C. CHEVALLEY

Les représentations des algèbres de Lie

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. nº 10, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A14_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-37

Les TRAVAUX de M. Elie CARTAN

Les représentations des algèbres de Lie

Exposé fait par M. C. CHEVALLEY, le lundi 10 Mai 1937

Exemplaire n° 3

On désignera dans ce qui suit par k un corps algébrique fermé de caractéristique 0 et par $\mathcal{A}$ une algèbre de Lie sur k.

Rappelons qu'on appelle <u>représentation</u> de $\mathcal{A}$ une homomorphie de $\mathcal{A}$ avec une algèbre de Lie composée de transformations linéaires d'un espace linéaire $\mathcal{M}$ par rapport à k . $\mathcal{M}$ s'appelle <u>espace de représentation</u> ; sa dimension s'appelle degré de la représentation .

$\vec{e}$ étant un élément de $\mathcal{M}$, nous désignerons en général par $X\vec{e}$ l'élément qui s'en déduit par application de la transformation linéaire qui correspond à l'élément X de $\mathcal{A}$: autrement dit, nous donnons le même nom aux éléments de $\mathcal{A}$ et aux transformations linéaires qui leur correspondent

Si on choisit dans $\mathcal{M}$ une base minima, les transformations linéaires de $\mathcal{M}$ se représentent par des matrices et on obtient une représentation de $\mathcal{A}$ par des matrices .

L'ensemble $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathcal{A}$ qui sont représentés par la transformation 0 constitue une sous-algèbre invariante de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}$, ou tout élément de $\mathcal{B}$, ou toute partie de $\mathcal{B}$, est <u>annulé</u> par la représentation .

Si $\mathcal{B} = \{0\}$, la représentation est dite <u>fidèle</u>. Dans le cas général, la représentation fournit une représentation fidèle de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$.

Un sous-espace $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ est dit <u>invariant</u> si, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a $x\,\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$. Il en est notamment ainsi si pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a $x\,\mathfrak{N} = \{0\}$, auquel cas on dit que $\mathfrak{N}$ ou tout élément de $\mathfrak{N}$, est <u>annulé</u> par la représentation .

L'espace de représentation $\mathfrak{M}$ (ou la représentation elle-même) est dire <u>irréductible</u> s'il n'y a pas d'autre sous-espaces invariants que $\{0\}$ et $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{N}$ étant un sous-espace invariant, $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ sont évidemment de nouveaux espaces de représentation . On démontre qu'on peut toujours choisir une chaine $\mathfrak{N}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \ldots\ldots\subset \mathfrak{N}_h = \mathfrak{M}$ de sous-espaces invariants tels que les espaces $\mathfrak{N}_{i+1} / \mathfrak{N}_i$ soient irréductibles . Le théorème de Jordan-Holder s'applique à ces chaines : deux d'entre elles ont la même longueur h et les espaces quotients $\mathfrak{N}_{i+1} / \mathfrak{N}_i$ qu'elles fournissent sont les mêmes, à l'ordre près .

L'espace de représentation $\mathfrak{M}$ (ou la représentation elle-même) est dite <u>complètement réductible</u> si $\mathfrak{M}$ est une somme directe de sous-espaces invariants irréductibles . Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'à tout sous-espace invariant $\mathfrak{N}$ on puisse en faire correspondre un autre $\mathfrak{N}'$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}'$.

Théorème 1

Soit $\mathcal{H}$ la plus grande sous algèbre invariante résoluble de $\mathcal{A}$, et soit $\mathcal{A}'$ l'algèbre dérivée de $\mathcal{A}$. Toute représentation irréductible de $\mathcal{A}$ annule $\mathcal{H} \cap \mathcal{A}'$.

En effet, $\mathcal{H}$ étant résoluble , il existe dans $\mathcal{M}$ un vecteur $\vec{e}_0$ tel que , pour tout $H \in \mathcal{H}$, on ait $H \vec{e}_0 = \lambda_H \vec{e}_0$ où λ_H est une fonction de H à valeurs dans **K** . Soit $\mathcal{N}$ l'espace engendré par les vecteurs $\vec{e}$ jouissant de la propriété suivante : il existe pour chacun d'eux un entier N tel que

$$(H-\lambda_H)^N \vec{e} = 0$$

On voit facilement que $\mathcal{N}$ est invariant : donc $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Si d est la dimension de $\mathcal{M}$, la trace de la transformation linéaire fournie par H est donc $d\lambda_H$. Or cette trace est nulle si $H \in \mathcal{A}'$; on a, dans ce cas, $\lambda_H = 0$. L'espace $\mathcal{N}_1$ des éléments de $\mathcal{M}$ qui sont annulés par tous les éléments de $\cap \mathcal{A}'$ étant évidemmeht invariant et contenant $\vec{e}_0$, on a $_1 = \mathcal{M}$, ce qui démontre le théorème .

