire orthogonale (à coefficients a priori quelconques). Mais il est préférable pour conserver la symétrie entre les deux formes F et $\overline{F}$ d'introduire les formes ω_i^* qui se déduisent des ω_i par une substitution linéaire orthogonale arbitraire (ce qui fait apparaitre dans les coefficients des ω_i, $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres ou variables auxiliaires $u_1, u_2, \dots, u_{\frac{n(n-1)}{2}}$), d'introduire de même les formes $\overline{\omega}_i$ avec dans les coefficients $\frac{n(n-1)}{2}$ autres variables auxiliaires $\overline{u}_i$.

<u>La condition d'équivalence n'est alors autre que la condition de compatibilité des équations de Pfaff</u>

$$(2) \qquad \overline{\omega}_i^* = \omega_i^* \; ;$$

mais à la différence du cas des formes cubiques où n'intervenaient que les variables données , il intervient ici des variables auxiliaires .

On conçoit que dans tous les problèmes d'équivalence algébrique, on arrive à des résultats analogues, la transformation linéaire de variables qui réalise l'équivalence se réalise, grâce à un choix préalable convenable des variables, par les substitutions linéaires d'un groupe qui peut ne contenir qu'un nombre fini d'opérations ou en contenir une infinité . Le problème d'Analyse correspondant conduira à des systèmes analogues à (1) et (2) avec ou non introduction de variables auxiliaires .

Un exemple se rapportant à l'équivalence d'équations différentielles ne sera pas inutile . Considérons deux équations différentielles du second ordre

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) , \qquad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = \bar{F}\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)$$

Chacune d'elle peut être ramenée à un système de Pfaff , à savoir

$$(A) \quad \begin{cases} \omega_1 = dy - y'dx = 0 \\ \omega_2 = dy' - F(x,y,y')dx = 0 \end{cases} \qquad (\bar{A}) \quad \begin{cases} \bar{\omega}_1 = d\bar{y} - \bar{y}'d\bar{x} = 0 \\ \bar{\omega}_2 = d\bar{y}' - \bar{F}(\bar{x},\bar{y},\bar{y}')d\bar{x} = 0 \end{cases}$$

Chacun de ces systèmes , au point de vue algébrique, est un système de deux équations linéaires et homogènes à trois variables ; à ce point de vue , deux systèmes (A) et ($\bar{A}$) sont toujours algébriquement équivalents , et cette équivalence algébrique se réalise par les relations :

$$\bar\omega_1 = \alpha\ \omega_1 + \beta\ \omega_2$$

$$\bar\omega_2 = \alpha'\omega_1 + \beta'\ \omega_2$$

auxquelles il faut ajouter

$$d\bar x = \alpha''\ \omega_1 + \beta''\ \omega_2 + \gamma''dx\ .$$

Plus symétriquement, on posera

$$\omega_1^* = u\ \omega_1 + v\omega_2\ ,\quad \omega_2^* = u'\omega_1 + v'\omega_2\ ,\quad \omega_3^* = w\ dx + \lambda\ dy + \mu dy'$$

$$\bar\omega_1^* = \bar u\ \bar\omega_1 + \bar v\ \bar\omega_2\ ,\quad \bar\omega_2^* = \bar u'\ \bar\omega_1 + \bar v'\ \bar\omega_2\ ,\quad \bar\omega_3^* = \bar w\ d\bar x + \bar\lambda\ d\bar y + \bar\mu d\bar y'$$

avec sept variables auxiliaires pour chacun des systèmes, et l'équivalence se réalisera par l'égalité chacune à chacune des formes ω_i^* et $\bar\omega_i^*$

$$(4)\qquad \bar\omega_1^* = \omega_1^*\ ,\quad \bar\omega_2^* = \omega_2^*\ ,\quad \bar\omega_3^* = \omega_3^*$$

Mais il ne faut pas perdre de vue notre problème initial . La compatibilité du système (4) signifie qu'on peut effectuer une transformation des variables x, y, y' dans les variables $\bar x$, $\bar y$, $\bar y'$, transformant (A) en ($\bar A$) : en effet, les équations (4) donnent résolues, $d\bar x$, $d\bar y$, $d\bar y'$ comme combinaisons linéaires de dx, dy, dy' , et par suite entraînant la propriété de $\bar x$, $\bar y$, $\bar y'$ d'être des fonctions de x, y, y' . Mais on peut se proposer un problème d'équivalence tout à fait différent, par exemple se demander à quelles conditions on peut passer de la première équation différentielle (3) à la seconde, par une transformation

$(x,y \longrightarrow \bar{x},\bar{y})$. Naturellement l'introduction de la variable auxiliaire y' pour passer de l'équation différentielle à un système de Pfaff fait perdre de vue ce problème initial . Pour le retrouver, il suffit de limiter les substitutions linéaires considérées dans la partie purement algébrique du problème, à celles pour lesquelles $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, s'expriment linéairement en dx, dy , et en même temps $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ s'expriment linéairement en ω_1 et ω_2 . Il en résulte

$$d\bar{y} - \bar{y}'d\bar{x} = \alpha\,(dy - y'dx)$$
$$d\bar{y}' - \bar{F}d\bar{x} = \alpha'(dy-y'dx) + \beta'(dy'-Fdx)$$
$$d\bar{x} = \alpha''\, dx + \beta''\,(dy - y'dx)\ ;$$

on posant cette fois :

$$\omega_1^* = u\,(dy - y'dx)$$
$$\omega_2^* = u'(dy - y'dx) + v'(dy'-Fdx)$$
$$\omega_3^* = u''dx + v''\,dy$$

et définissant les $\bar{\omega}_i^*$ d'une manière analogue , les conditions d'équivalence sont les conditions de compatibilité du système

$$\bar{\omega}_1^* = \omega_1^* \quad , \quad \bar{\omega}_2^* = \omega_2^*, \qquad \bar{\omega}_3^* = \omega_3^*$$

où n'interviennent dans les seconds membres que trois variables auxiliaires u, u', v', u'', v'', au lieu de 7.