Il en résulte que, s'il existe une représentation fidèle complètement réductible de $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{H} \cap \mathcal{A}' = \{0\}$: $\mathcal{A}$ est somme directe de $\mathcal{A}'$, qui est semi-simple, et d'une algèbre commutative, **dont les éléments sont d'ailleurs** représentés par des multiples de la transformation unité (Cartan). Ceci démontre, en particulier, le théorème de Jacobson énoncé dans l'exposé précédent .

Inversement, une algèbre qui est somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre commutative admet évidemment des représentations fidèles complètement réductibles . Mais en général, elle admet aussi des représentations non complètement réductibles .

Par contre, nous allons maintenant démontrer le théorème suivant .

<u>Théorème 2.</u>

<u>Toute représentation d'une algèbre semi-simple est complètement réductible</u> .

$\mathfrak{M}$ étant un espace de représentation de $\mathfrak{A}$, choisissons une base minima $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ de $\mathfrak{A}$, et formons le déterminant $|S_{\mathfrak{M}}(X_iX_j)|$, où $S_{\mathfrak{M}}$ représente la trace de la transformation linéaire de $\mathfrak{M}$. Ce déterminant s'appelle le <u>discriminant</u> de la représentation .

<u>Lemme 1 .</u>

<u>Le discriminant d'une représentation irréductible $\neq 0$ d'une algèbre simple est $\neq 0$</u> .

Si ce discriminant était nul, il y aurait un $X \neq 0$

tel que, pour tout $Y \in \mathcal{A}$, on ait $S_{\mathfrak{M}}(XY) = 0$. Les X jouissant de cette propriété formeraient une sous-algèbre invariante de $\mathcal{A}$, donc égale à $\mathcal{A}$. Il nous suffit donc de démontrer qu'il existe un X et un Y tels que $S_{\mathfrak{M}}(XY) \neq 0$

Nous mettrons l'algèbre $\mathcal{A}$ sous forme réduite par rapport à une sous-algèbre commutative maxima $\mathcal{C}$. Soient α, $-\alpha$, ... les racines $\neq 0$ et soit E_α un élément appartenant à la racine α.

Nous dirons qu'un vecteur $\vec{e}$ possède un poids Λ s'il existe une forme linéaire $\Lambda = \Lambda(H)$ définie sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans k, telle que, pour tout $H \in \mathcal{C}$ on ait $H\vec{e} = \lambda_H \vec{e}$. Il existe au moins un vecteur $\neq 0$ qui possède un poids. De plus, si $\vec{e}$ possède le poids Λ, $E_\alpha \vec{e}$ possède le poids $\Lambda + \alpha$. Il en résulte que l'espace $\mathfrak{M}$ est engendré par des vecteurs qui ont des poids.

$\vec{e}$ étant un vecteur différent de 0 ayant un poids on peut évidemment l'indérer dans une suite finie $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_h$ de vecteurs $\neq 0$ tels que :

1) $E_{-\alpha} \vec{e}_0 = 0$

2) $\vec{e}_{i+1} = E_\alpha \vec{e}_i \qquad (i=0,1,....,h-1)$

3) $E_\alpha \vec{e}_h = 0$

On voit facilement par récurrence sur i que

$$E_{-\alpha} E_\alpha \vec{e}_i = -\frac{i+1}{2} \left(\Lambda_\alpha + \frac{i}{2} \alpha_\alpha \right) \vec{e}_i$$

où Λ est le poids de $\vec{e}_0$ et où Λ_α et α_α représentent les valeurs prises par Λ et par α pour $H=H_\alpha=[E_\alpha, E_{-\alpha}]$

D'où

$$\Lambda_\alpha + \frac{h}{2}\alpha_\alpha = 0$$

et

$$E_{-\alpha} E_\alpha \vec{e} = \frac{(s+1)(h-s)}{2}\alpha_\alpha \vec{e} \qquad \text{si} \quad \vec{e} = \vec{e}_s$$

Or $\frac{(s+1)(h-s)}{2}$ est un nombre rationnel ≥ 0, qui n'est nul que si $h = s$, d'où $E_\alpha \vec{e} = 0$. Comme $\alpha_\alpha \neq 0$, et qu'il existe au moins un $\vec{e}$ tel que $E_\alpha \vec{e} \neq 0$, on a $S_{\mathfrak{M}}(E_{-\alpha} E_\alpha) \neq 0$, ce qui démontre le lemme.

<u>Lemme 2</u> (de Whitehead)

<u>$\mathfrak{M}$ étant un espace de représentation d'une algèbre simple, faisons correspondre à chaque</u> $X \in \mathcal{A}$ <u>un élément</u> $e_X \in \mathfrak{M}$. <u>Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un vecteur $\vec{e}$ tel que, pour tout X,</u> $\vec{e}_X = X\vec{e}$ <u>sont que</u> :

1) <u>la correspondance</u> $X \longrightarrow \vec{e}_X$ <u>soit linéaire</u>

2) <u>on ait</u>

$$\vec{e}_{[XY]} = X\vec{e}_Y - Y\vec{e}_X$$

Les conditions sont évidemment nécessaires. Pour montrer qu'elles sont suffisantes, envisageons plusieurs cas :

1) La représentation donnée par $\mathfrak{M}$ est la représentation O . Dans ce cas, on a $\vec{e}_{[XY]} = 0$; $\mathfrak{A}$ étant simple, donc égale à sa dérivée, on a $\vec{e}_X = 0$, et $\vec{e} = 0$ est une solution .

2) La représentation donnée par $\mathfrak{M}$ est irréductible et $\neq 0$. Soit d son degré . Prenons une base minima $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ de $\mathfrak{A}$. Le discriminant $|S_{\mathfrak{M}}(X_i X_j)|$ étant $\neq 0$, il existe une base "complémentaire" $(X^1, X^2, \dots X^r)$ telle que l'on ait

$$S_{\mathfrak{M}}(X_i X^j) = \begin{matrix} 1 & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j \end{matrix}$$

Par suite, X étant un élément quelconque de $\mathfrak{A}$, on a

$$X = \sum_{i=1}^{n} S_{\mathfrak{M}}(X X^i) X_i$$

Posons $U = \sum_{i=1}^{r} X_i X^i$. X étant un élément quelconque de $\mathfrak{A}$, on a

$$[X,U] = \sum [X,X_i] X^i + \sum X_i [X,X^i] =$$

$$\sum_{i,j} S_{\mathfrak{M}}([X,X_i] X^j) X_j X^i + \sum_{i,j} S_{\mathfrak{M}}([X,X^i] X_j) X_i X^j = 0$$

comme il résulte tout de suite des propriétés des traces .

D'autre part, on a $S_{\mathfrak{M}}(U) = r \neq 0$; il en résulte , l'espace étant irréductible, que $U = \frac{r}{d} 1$, où 1 représente la transformation linéaire unité . On voit alors tout de suite que $\vec{e} = \sum X^i \vec{e}_{X_i}$ donne la solution cherchée .

3) Dans le cas général, nous procéderons par récurrence sur la dimension d de $\mathcal{M}$. Le lemme étant déjà démontré pour les représentations de degrés $< d$, supposons l'espace $\mathcal{M}$ réductible ; il admet un sous-espace invariant $\mathcal{N}$ de dimension $d' < d$; $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ est espace de représentation de dimension $d - d' < d$. Il existe donc un vecteur $\vec{e}'$ tel que

$$\vec{e}_X \equiv X \vec{e}' \quad (\mathrm{mod.}\ \mathcal{N})$$

Posons $\vec{e}'_X = \vec{e}_X - X\vec{e}'$; les vecteurs $\vec{e}'_X$ de $\mathcal{N}$ satisfont encore aux conditions 1), 2), du lemme . Il existe donc dans $\mathcal{N}$ un vecteur $\vec{e}''$ tel que $\vec{e}'_X = X\vec{e}''$. Le vecteur $\vec{e} = \vec{e}' + \vec{e}''$ fournit une solution .

Le lemme de Whitehead est encore valable pour les algèbres semi-simples $\mathcal{A}$. Nous le démontrerons par récurrence sur l'ordre r de $\mathcal{A}$. Supposons-le vrai pour toutes les algèbres semi-simples d'ordres $< r$. Soit $\mathcal{M}$ un espace de représentation de $\mathcal{A}$. Choisissons dans $\mathcal{A}$ une sous-algèbre invariante simple $\mathcal{A}_1$. Il existe une algèbre invariante semi-simple $\mathcal{A}_2$ telle que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$
Il existe dans $\mathcal{M}$ un vecteur $\vec{e}$ tel que $\vec{e}_{X_1} = X_1 \vec{e}$ si $X_1 \in \mathcal{A}_1$; si nous posons $\vec{e}'_X = \vec{e}_X - X\vec{e}$, nous ob-

tenons de nouveaux vecteurs satisfaisant encore aux conditions du lemme . De plus, si $X_1 \in \mathcal{A}_1$, $X_2 \in \mathcal{A}_2$, on a $[X_1 X_2] = 0$, d'où $X_1 \vec{e}'_{X_2} = 0$; les $\vec{e}'_{X_2}$ sont dans le sous-espace invariant $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ qui est annulé par $\mathcal{A}_1$ or, $\mathfrak{N}$ est espace de représentation de $\mathcal{A}_2$; il existe donc un $\vec{e}' \in \mathfrak{N}$ tel que $\vec{e}'_{X_2} = X_2 \vec{e}'$. Le vecteur $\vec{e} + \vec{e}'$ fournit alors une solution du problème .

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2 .