On pourrait aussi se proposer le problème d'équivalence des équations différentielles données par rapport au groupe des transformations de contact du plan, ce qui exigerait simplement que l'équation $dy - y'dx = 0$ se transformât en $d\bar{y} - \bar{y}'d\bar{x} = 0$. Il n'y aurait qu'à prendre les mêmes formes ω_i^* que dans le problème précédent, mais ω_3^* ayant la forme plus générale

$$\omega_3^* = u''dx + v''dy + w''dy'$$

Notons ici la remarque fondamentale que le groupe des transformations ponctuelles à deux variables x, y, a été utilisé par sa propriété caractéristique que $d\bar{x}$, $d\bar{y}$ sont des combinaisons linéaires de dx, dy, ce qui veut encore dire que <u>ce groupe est constitué par l'ensemble des transformations qui laissent invariantes les deux expressions de Pfaff $udx + vdy$, $u'dx + v'dy$</u>, où interviennent 4 variables auxiliaires, u, v, u', v'. Le groupe des transformations conformes du plan, qui reproduit $dx^2 + dy^2$ à un facteur fini près, est de même celui qui effectue sur dx, dy, la substitution linéaire

$$d\bar{x} = u\,dx - v\,dy$$

$$d\bar{y} = v\,dx + u\,dy$$

ou encore, qui laisse invariantes les deux formes $udx-vdy$ $vdx+udy$.

On conçoit que tout problème d'équivalence par rapport à un groupe qui peut se définir par l'invariance d'un systèmes de formes de Pfaff sera lui-même susceptible d'être ramené à un problème de compatibilité d'un système de Pfaff $\overline{\omega}_i = \omega_i$, analogue à ceux que nous avons trouvés jusqu'à présent .

Indiquons un dernier exemple qui est à l'origine de la géométrie finslérienne . Cherchons les conditions d'équivalence de deux intégrales $\int F(x,y,\frac{dy}{dx})\,dx$ et $\int \overline{F}(\overline{x},\overline{y},\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}})\,d\overline{x}$ par rapport au groupe des transformations de contact du plan . En introduisant les variables y' et $\overline{y}'$, il ne suffit pas d'exprimer qu'on peut par une transformation de contact changer la forme $F\,dx$ dans la forme $\overline{F}\,d\overline{x}$, car on suppose que dans l'intégration des formes on ait constamment $dy-y'dx = 0$ et $d\overline{y} - \overline{y}'d\overline{x}=0$ En réalité il faut donc exprimer la congruence

$$\overline{F}\,d\overline{x} = F\,dx \;(\text{mod.}\; dy - y'dx,\; d\overline{y} - \overline{y}'d\overline{x})$$

ce qui revient à

$$\overline{F}\,d\overline{x} + \overline{\alpha}\,(d\overline{y}-\overline{y}'d\overline{x}) = F\,dx + \alpha\,(dy-y'dx)$$

On sera ainsi conduit à introduire les formes

$$\omega_1 = F\,dx + u(dy - y'dx) \qquad \omega_2 = v(dy - y'dx)$$

$$\bar\omega_1 = \bar F\,d\bar x + \bar u(d\bar y - \bar y'd\bar x) \qquad \bar\omega_2 = \bar v(d\bar y - \bar y'd\bar x)$$

$$\omega_3 = w\,dy' + \lambda\,dx + \mu\,dy$$

$$\bar\omega_3 = \bar w\,d\bar y' + \bar\lambda\,d\bar x + \bar\mu\,d\bar y$$

avec $\bar\omega_1 = \omega_1 \qquad \bar\omega_2 = \omega_2 \qquad \bar\omega_3 = \omega_3$

L'égalité $\bar\omega_2 = \omega_2$ exprime que l'équivalence a lieu par rapport au groupe des transformations de contact ; mais les égalités $\bar\omega_1 = \omega_1$, $\bar\omega_2 = \omega_2$ montrent que l'équivalence a lieu <u>effectivement</u> par une transformation ponctuelle .

En définitive, <u>les problèmes d'équivalence par rapport à tout groupe, fini ou infini , susceptible d'être défini comme l'ensemble des transformations qui laissent invariantes une ou plusieurs formes de Pfaff se ramènent à l'étude de la compatibilité d'un système</u>

$$\text{(I)} \qquad \bar\omega_i = \omega_i \qquad (i=1,2.....,n)$$

<u>où les ω_i sont n formes différentielles linéairement indépendantes en dx_1, dx_2, ...,dx_n les $\bar\omega_i$ sont n formes différentielles linéairement indépendantes en</u> $d\bar x_1, d\bar x_2 ....$ $d\bar x_n$, <u>les coefficients de ces formes pouvant contenir des</u>

variables auxiliaires $y_1 \ldots y_p$. $\overline{y}_1 \ldots \overline{y}_p$. Il peut du reste s'ajouter au système (I) des équations finies

$$(I') \qquad \overline{F}_k(\overline{x}) = F_k(x)$$

Nous allons commencer par le cas où il n'y a pas de variable auxiliaire et nous supposerons, pour simplifier qu'il n'y a pas non plus d'équation finie (I'): le cas où il y en aurait se trouvera du reste examiné de lui-même dans l'exposé de la méthode .

Nous avons en somme à étudier la compatibilité du système (I) à n fonctions inconnues $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ de n variables indépendantes . Conformément à la théorie générale des systèmes de Pfaff , nous devons ajouter aux équations (I) les équations différentiées extérieurement $d\overline{\omega}^i = d\omega^i$ Mais nous pouvons exprimer les $d\omega^i$ sous la forme

$$d\omega^i = \frac{1}{2} c_{jk}^{\ i} \omega^j \omega^k \qquad (c_{jk}^{\ i} = -c_{kj}^{\ i})$$

où le signe de sommation est supprimé par rapport aux indices j et k . Les conditions $d\overline{\omega}^i = d\omega^i$ montrent que <u>les coefficients</u> $c_{jk}^{\ i}$ <u>sont des invariants</u> , et l'on doit ajouter aux équations (I) les équations

$$(II) \qquad \overline{c}_{jk}^{\ i}(\overline{x}) = c_{jk}^{\ i}(x)$$

Nous devons alors adjoindre au système (I), (II), les équations différentiées

$$d\,\bar{c}_{jk}{}^{i} = d\,c_{jk}{}^{i}$$

en posant

$$d\,c_{jk}{}^{i} = c_{jk}{}^{i}{}_{,h}\,\omega^{h}$$

on trouve une nouvelle série d'invariants :

$$\text{(III)} \qquad \bar{c}_{jk}{}^{i}{}_{,h}(\bar{x}) = c_{jk}{}^{i}{}_{,h}(x)$$

et ainsi de suite. On obtient pour chacun des systèmes donnés une suite illimitée d'invariants.

Mais il n'est pas nécessaire de former toute cette suite pour reconnaitre si les deux systèmes de formes données sont équivalentes.

Prenons d'abord un cas tout à fait particulier, mais qui a une importance capitale, celui où les invariants <u>fondamentaux</u> $c_{jk}{}^{i}$ sont tous constants pour le premier système. Il sera alors nécessaire pour l'équivalence des deux systèmes que les invariants fondamentaux $\bar{c}_{jk}{}^{i}$ aient les mêmes valeurs constantes. <u>Cette condition est suffisante</u>, car, si elle est réalisée, les équations $d\bar{\omega}^{i} = d\omega^{i}$ sont des conséquences des équations (I), et par suite le système (I) est complètement intégrable. Le changement de variables qui transforme les ω^{i} dans les $\bar{\omega}^{i}$ dépend de n constantes arbitraires. En particulier les formes ω^{i} du premier système sont invariantes ~~pour~~ par une famille de transformations dépendant de n constantes arbitraires, et ces transformations ~~font~~ forment manifestement un groupe, qu'on s'assure facilement être simplement transitif . Nous avons le premier exemple d'un groupe fini et continu défini comme l'ensemble des transformations qui laissent invariantes un certain nombre de formes différentielles .

Prenons maintenant l'autre cas extrême où parmi les invariants c_{jk}^{i} il y en a n indépendants , que nous appellerons I_1, I_2, ..., I_n . Il faudra pour l'équivalence des deux systèmes que les invariants $\bar{c}_{jk}^{i}$ de mêmes indices soient indépendants et qu'il y ait les mêmes relations entre les $\bar{c}_{jk}^{i}$ qu'entre les c_{jk}^{i} . Mais ces conditions ne sont pas suffisantes. L'équivalence exige la compatibilité du système

$$\bar{\omega}^{i} = \omega^{i}$$
$$\bar{I}_{h} = I_{h}$$

La différentiation extérieure donne

$$\bar{I}_{h,i}\,\bar{\omega}^{i} = I_{h,i}\,\omega^{i}$$

d'où

$$\bar{I}_{h,i} = I_{h,i}$$

en désignant par $I_{h,i}$ les invariants dérivés des invariants fondamentaux . Il ~~se peut~~ faut donc pour l'équivalence que les invariants dérivés $\bar{I}_{h,i}$ soient les mêmes fonctions des invariants fondamentaux $\bar{I}_{h}$ que pour le premier système .

Cette condition est suffisante , car si elle est réalisée, les relations

$$(IV) \quad dI_i = I_{i,k}\,\omega^k$$

dans lesquelles le tableau des coefficients $I_{i,k}$ des seconds membres est de déterminant non nul, montrant que le changement de variable défini par

$$\bar{I}_i = I_i$$

entraine de lui-même

$$\bar{\omega}^i = \omega^i$$

Il est assez paradoxal de remarquer que la conclusion reste exacte sans qu'on ait besoin de supposer que tous les invariants fondamentaux $c_{jk}^{\;i}$ autres que $I_1, I_2 \ldots I_n$ soient pour les deux systèmes les mêmes fonctions des $I_1, I_2, \ldots, I_n$. C'est qu'en effet cela est une conséquence de l'hypothèse relative aux $I_{i,k}$. Si en effet on différentie extérieurement (IV), on trouve, en égalant à zéro l'ensemble des termes en $\omega^h\omega^\ell$

$$c_{h\ell}^{\;k}\, I_{i,k} + \frac{\partial I_{i,\ell}}{\partial I_r} I_{r,h} - \frac{\partial I_{i,h}}{\partial I_r} I_{r,\ell} = 0$$

relations qui permettent de tirer tous les coefficients $c_{h\ell}^{\;k}$ en fonction des I_i et des $I_{i,k}$.

Passons maintenant <u>au cas général</u>. Supposons que les $c_{jk}^{\;i}$ soient au nombre de $\nu < n$ indépendants, que les $c_{jk}^{\;i}$ ~~zaxxxx~~ et leurs premiers dérivés soient au nombre de $\nu_1 > \nu$ indépendants, et ainsi de suite ;

supposons, pour fixer les idées que les c_{jk}^{i} et leurs dérivés des deux premiers ordres soient au nombre de $\nu_2 > \nu_1$ indépendants, mais que les dérivés du troisième ordre n'introduisent pas d'invariant indépendant des précédents. Alors la compatibilité des équations

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\omega}^{i} &= \omega^{i} \\ \overline{c}_{jk}^{i} &= c_{jk}^{i} \\ \overline{c}_{jh,h}^{i} &= c_{jh,h}^{i} \\ \overline{c}_{jk,h\ell}^{i} &= c_{jk,h\ell}^{i} \\ \overline{c}_{jk,h\ell m}^{i} &= c_{jk,h\ell m}^{i} \end{aligned}\right.$$

est une condition nécessaire d'équivalence. <u>Elle est suffisante</u>, car elle est réalisée, le système

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\omega}^{i} &= \omega^{i} \\ \overline{c}_{jk}^{i} &= c_{jk}^{i} \\ \overline{c}_{jk,h}^{i} &= c_{jk,h}^{i} \\ \overline{c}_{jk,h\ell}^{i} &= c_{jk,h\ell}^{i} \end{aligned}\right.$$

est complètement intégrable, puisque les équations obtenues par différentiation extérieure sont vérifiées d'elles-mêmes comme conséquence des équations données. La solution générale du système dépend du reste de $n - \nu_2$ constantes arbitraires .

En particulier, si l'on considère les formes ω^i du premier système, elles sont invariantes pour un groupe à $n - \nu_2$ paramètres . Ce groupe se présente comme formé de l'ensemble des transformations qui laissent invariantes ν_2 fonctions (ν_2 invariants indépendantes ~~des invariants~~) et n formes de Pfaff . C'est un groupe <u>intransitif</u> .