Soit $\mathfrak{M}$ un espace de représentation de l'algèbre semi-simple $\mathcal{A}$, et soit $\mathfrak{N}$ un sous-espace invariant . Déterminons un espace linéaire $\mathfrak{N}'$ tel que $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}'$ $\vec{e}$ étant un élément de $\mathfrak{M}$, posons $X \vec{e} = U_X \vec{e} + V_X \vec{e}$ où $U_X \vec{e} \in \mathfrak{N}$, $V_X \vec{e} \in \mathfrak{N}'$. U_X et V_X sont des applications linéaires de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ et dans $\mathfrak{N}'$.

On a $V_X U_X = 0$ et

$$U_{[X,Y]} = U_X U_Y - U_Y U_X + U_X V_Y - U_Y V_X$$

$$V_{[X,Y]} = X_X V_Y - V_Y V_X$$

Or les applications linéaires U de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ forment elles-mêmes un espace linéaire $\mathfrak{U}$; en posant $X(U)=U_X U-UV_X$ on fait correspondre à chaque $X \in \mathcal{A}$ une transformation linéaire de $\mathfrak{U}$, et on voit facilement que cette correspondance est une représentation . En vertu des formules qu'on vient d'écrire , on a

$$U_{[X,Y]} = X\,(U_Y) - Y\,(U_X)$$

Par suite , en vertu du lemme de Whitehead, il existe un élément $U_o \in \mathcal{U}$ tel que, pour tout X, $U_X = X\,(U_o)$. On en tire $X(\vec{e} - U_o\,\vec{e}) = V_X\,\vec{e} - U_o\,(V_X\,\vec{e})$. Il en résulte que les vecteurs $\vec{e} - U_o\,\vec{e}$, pour $\vec{e} \in \mathfrak{N}'$, forment un sous-espace invariant $\mathfrak{N}''$ tel que $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}''$ ce qui démontre le théorème 2 .

On peut déduire de là une généralisation du lemme 1. $\mathcal{A}$ étant une algèbre simple, soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_h$ un espace de représentation de $\mathfrak{M}$, les $\mathfrak{M}_i$ étant des espaces de représentation irréductibles . On a $S_{\mathfrak{M}}(E_{-\alpha}\,E_\alpha) = \sum S_{\mathfrak{M}_i}(E_{-\alpha}\,E_\alpha) = \sum \rho_i\,\alpha_\alpha$, les ρ_i étant des nombres rationnels $\geqq 0$, et ρ_i n'étant nul que si $\mathfrak{M}_i$ donne la représentation 0 . On en déduit que le discriminant d'une représentation $\neq 0$ d'une algèbre simple est $\neq 0$. On en conclut facilement que :

<u>Le discriminant d'une représentation fidèle d'une algèbre semi-simple est $\neq 0$</u> .

Détermination des représentations irréductibles d'une algèbre simple

Considérons une algèbre simple $\mathcal{A}$ que nous mettrons sous forme réduite par rapport à une sous-algèbre commutative maxima $\mathcal{C}$, α , β ..... désignant les racines, on peut supposer que les nombres α_α sont rationnels . Soit $\mathcal{M}$ un espace de représentation irréductible . Il résulte de la formule (1) que pour tout poids Λ , les nombres Λ_α sont rationnels . Prenons n racines linéairement indépendantes , $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n étant la dimension de $\mathcal{C}$. Λ pourra être considéré comme une combinaison linéaire $\sum \rho_i \alpha_i$ de ces racines . En vertu de ce que nous venons de dire, les coefficients ρ_i sont nécessairement rationnels .

Ceci va nous permettre de définir une notion d'ordre dans l'ensemble fini des poids . Soient $\Lambda = \sum \rho_i \alpha_i$, $\Lambda' = \sum \rho'_a \alpha_i$ deux poids . Nous dirons que Λ' est supérieur à Λ si, a étant le plus petit indice tel que $\rho'_a \neq \rho_a$, on a $\rho'_a > \rho_a$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de poids, il y en aura un, Λ_0 , qui sera plus grand que tous les autres . Il s'appelle le poids dominant .

Ceci posé, M.Cartan a démontré le théorème suivant:

Théorème 3.

Une représentation irréductible est entièrement déterminée (à une isomorphie près) par son poids dominant .

La démonstration s'appuie sur les considérations suivantes : $\mathcal{A}$ étant une algèbre de Lie, prenons-y une base $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ et considérons les X_i comme des variables avec lesquelles on construit des polynomes non-commutatifs $\varphi(X_i)$. Les $c_{i,j,k}$ étant les constantes de structure , considérons l'ensemble linéaire $\mathfrak{a}$ engendré par tous les polynomes de la forme $\theta\,(X_iX_j - X_jX_i - \sum c_{i,j,k}X_k)\,\theta'$. Il est clair que tout polynome φ peut se mettre sous la forme $\varphi_1 + \varphi_2$ où $\varphi_2 \in \mathfrak{a}$, et où φ_1 est un polynome dont tous les monomes sont de la forme $a\,X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_m}$, avec $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m$.

Si $\mathfrak{M}$ est un espace de représentation de $\mathcal{A}$, et si $\vec{e}$ est un vecteur de $\mathfrak{M}$, on définit immédiatement le vecteur $\varphi\,\vec{e}$. On a $\varphi_2\,\vec{e} = 0$, si $\varphi_2 \in \mathfrak{a}$, d'où

$\varphi\,\vec{e} = \varphi_1\,\vec{e}$.

$\mathcal{A}$ étant supposée semi-simple, et mise sous forme réduite par rapport à une sous-algèbre commutative maxima $\mathcal{C}$ nous rangerons les éléments d'une base minima de $\mathcal{A}$ en mettant d'abord les E_α qui correspondent à des racines

$\alpha < 0$, puis ceux qui correspondent à des $\alpha > 0$; puis les éléments d'une base minima H_1, H_2, ... H_n de $\mathcal{C}$. Nous appellerons poids d'un monome la somme des racines qui figurent en indices dans les facteurs de ce monome. Nous dirons qu'un polynome φ est isobare de poids ϖ si tous ses monomes sont de poids ϖ. Si $\vec{e}$ est un vecteur de poids Λ d'un espace de représentation, $\varphi \vec{e}$ est alors nul ou de poids $\Lambda + \varpi$. Si on met de la manière indiquée plus haut, φ sous la forme $\varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_2 \in \mathfrak{n}$, φ_1 et φ_2 sont isobares en même temps que φ et de même poids que lui.

Ceci posé, prenons un espace de représentation $\mathcal{M}$ et un vecteur $\vec{e}_o$ de poids dominant Λ_o. On a le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : <u>φ étant un polynome isobare de poids 0, on a $\varphi \vec{e}_o = \rho \vec{e}_o$, où ρ est un élément de k qui ne dépend que du polynome φ</u>.

Mettons φ sous la forme $\varphi_1 + \varphi_2$ indiquée plus haut. On a $\varphi \vec{e}_o = \varphi_1 \vec{e}_o$. Un monome de φ_1 est de la forme $a E_\alpha E_\beta \ldots\ldots E_\lambda H_{i_1} H_{i_2} \ldots\ldots H_{i_s}$ avec

$$\alpha + \beta + \ldots\ldots + \lambda = 0 , \quad \alpha \leq \beta \leq \ldots\ldots \leq \lambda .$$

Si le monome contient au moins un E_α, on a $\lambda > 0$. Le vecteur $H_{i_1} H_{i_2} \ldots\ldots H_{i_s} \vec{e}_o$ est nul ou de poids Λ_o ; $\Lambda_o + \lambda$ n'étant pas un poids, on a $E_\lambda H_{i_1} H_{i_2} \ldots H_{i_s} \vec{e}_o = 0$

On en conclut que ρ est la valeur prise par φ_1 en y remplaçant les E_α par 0 et les H_i par les nombres $\Lambda_o(H_i)$ ce qui démontre le lemme .

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3 . Soient $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, deux espaces de représentation irréductibles admettant le même poids dominant Λ_o . Prenons-y des vecteurs $\vec{e}_o$, $\vec{e}'_o$ de poids Λ_o . $\mathfrak{M}$ étant irréductible, est évidemment identique à l'ensemble des vecteurs $\varphi \vec{e}_o$. Considérons tous les polynomes $\bar{\varphi}$ tels que $\bar{\varphi} \vec{e}_o = 0$. Les vecteurs $\bar{\varphi}\ \vec{e}'_o$ forment évidemment un sous-espace invariant $\mathfrak{N}'$ de $\mathfrak{M}'$. Montrons que $\vec{e}'_o \notin \mathfrak{N}'$. En effet, si on avait $\bar{\varphi} \vec{e}_o = 0$, $\bar{\varphi} \vec{e}'_o = \vec{e}'_o$, les mêmes formules seraient vraies en remplaçant $\bar{\varphi}$ par la somme $\vec{\bar{\varphi}}$ de ceux de ses monomes qui sont de poids 0 . Mais on aurait alors en vertu du lemme $\bar{\bar{\varphi}} \vec{e}_o = \rho\, \vec{e}_o$, $\bar{\bar{\varphi}} \vec{e}'_o = \rho\, \vec{e}'_o$, ce qui est impossible . $\mathfrak{M}'$ étant irréductible, on a $\mathfrak{N}' = \{0\}$. $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ jouant des rôles symétriques , on voit que la correspondance $\varphi \vec{e}_o \longleftrightarrow \varphi \vec{e}'_o$ est une isomorphie de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{M}'$, ce qui démontre le théorème de M.Cartan .

Il résulte de là que la recherche des représentations irréductibles d'une algèbre simple est ramenée aux problèmes suivants : trouver tous les poids dominants possibles - trouver pour chaque poids dominant une représentation irréductible l'admettant . Ces problèmes ont été entièrement résolus par M. Cartan pour chacun des types d'algèbres simples. Nous nous contenterons de donner quelques indications rapides sur la solution.