Enfin, une dernière question peut se poser . Il résulte manifestement de ce qui précède qu'un système de formes ω^i est caractérisé surabondamment par l'ensemble de tous ses invariants dérivés des différents ordres , puisque la connaissance de ses invariants dérivés jusqu'à l'ordre p+1 suffit au cas où la formation des invariants d'ordre p+1 n'introduit pas d'invariant indépendant de ceux des p premiers ordres . Le système est complètement caractérisé par les relations qui lient entre eux tous ces invariants . <u>Mais ces relations ne sont pas arbitraires</u> , et on peut se demander quelle est la manière la plus générale dont on peut se les donner . Je me bornerai au cas où les invariants fondamentaux c_{jk}^i en contiennent n indépendants I_i . Nous avons vu, alors, que le système était caractérisé par les fonctions $I_{i,k}$ des I_i . Ces fonctions étant connues on a les ω^i en résolvant les équations

$$\text{(V)} \qquad d\, I_i = I_{i,k}\, \omega^k$$

les fonctions $I_{i,k}$ des I_i seront admissibles si les formes ω^i que nous venons d'obtenir satisfont aux relations

$$d\,\omega^i = \frac{1}{2} c_{jk}{}^i \,\omega^j \omega^k$$

ou encore si les équations (V) différentiées extérieurement sont vérifiées en y remplaçant $d\,\omega^i$ par $\frac{1}{2} c_{jk}{}^i \omega^j \omega^k$

Le calcul a déjà été fait et a donné

$$\frac{\partial I_{i,\ell}}{\partial I_r} I_{r,h} - \frac{\partial I_{i,h}}{\partial I_r} I_{r,\ell} + c_{h\ell}{}^k I_{i,k} = 0$$

Si l'on élimine entre ces équations les $c_{h\ell}{}^k$ autres que les n invariants $I_1, \ldots, I_n$, on obtiendra un système d'équations aux dérivées partielles exprimant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions données $I_{i,k}$ des I_i satisfassent à la question . Ce système différentiel est en involution et sa solution générale dépend de $n^2 - n$ fonctions arbitraires de n arguments , ce qui serait facile à prévoir par un raisonnement , du reste peu rigoureux .

Le cas où les $c_{jk}{}^i$ sont des constantes a une extrême importance . Ces constantes <u>ne peuvent pas</u> être quelconques ; on retrouvera la question dans la théorie des groupes finis et continus , où elle fait l'objet du troisième théorème fondamental de S. Lié.

Passons maintenant au problème général d'équivalence tel que nous l'avons formulé : nous nous limiterons, ce qui n'est pas une restriction essentielle à l'étude de la compatibilité d'un système

$$(I) \qquad \bar{\omega}^{i} = \omega^{i}$$

où les ω^i sont n formes différentielles linéairement indépendantes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, avec des coefficients fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de p autres variables auxiliaires $y_1, y_2, \ldots, y_p$; les $\bar{\omega}^i$ étant définis d'une manière analogue avec les mêmes entiers n et p. En fait les ω^i se déduisent de n formes particulières où n'interviennent que les variables x_i par l'effet d'une substitution linéaire appartenant à un groupe à p paramètres les $\bar{\omega}^i$ se déduisent, elles aussi, de n formes particulières par l'effet d'une substitution linéaire appartenant au même groupe. Mais la méthode s'applique quelle que soit l'origine des variables auxiliaires. Nous nous bornerons du reste à quelques indications schématiques.

Les équations (I) entrainent évidemment si elles sont compatibles, que les $\bar{x}_i$ sont des fonctions des seules variables x. Les différentielles $d\omega^i$ sont évidemment linéaires par rapport aux dx_k, c'est-à-dire aux ω^k, mais contiennent aussi les différentielles des variables auxiliaires y, et l'on peut écrire

$$d\,\omega^i = \omega^k\,\varpi^i_k$$

le signe de sommation par rapport à k étant omis, les ϖ^i_k étant linéaires par rapport aux dx_i et aux dy_j ; chaque ϖ^i_k n'est du reste pas complètement déterminée, car on peut lui ajouter certaines combinaisons linéaires des ω^i sans altérer les seconds membres . Quoi qu'il en soit , supposons que q d'entre elles soient linéairement indépendantes (mod. dx_1, dx_2, ..., dx_n); appelons-les ϖ^1, ϖ^2, ... ϖ^q . On pourra écrire

$$\varpi^j_i = a_{ik}^j\,\varpi^k \quad (\text{mod. } \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n)$$

Il est clair que les a_{ik}^j <u>sont des invariants</u> . Si l'un de ces invariants dépend effectivement des variables y_1, y_2, ..., y_q, on pourra disposer des variables auxiliaires de manière que cet invariant prenne une valeur numérique fixe[1]; il est clair alors que les équations (I) exigeront que les variables auxiliaires $\overline{y}_i$ satisfassent aux mêmes conditions, c'est-à-dire, soient telles que l'invariant

---

(1) Il est clair qu'il y aura lieu ici de préciser ; une classification, du reste conforme à la nature des choses, sera à faire . En fait, dans le cas où nous nous sommes

$\bar{a}_{ik}^{j}$ de même nom prenne la même valeur numérique fixe . La considération des invariants a_{ik}^{j} permet donc dans certains cas de réduire le nombre des variables auxiliaires , et cela tant qu'il se présentera des invariants de la nature indiquée qui dépendent effectivement des variables auxiliaires .

Nous pouvons maintenant supposér effectuée la réduction du nombre des variables auxiliaires de manière que les invariants a_{ik}^{j} ne dépendent plus que des variables x_1 x_2, ..., x_n . A ce moment là deux autres sources de réduction pourront se présenter . Si les invariants obtenus ne sont pas tous constants, les invariants dérivés I_1, I_2.... I_n de l'un d'entre eux I

$$dI = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + \dots + I_n \omega_n$$

pourront dépendre encore des variables auxiliaires . En outre les formules

$$d\omega^i = a_{kh}^{i} \omega^k \varpi^h \quad (\text{mod } \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n)$$

montrent que les équations (I) si elles sont compatibles, entraînent

$$\bar{\varpi}^h = \varpi^h \quad (\text{mod. } \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n)$$

(suite) : [illegible]plaées, où les variables auxiliaires ne sont autres que les paramètres d'un groupe linéaire , les invariants a_{ik}^{j} sont des constantes numériques ,de sorte que la question ne se poserait pas .

D'après l'esprit de la méthode générale , il y a lieu d'introduire les q formes invariantes

$$(\varpi^h)^* = \varpi^h - z_k^h \, \omega^k$$

avec les variables auxiliaires z_k^h , on aura alors

$$d\omega^i = a_{kh}^{\;i} \, \omega^k (\varpi^h)^* + \frac{1}{2} c_{kh}^{\;i} \, \omega^k \omega^h ;$$

les $c_{kh}^{\;i}$ sont encore des invariants qui dépendent du reste linéairement des variables auxiliaires z_k^h : <u>on disposera de ces variables de manière à annuler le plus grand nombre</u> possible de ces invariants . Ceux qui restent , s'ils dépendent effectivement de variables auxiliaires y_i qui ont été conservées, permettent encore une réduction et ainsi de suite .

Finalement on peut supposer que les seuls invariants restants ne dépendent que de x_1, x_2, ... x_n ainsi que leurs invariants dérivés successifs

Dans ces conditions, le système (I) peut être compatible , exigera l'égalité chacun à chacun des invariants obtenus ; on le complètera donc par un système d'équations finies

$$\text{(II)} \qquad \overline{I}_k = I_k$$

tel que les équations (I) et (II) différentiées , ne donnent plus d'équations finies nouvelles et conduisent à aux seules équations

$$a_{kh}^{\ i}\ \omega^k \left[(\bar{\varpi}^i_k)^* - (\varpi^i_k)^* \right] = 0$$

Si les coefficients a^i_{kh} forment un <u>système involutif</u>, le système (I), (II) sera en involution, et sa solution générale dépendra de <u>fonctions arbitraires</u>, au cas du moins où il restera des variables auxiliaires y. Chacun des deux systèmes donnés admettra un groupe infini déterminé par l'ensemble des transformations qui laissent invariantes les fonctions I_k et les formes ω^i. S'il ne reste aucune variable auxiliaire y, c'est qu'on aura été ramené chemin faisant au premier problème étudié (absence de variables auxiliaires).

S'il reste des variables auxiliaires, et que le système de coefficients ne soit pas involutif, <u>on prolongera</u> le système (I) (II) par l'adjonction des équations

$$(\bar{\varpi}^j_i)^* = (\varpi^j_i)^*$$

et on sera ramené à un problème de même nature que le problème initial, avec comme nouvelles variables $x_1, x_2 \dots x_n$ et les y_k, les nouvelles variables auxiliaires étant les z^j_i, s'il y en a.

Toutes ces opérations auront une fin puisque, d'après la théorie générale, l'intégration du système (I) initial peut, par prolongements successifs, être ramenée à celle d'un système en involution, au cas, du moins, où il y a compatibilité.

La méthode générale qui vient d'être esquissée fournit donc à la fois les conditions d'équivalence, la suite des invariants différentiels, et aussi <u>une suite de formes invariantes différentielles</u>. Les invariants différentiels sont donnés par des différentiations, au lieu que la méthode de S. Lie les fournit par des intégrations de systèmes complets

---

Il ne sera pas inutile de donner quelques exemples particulièrement simples.

<u>Problème I</u>

<u>On considère dans un plan deux familles de courbes à un paramètre. Conditions d'équivalence par rapport au groupe des transformations conformes du plan</u>.

Rapportons le plan à un système de coordonnées rectangulaires x, y, et soit, en chaque point M du plan, θ l'angle que fait avec Ox la tangente en M à la courbe de la première famille qui passe par ce point. θ est une fonction donnée de x, y. L'équation différentielle des courbes de la famille est

$$- \sin \theta \, dx + \cos \theta \, dy = 0$$

Posons

$$\omega_1 = u \, (\cos \theta \, dx + \sin \theta \, dy)$$
$$\omega_2 = u \, (-\sin \theta \, dx + \cos \theta \, dy)$$

l'équation $\omega_1 = 0$ est l'équation des trajectoires orthogonales des courbes données .

En posant de même

$$\bar{\omega}_1 = \bar{u} \, (\cos \bar{\theta} \, d\bar{x} + \sin \bar{\theta} \, d\bar{y})$$

$$\bar{\omega}_2 = \bar{u} \, (-\sin \bar{\theta} \, d\bar{x} + \cos \bar{\theta} \, d\bar{y})$$

les conditions d'équivalence sont les conditions de compatibilité du système

$$\text{(I)} \qquad \bar{\omega}_1 = \omega_1 \qquad\qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2$$

Si ce système est vérifié les deux familles de courbes données seront tranformées l'une dans l'autre par une transformation ponctuelle telle que

$$\bar{u}^2 \, (d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2) = u^2 \, (dx^2 + dy^2)$$

ce sera une transformation conforme .

On a ici

$$d \, \omega_1 = \frac{du}{u} \, \omega_1 + u \, (\cos \theta \, \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \, \frac{\partial \theta}{\partial y}) \, dx \, dy$$

$$d\,\omega_2 = \frac{du}{u}\,\omega_2 + u\left(-\sin\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) dx\,dy$$

On posera conformément à la théorie générale

$$\frac{du}{u} = \varpi + \lambda\,dx + \mu\,dy$$

d'où

$$d\,\omega_1 = \varpi\,\omega_1 + \frac{1}{u}\left(\lambda\sin\theta - \mu\cos\theta + \cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\omega_1\,\omega_2$$

$$d\,\omega_2 = \varpi\,\omega_2 + \frac{1}{u}\left(\lambda\cos\theta + \mu\sin\theta - \sin\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\omega_1\,\omega_2$$

On peut annuler les deux quantités entre parenthèses en prenant

$$\lambda = -\frac{\partial\theta}{\partial y} \qquad \mu = \frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\varpi = \frac{du}{u} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\,dx - \frac{\partial\theta}{\partial x}\,dy$$

On est donc ramené à trois formes ω_1, ω_2, ω_3 $(=\varpi)$ linéairement indépendantes en dx, dy, du. Le calcul donne

$$d\,\omega_1 = \varpi\,\omega_1$$

$$d\,\omega_2 = \varpi\,\omega_2$$

$$d\,\varpi = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)\omega_1\,\omega_2$$

On arrive ainsi au premier invariant $\frac{1}{u^2}\,\Delta\theta$

Si $\Delta\theta = 0$ pour la première famille de courbes, il faudra que $\Delta\bar{\theta} = 0$ pour la seconde : les deux familles seront équivalentes et la transformation conforme qui réalise l'équivalence dépend de trois constantes arbitraires .