Les quantités α_α sont connues dès qu'on connait la structure de l'algèbre semi-simple. D'autre part, si Λ est un poids dominant et si α est une racine > 0, on doit avoir, en tenant compte de ce que $\Lambda + \alpha$ n'est plus un poids, $\Lambda_\alpha = \frac{h}{2}\alpha_\alpha$, h étant un entier ≥ 0. M. Cartan a démontré que les formes linéaires Λ qui satisfont à cette condition sont toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers ≥ 0 de n d'entre elles, $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_n$ qu'on peut appeler les poids dominants fondamentaux. Il a également montré que, dans chaque cas, chacun de ces poids dominants fondamentaux est effectivement le poids dominant d'une représentation irréductible qu'il a construite. D'autre part, on peut montrer que :

<u>Si</u> Λ <u>et</u> Λ' <u>sont les poids dominants de deux représentations irréductibles</u>, $\Lambda + \Lambda'$ <u>est le poids dominant d'une nouvelle représentation irréductible</u>.

Soient, en effet, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des espaces de représentation comportant les poids dominants Λ, Λ'. Prenons des bases minima $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_m)$ et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots\ldots, \vec{f}_n)$ de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{N}$, composées de vecteurs ayant des poids, $\vec{e}_1$ étant de poids Λ et $\vec{f}_1$ de poids Λ'. Posons $X \vec{e}_i = \sum_\lambda a_{i\lambda}(X) \vec{e}_\lambda$ et $X \vec{f}_j = \sum b_{j\mu}(X) \vec{f}_\mu$. Prenons un espace linéaire $\mathcal{L}$ de dimension mn admettant une base $\vec{g}_{ij}$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$) et posons $X \vec{g}_{ij} = \sum a_{i\lambda} b_{j\mu} \vec{g}_{\lambda\mu}$. $\mathcal{L}$ devient, au moyen de ces formules, espace de représentation de $\mathcal{A}$; la représentation ainsi obtenue est appelée produit kronéckerien des représentations fournies par $\mathfrak{M}$ et par $\mathfrak{M}'$. Le vecteur $\vec{g}_{11}$ est de poids dominant $\Lambda + \Lambda'$; en prenant le plus petit espace invariant contenant ce vecteur, on obtient un espace de représentation satisfaisant aux conditions imposées.

Il en résulte que toute combinaison linéaire à coefficients entiers = 0 des poids dominants fondamentaux, est le poids dominant d'une représentation irréductible, et qu'on obtient ainsi toutes les représentations irréductibles.

<u>Théorème de Lévi</u>.

Des méthodes analogues à celles qui lui ont servi à démontrer la complète réductibilité des représentations des algèbres semi-simples ont permis à M. Whitehead de donner une démonstration du très important théorème suivant dû à Levi :

<u>Théorème 4</u>

$\mathcal{A}$ <u>étant une algèbre de Lie</u>, $\mathcal{X}$ <u>sa plus grande</u>

sous-algèbre invariante résoluble . $\mathcal{A}$ contient une sous-algèbre isomorphe à $\mathcal{A}/\mathcal{H}$.

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant:

Lemme : Soit $\mathcal{M}$ un espace de représentation d'une algèbre semi-simple $\mathcal{A}$. A chaque couple (X,Y) d'éléments de $\mathcal{A}$, faisons correspondre un vecteur $\vec{f}_{X,Y} \in \mathcal{M}$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces vecteurs puissent se mettre sous la forme $\vec{f}_{X,Y} = X\vec{e}_Y - Y\vec{e}_X - \vec{e}_{[X,Y]}$, où les $\vec{e}_X$ soient des vecteurs dépendant linéairement de X , sont que :

1) $\vec{f}_{X,Y}$ dépende linéairement de X et de Y ;

2) on ait

$$\vec{f}_{X,Y} + \vec{f}_{Y,X} = 0 \qquad Z\vec{f}_{X,Y} + X\vec{f}_{Y,Z} + Y\vec{f}_{Z,X} = \vec{f}_{[X,Y],X} + \vec{f}_{[Y,Z],X} + \vec{f}_{[Z,X],Y}$$

On voit tout de suite que ces conditions sont nécessaires . Inversement, supposons-les remplies . Nous allons envisager divers cas :