La condition $\Delta\theta = 0$ exprime que la première famille s'obtient en égalant à une constante arbitraire la partie réelle (ou la partie imaginaire) d'une fonction analytique de $x + iy$. Cette famille admet un groupe à trois paramètres formé par l'ensemble des transformations qui laissent invariantes les formes

$$\omega_1 = u\,(\cos\theta\,dx + \sin\theta\,dy)\ , \quad \omega_2 = u(-\sin\theta\,dx + \cos\theta\,dy)$$

$$\omega_3 = \frac{du}{u} + \frac{\partial\theta}{\partial y}dx - \frac{\partial\theta}{\partial x}\,dy$$

Si $\Delta\theta \neq 0$, par exemple $\Delta\theta > 0$, on disposera de la variable auxiliaire u pour rendre l'invariant $\frac{1}{u^2}\Delta\theta$ égal à 1, ce qui conduira aux deux formes invariantes :

$$\omega_1 = \sqrt{\Delta\theta}\,(\cos\theta\ dx + \sin\theta\ dy)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\Delta\theta}\,(-\sin\theta\,dx + \cos\theta\ dy)$$

et on sera ramené au problème traité en premier lieu .
La forme ω_3 étant dépendante de ω_1 et ω_2 :
$\omega_3 = a\ \omega_1 + b\ \omega_2$, les coefficients a et b sont des invariants . Ils ne peuvent , du reste, être constants tous

les deux, car les égalités

$$d\,\omega_1 = \omega_3\,\omega_1 = -\,b\,\omega_1\,\omega_2$$

$$d\,\omega_2 = \omega_3\,\omega_2 = a\,\omega_1\,\omega_2$$

$$d\,\omega_3 = -\,\omega_1\,\omega_2$$

donnent les relations

$$b_1 - a_2 = -1$$

entre les premiers invariants dérivés, ce qui exclut la possibilité pour ces invariants dérivés d'être tous nuls. Une famille de courbes qui ne rentre pas dans le premier type est donc invariante au plus par un groupe à un paramètre de transformations conformes.

<u>Problème II</u>

<u>On considère sur une droite un champ de forces $F(t,x,\frac{dx}{dt})$ et on suppose imposée la mesure du temps t. Etudier les conditions d'équivalence de deux champs de forces par rapport au groupe infini des changements arbitraires (analytiques) de la coordonnée d'espace x.</u>

La donnée est ici l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} - F\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

par rapport au groupe $t' = t \quad x' = f(x)$, qu'on peut définir par l'invariance de la variable t et des formes dt et $\alpha\, dx$. L'équation différentielle étant remplacée par le système de Pfaff

$$dx - x'dt = 0 \qquad dx' - F\,dt = 0$$

on aura les formes invariantes

$$\omega_1 = dt \; , \quad \omega_2 = \frac{dx}{x'}$$

$$\omega_3 = u\left[(dx' - F\,dt) + v\,(dx - x'\,dt)\right]$$

Les relations

$$d\,\omega_1 = 0$$

$$d\,\omega_2 = \frac{dx\,dx'}{x'^2} = \left(v + \frac{F}{x'}\right)\omega_1\,\omega_2 + \frac{1}{ux'}\,\omega_2\,\omega_3$$

conduisent aux deux invariants $v + \frac{F}{x'}$ et $\frac{1}{ux'}$. On peut donc disposer les variables auxiliaires de manière à annuler le premier et à rendre le second égal à 1.

$$u = \frac{1}{x'} \; , \quad v = -\frac{F}{x'}$$

d'où

$$\omega_3 = \frac{dx'}{x'} - \frac{F}{x'^2}\,dx$$

Il ne reste plus de variables auxiliaires. Le calcul donne

$$d\,\omega_1 = 0 \qquad d\,\omega_2 = \omega_2\,\omega_3$$

$$d\,\omega_3 = -\frac{1}{x'}\,\frac{\partial F}{\partial t}\,\omega_1\,\omega_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{2F}{x'}\right)\omega_2\,\omega_3$$

et conduit aux <u>invariants fondamentaux</u>

$$I_1 = -\frac{1}{x'}\frac{\partial F}{\partial t} \quad . \quad I_2 = \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{2F}{x'}$$

Les champs de force équivalents à zéro sont ceux qui annulent ces deux invariants , à savoir

$$F = X(x) \; . \; x'^2 \quad .$$

chacun d'eux admet un groupe à deux paramètres (la variable t ne peut être transformée).

<u>Problème III</u>

<u>Propriétés topologiques de la figure formée par trois familles à un paramètre de courbes planes</u> (premier problème de la géométrie textile).

Soient

$$\frac{dy}{dx} = F_i\,(x,y) \qquad (\,i = 1,2,3\,)$$

les équations différentielles des courbes des trois familles Ces données sont équivalentes à un système de trois formes de Pfaff

$$\omega_i = u_i\,(dy - F_i\,dx) \qquad (i = 1,2,3)$$

Ces trois formes ne sont pas linéairement indépendantes ; elles sont liées par la relation

$$\frac{F_2 - F_3}{u_1}\,\omega_1 + \frac{F_3 - F_1}{u_2}\,\omega_2 + \frac{F_1 - F_2}{u_3}\,\omega_3 = 0$$

on disposera des variables auxiliaires u_i de manière à rendre égaux les trois coefficients, ce qui donne

$$u_1 = u(F_2 - F_3) \qquad u_2 = u(F_3 - F_1)$$

$$u_3 = u(F_1 - F_2)$$

Il suffira alors de considérer les deux premières formes

$$\omega_1 = u(F_2 - F_3)(dy - F_1 dx)$$

$$\omega_2 = u(F_3 - F_1)(dy - F_2 dx)$$

On est ramené à un problème analogue au problème I . On aura

$$d\omega_1 = \varpi\,\omega_1 \; , \qquad d\omega_2 = \varpi\,\omega_2$$

en posant $\varpi = \frac{du}{u}$ + une combinaison linéaire convenable de dx et dy .

On a ensuite

$$d\varpi = \frac{H}{u^2}\,\omega_1\,\omega_2$$

H étant une fonction de x, y.

1°- si H = 0, (réseau hexagonal de Blaschke) la figure est équivalente à celle formée par trois familles de droites parallèles ; elle admet un groupe à trois paramètres .

2°- si $H \neq 0$, on pose $u = \sqrt{H}$ et on est ramené à deux formes à deux variables .

On pourrait encore traiter le problème en réduisant les deux premières familles données aux deux familles de droites parallèles aux axes et on aurait alors l'étude d'une équation différentielle $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ par rapport au groupe infini $x' = f(x)$, $y' = \varphi(y)$, ce qui conduit aux deux formes

$$\omega_1 = u\,F\,dx \quad , \quad \omega_2 = u\,dy$$

Problème IV

Trouver les conditions d'applicabilité de deux surfaces données par leur ds^2 .

Dans les problèmes précédents, nous avons fait effectivement les calculs , au moins au début ; mais il y a beaucoup de cas, spécialement dans les recherches théoriques où la nature des résultats peut être prévue sans que les calculs aient besoin d'être effectués complètement . Nous allons montrer sur ce dernier problème comment on peut procéder .

Le premier ds^2 donné étant supposé d'une manière particulière décomposé en une somme de deux carrés $\omega_1^2 + \omega_2^2$ nous poserons

$$\overset{*}{\omega}_1 = \omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta \quad , \quad \overset{*}{\omega}_2 = -\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta$$

en introduisant une variable auxiliaire θ ; les variables dont dépend le $d\overline{s}$ seront désignés par x_1, x_2, mais n'interviendront pas effectivement.

On a

$$d\,\omega_1^* = d\theta\,(-\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta) + d\omega_1 \cos\theta + d\omega_2 \sin\theta$$

le second membre est de la forme

$$d\,\omega_1^* = d\theta\,\omega_2^* + a\,\omega_1^*\,\omega_2^*$$

On a de même

$$d\,\omega_2^* = -\,d\theta\,\omega_1^* + b\,\omega_1^*\,\omega_2^*$$

On posera

$$\omega_3^* = d\theta + a\,\omega_1^* + b\,\omega_2^*$$

ce qui donnera

$$d\,\omega_1^* = \omega_3^*\,\omega_2^*, \qquad d\,\omega_2^* = -\,\omega_3^*\,\omega_1^*$$

Les trois formes ω_1^*, ω_2^*, ω_3^* sont linéairement indépendantes en dx_1, dx_2, $d\theta$. La différentielle $d\,\omega_3^*$ a priori peut être une forme quadratique extérieure quelconque, en ω_1^*, ω_2^*, ω_3^*, mais nous allons voir qu'elle est très particulière. En effet, la différentiation extérieure de $d\,\omega_1^*$ et $d\,\omega_2^*$ donne

$$d\,\omega_3^*\cdot\omega_2^* - \omega_3^*\,d\omega_2^* = 0 \qquad \text{ou} \qquad d\,\omega_3^*\cdot\omega_2^* = 0$$

$$- d\omega_3^* \omega_1^* + \omega_3^* d\omega_1^* = 0 \quad \text{ou} \quad d\omega_3^* \omega_1^* = 0$$

la forme $d\,\omega_3^*$ s'annulant avec ω_1^* et avec ω_2^* est donc nécessairement

$$d\,\omega_3^* = - K\ \omega_1^*\ \omega_2^*$$

Nous obtenons un premier invariant K . A priori cet invariant pourrait dépendre de x_1 , x_2 , et θ ; nous allons voir qu'il ne dépend pas de θ . Car la différentiation extérieure de la dernière équation obtenue donne

$$d\,K\omega_1^*\omega_2^* + K\,d\,\omega_1^*\omega_2^* - K\,\omega_1^*\,d\,\omega_2^* = 0$$

ou en simplifiant,

$$d\,K\,\omega_1^*\,\omega_2^* = 0$$

la différentielle dK s'annulant quand on annule à la fois ω_1^* et ω_2^* , c'est-à-dire dx_1 et dx_2 , c'est que K est une fonction de x_1 . x_2 . Sans être obligé d'entrer dans aucun calcul effectif, nous démontrons donc l'existence d'une fonction construite avec les coefficients du ds^2 et qui se conserve par déformation : c'est la <u>courbure totale</u> .

Deux surfaces qui ont la même courbure totale constante sont applicables et l'application dépend de trois constantes arbitraires, car nous sommes dans le cas de trois formes ω_i à trois variables avec des coefficients c_{jk}^{i} constants .

Nous ne poursuivrons pas plus loin la discussion. Contentons-nous de dire que si K n'est pas constant, on peut se débarrasser de l'inconnue auxiliaire θ, de manière que la différentielle dK ne dépende que de ω_1^*.

En passant remarquons que le groupe des déplacements du plan correspond à $ds^2 = dx^2 + dy^2$, avec

$\omega_1^* = dx \cos\theta + dy \sin\theta$, $\omega_2^* = -dx \sin\theta + dy \cos\theta$

$$\omega_3^* = d\,\theta$$

On voit la signification géométrique de ces formes : ce sont les composantes relatives de la translation et de la rotation que subit un système d'axes rectangulaires d'origine (x,y) faisant l'angle θ avec les axes fixes. L'étude des propriétés géométriques élémentaires d'une courbe plane $y = f(x)$ n'est autre que l'étude du système formé par l'équation de cette courbe et les trois formes ω_i^*. En tenant compte de l'équation donnée, ces trois formes deviennent

$$\omega_1^* = (\cos\theta + y'\sin\theta)\,dx \quad ,$$

$$\omega_2^* = (-\sin\theta + y'\cos\theta)\,dx \qquad \omega_3^* = d\,\theta$$

Les deux premières sont proportionnelles, leur rapport est un invariant ; en choisissant θ de manière que cet invariant soit nul ($\theta = \operatorname{arctg} y'$), ce qui est un choix de nature invariante, on aura

$$\omega_1^* = \sqrt{1 + y'^2}\ dx \qquad \omega_3^* = \frac{y''}{1+y'^2}\ dx$$

la première forme n'est autre que l'élément d'arc ds de la courbe, le rapport $\frac{\omega_3^*}{\omega_1^*}$ n'est autre que la courbure $\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$. C'est l'exemple le plus simple d'un problème, traité par la méthode du repère mobile, ayant pour objet l'étude des propriétés des figures envisagées par rapport à un groupe. Le problème I est un problème traité d'une manière tout à fait analogue, mais pour le groupe <u>infini</u> des transformations conformes du plan.