1) La représentation donnée par $\mathcal{M}$ est la représentation 0 . Formons un espace linéaire $\mathcal{N}$ dont les éléments sont en correspondance bi-univoque avec ceux de $\mathcal{A}$, et formons l'espace $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. $\vec{g}_Y$ étant l'élément de $\mathcal{N}$ qui correspond à Y, posons $X\vec{g}_Y = \vec{f}_{X,Y} + \vec{g}_{[X,Y]}$

et $X\vec{f} = 0$ si $\vec{f} \in \mathfrak{M}$. On obtient une représentation de $\mathfrak{A}$ dans laquelle $\mathfrak{M}$ est sous-espace invariant. Il existe donc un autre sous-espace invariant $\mathfrak{N}_1$ de $\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$ tel que $\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}_1$. Soit $\vec{g}'_Y$ l'élément de $\mathfrak{N}_1$ qui est congru (mod. $\mathfrak{M}$) à $\vec{g}_Y$. On a $X\vec{g}'_Y = X\vec{g}_Y = \vec{f}_{X,Y} + \vec{g}_{[X,Y]} \in \mathfrak{N}_1$; donc $f_{X,Y} = \vec{g}'_{[X,Y]} - \vec{g}_{[X,Y]}$ ne dépend que du crochet $[X,Y]$, ce qui démontre le lemme dans ce cas.

2) Supposons que $\mathfrak{M}$ donne une représentation irréductible fidèle. Dans ce cas, le discriminant de la représentation est $\neq 0$. Prenons une base $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ de $\mathfrak{A}$, et la base complémentaire $(Z^1, Z^2, \dots, Z^r)$. On voit comme plus haut que la transformation linéaire $\sum Z_i Z^i$ est égale à $\frac{r}{d}\,1$, si d est le degré de la représentation.

Posons :

$$\vec{e}_X = \frac{d}{r}\sum Z^i\,\vec{f}_{Z_i,X}$$

La condition 2) donne

$$\vec{f}_{X,Y} = X\vec{e}_Y - Y\vec{e}_X - \vec{e}_{[X,Y]} + \frac{d}{r}\left\{\sum Z^i\vec{f}_{[Y,Z_i],X} - \sum [Z^i,Y]\,\vec{f}_{Z_i,X}\right\}$$

$$+ \frac{d}{r}\left\{\sum Z^i\,\vec{f}_{[Z_i,X],Y} - \sum [Z^i,X]\,\vec{f}_{Y,Z_i}\right\}$$

Or, si nous posons $[Y,Z_i] = \sum b_{i,j} Z_j$, nous avons

$b_{i,j} = S_{\mathfrak{M}}([Y,Z_i]\,Z^j) = S_{\mathfrak{M}}([Z^j,Y]\,Z_i)$, d'où $[Z^i,Y] = \sum b_{ji} Z_i$, de sorte que les deux termes entre accolades sont nuls, ce qui démontre le lemme dans ce cas .

3) Supposons maintenant seulement $\mathfrak{M}$ irréductible . On a $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. $\mathcal{A}_1$ étant annulé par $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}$ fournissant une représentation irréductible fidèle de $\mathcal{A}_2$. Il en résulte qu'on peut trouver des vecteurs $\vec{e}_X$, tels que l'égalité $\vec{f}_{X,Y} = X\,\vec{e}_Y - Y\,\vec{e}_X - \vec{e}_{[X,Y]}$ soit vraie quand X et Y sont à la fois contenus dans $\mathcal{A}_1$, ou dans $\mathcal{A}_2$. Posons $\vec{f'}_{X,Y} = \vec{f}_{X,Y} - X\,\vec{e}_Y + Y\,\vec{e}_X + \vec{e}_{[X,Y]}$. Ces nouveaux vecteurs vérifient encore les conditions du lemme . Prenant $X,Y \in \mathcal{A}_1$, et $Z \in \mathcal{A}_2$, il vient $\vec{f'}_{[X,Y],Z} = 0$. L'algèbre $\mathcal{A}_1$ étant sa propre dérivée, on a $\vec{f'}_{X,Y} = 0$ pour $X \in \mathcal{A}_1$, $Z \in \mathcal{A}_2$, donc $\vec{f'}_{X,Y} = 0$ quels que soient X, Y . Le lemme est encore démontré dans ce cas .

4) On passe au cas général en procédant par récurrence sur le degré de la représentation exactement comme pour le premier lemme de Whitehead .

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Lévi . Nous le ferons par récurrence sur l'ordre r de $\mathcal{A}$.

Supposons le théorème démontré pour toutes les algèbres d'ordres $< r$. Si l'algèbre dérivée $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ est $\neq \{0\}$, $\mathcal{A}/\mathcal{H}'$ est d'ordre $< r$, donc contient une algèbre $\mathcal{A}_1/\mathcal{H}'$ isomorphe à $\mathcal{A}/\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}' \neq \mathcal{H}$, $\mathcal{A}_1$ est d'ordre $< r$, et contient par suite une sous-algèbre isomorphe à $\mathcal{A}_1/\mathcal{H}'$ et à $\mathcal{A}/\mathcal{H}$. Supposons donc $\mathcal{H}' = \{0\}$: $\mathcal{H}$ est commutative et constitue un espace de représentation de l'algèbre semi-simple $\mathcal{A}/\mathcal{H}$. $\mathcal{A}$ contient un espace linéaire $\mathcal{A}^*$ tel que $\mathcal{A} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{A}^*$ et il existe une correspondance linéaire biunivoque $X \longleftrightarrow X^*$ entre $\mathcal{A}/\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}^*$. Posons $H_{X,Y} = [X^*, Y^*] - [X, Y]^*$. Les éléments $H_{X,Y}$ de $\mathcal{H}$ ainsi déterminés satisfont aux conditions du lemme. Il existe donc des éléments $H_X \in \mathcal{H}$ dépendant linéairement de X tels que