Revenons à une surface quelconque; bien qu'on ait pas dans ce cas affaire à un groupe, on peut néanmoins appliquer les mêmes procédés pour étudier les propriétés d'une ligne tracée sur la surface comme si cette surface était un plan ; la détermination de la variable auxiliaire θ faite par le même procédé conduira à une forme ω_3^* qui ne sera autre que $\frac{ds}{\rho g}$, en désignant par $\frac{1}{\rho g}$ la courbure géodésique. C'est l'exemple le plus simple d'un <u>espace généralisé</u> dans lequel les procédés d'une géométrie différentielle fondée sur un groupe continuent à s'appliquer sans qu'aucun groupe règne dans l'espace.

Nous avons ramené tous les problèmes d'équivalence à la considération de formes différentielles linéaires. Il est des cas admettant un traitement plus simple. Considérons, par exemple, une forme différentielle quadratique <u>extérieure</u> ω à différentielle extérieure $d\omega$ identiquement nulle. Au point de vue algébrique la forme peut être écrite

$$\omega = \omega_1 \omega_2 + \omega_3 \omega_4 + \dots + \omega_{2p-1} \omega_{2p}$$

les ω_i étant $2p$ formes différentielles linéaires indépendantes. L'entier p est un invariant et la forme ω (si $d\omega = 0$) peut être écrite au moyen de $2p$ variables. Deux formes ω, $\overline{\omega}$, correspondant au même entier p sont toujours équivalentes, l'équation $\overline{\omega} = \omega$ à $2p$ fonctions inconnues $\overline{x}_i$ de $2p$ variables indépendantes x_i étant en involution avec

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{2p-1} = 1$$

En particulier toute forme ω de rang $2p$ et de différentielle nulle est équivalente à la forme

$$\omega_0 = dx_1\, dx_2 + dx_3\, dx_4 + \dots + dx_{2p-1}\, dx_{2p} \;;$$

elle admet un groupe infini, caractérisé précisément par la propriété de laisser invariante la forme ω.

Si $d\omega \neq 0$, la discussion du problème d'équivalence est beaucoup plus compliquée et il faut appliquer la méthode générale .

Un autre cas intéressant et simple est fourni par une forme extérieure de degré $n-1$ à n variables : une telle forme est toujours algébriquement réductible à

$$\omega = \omega_1 \, \omega_2 \, \ldots\ldots \, \omega_{n-1}$$

Deux cas sont à distinguer .

a) $d\,\omega = 0$; alors la forme est toujours équivalente à

$$\omega = dx_1 \, dx_2 \, \ldots\ldots \, dx_{n-1}$$

b) $d\,\omega \neq 0$; alors la forme est toujours réductible à

$$\omega = dx_n \cdot dx_1 \, dx_2 \ldots\ldots dx_{n-1}$$

Dans ce dernier cas par exemple, la forme admet un groupe infini obtenu en prenant pour $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ des fonctions arbitraires des $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ et en prenant ensuite

$$\bar{x}_n = \frac{x_n}{\dfrac{D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots, \bar{x}_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1})}}$$

Il me reste à dire quelques mots d'une application des méthodes précédentes à l'intégration de certains systèmes différentiels. Je me contenterai de l exemple fourni par un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre, dit en involution

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0 \qquad \Phi(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$$

système étudié par E. Goursat. Imaginons qu'on ait exprimé r, s, t en fonction de x, y, z, p, q et d'un paramètre u. Le système donné peut être ramené au système de Pfaff

$$\theta_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

$$\theta_2 = dp - r\,dx - s\,dy = 0$$

$$\theta_3 = dq - s\,dx - t\,dy = 0$$

On a, en tenant compte des équations précédentes

$$d\,\theta_1 = 0$$

$$d\,\theta_2 = \left(\frac{dr}{dy} - \frac{ds}{dx}\right) dx\,dy + \frac{\partial r}{\partial u} dx\,du + \frac{\partial s}{\partial u} dy\,du$$

$$d\,\theta_3 = \left(\frac{ds}{dy} - \frac{dt}{dx}\right) dx\,dy + \frac{\partial s}{\partial u} dx\,du + \frac{\partial t}{\partial u} dy\,du$$

où l'on a posé

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q}$$

Le système est en involution si les deux formes réduites $d\,\theta_2$, $d\,\theta_3$ sont proportionnelles

$$\frac{\dfrac{\partial r}{\partial y} - \dfrac{\partial s}{\partial x}}{\dfrac{\partial s}{\partial y} - \dfrac{\partial t}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial r}{\partial u}}{\dfrac{\partial s}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial s}{\partial u}}{\dfrac{\partial t}{\partial u}}$$

Dans ce cas les trois équations $\theta_i = 0$ peuvent s'écrire au moyen de cinq variables seulement : ces variables sont les intégrales premières du système des <u>caractéristiques</u> obtenu en annulant θ_1, θ_2, θ_3 et les dérivées partielles de $d\theta_2$, par rapport à dx, dy, du .

Toute variété intégrale à deux dimensions est engendrée par des courbes caractéristiques si l'on connait ces dernières , on n'a qu'à chercher les solutions à une dimension du système $\theta_i = 0$, à cinq variables , solutions qui indiquent de quelle manière il faut associer les courbes caractéristiques pour engendrer une surface intégrale .
Or, dans le cas général, <u>les caractéristiques sont connues par des différentiations .</u>

En effet, les opérations qui servent à obtenir les invariants différentiels du système donné par rapport au groupe de toutes les transformations analytiques portant sur x, y, z, p, q, u peuvent se faire quelles que soient les variables choisies: si l'on imagine qu'on ait choisi les 5 variables intégrales premières des équations des caractéristiques, ces opérations ne pourront conduire qu'à des fonctions de ces cinq variables. En général, le système total des invariants en contiendra cinq indépendants qui fourniront cinq intégrales premières. On conçoit qu'une méthode analogue puisse s'appliquer toutes les fois qu'un système différentiel admet des caractéristiques au sens de Cauchy.

BIBLIOGRAPHIE

E. CARTAN

- Les sous-groupes des groupes continus de transformations (Ann. Ec. Norm. 25 - 1908, chap. I, p.57)

- Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre (Ann. Ec. Norm. 27 - 1910, p.10)

- Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés (Mathematica, 4, 1930, p.114)

- Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes (Annali di matem. 11, 1932, p.18)

- La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'')\,dx$ (J. de Math. 1936, p.42).

J. Dubourdieu — Questions topologiques de géométrie différentielle (Mém. de Math. 78) 1936