$$H_{X,Y} = [X^*, H_Y] - [Y^*, H_X] - H_{[X,Y]}$$

Il en résulte que les éléments $X^* - H_X$ forment une sous-algèbre de $\mathcal{A}$, isomorphe à $\mathcal{A}/\mathcal{H}$.

<u>Représentation linéaire des algèbres de Lie quelconques</u>

M. Ado a tout récemment démontré le théorème suivant:

<u>Théorème 5</u>

<u>Toute algèbre de Lie possède une représentation li-</u>

néaire fidèle .

La démonstration de ce théorème étant fort longue et compliquée, et étant probablement susceptible de simplifications importantes , nous ne ferons qu'en indiquer quelques aspects .

1. Si nous considérons d'abord une algèbre $\mathcal{A}$ de rang 0 (nilpotente) , on démontre qu'on peut construire une algèbre $\mathcal{B}$ (également de rang 0) telle que $\mathcal{A}$ soit isomorphe à l'algèbre quotient de $\mathcal{B}$ par une sous-algèbre invariante $\mathcal{C}$ qui contient le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{B}$. Comme la représentation adjointe de $\mathcal{B}$ est une représentation fidèle de $\mathcal{B}/\mathcal{Z}$, on voit que $\mathcal{A}$ est isomorphe à une algèbre quotient $(\mathcal{B}/\mathcal{Z})$ / $(\mathcal{C}/\mathcal{Z})$ d'une algèbre qui possède une représentation fidèle. L'existence d'une représentation fidèle pour une algèbre de rang 0 se déduit alors du lemme suivant:

Lemme : Toute algèbre quotient d'une algèbre de Lie qui admet une représentation fidèle admet aussi une représentation fidèle .

La construction de l'algèbre $\mathcal{B}$ dont nous venons de parler se fait par extensions centrales successives ; les extensions centrales étant définies de la manière suivante : on appelle extension centrale d'une algèbre $\mathcal{A}$ une nouvelle algèbre $\mathcal{A}_1$ telle que $\mathcal{A}$ soit isomorphe au quotient de $\mathcal{A}_1$

par une sous-algèbre de $\mathcal{A}_1$ qui fasse partie à la fois du centre et de l'algèbre dérivée de $\mathcal{A}_1$. M.Ado démontre qu'une algèbre de rang 0 admet toujours une extension centrale non triviale , qui est encore de rang 0 , et que l'on peut former à partir de $\mathcal{A}$ une chaine $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}$ d'algèbres de Lie dont chacune est extension centrale de la précédente , et dont la dernière jouit des propriétés énoncées plus haut .

Quant au lemme , le principe de sa démonstration est le suivant : considérons une algèbre de Lie $\mathcal{A}$ composée de substitutions linéaires portant sur n variables x_1, x_2,... .. x_n. On voit facilement que les polynomes en les x_i de degrés bornés par un nombre d forment encore un espace de représentation de $\mathcal{A}$. Soit maintenant $\mathcal{C}$ une sous-algèbre invariante de $\mathcal{A}$ dont on suppose d'abord qu'elle est de rang 0 et contenue dans l'algèbre dérivée de $\mathcal{A}$. M.Ado montre alors que, si d est assez grand, on peut trouver une famille linéaire de polynomes qui soient annulés par tous les éléments de $\mathcal{C}$ et par ceux-là seulement . Cette famille de polynomes fournit alors un espace de représentation fidèle de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$. Ceci fait, il est assez facile de généraliser pour une sous-algèbre invariante quelconque, et de démontrer ainsi le lemme

2) M. Ado démontre que, dans toute algèbre de Lie $\mathcal{A}$ existe une sous-algèbre invariante Γ de rang 0 maxima (qui contient toutes les autres) . Les éléments de $\mathcal{A}$ définissent alors des automorphies de Γ . Par extensions centrales successives, on passe de Γ à une nouvelle algèbre de rang 0 Γ_1, qui permet de construire une représentation linéaire de Γ . Or on démontre que toute automorphie de Γ peut être prolongée par une automorphie de Γ_1 . On en déduit qu'on peut fabriquer une algèbre $\mathcal{A}^*$ composée de transformations linéaires contenant Γ comme sous-algèbre invariante, et telle que toute automorphie de Γ puisse être engendrée par un élément de $\mathcal{A}^*$. De cette manière se trouve établie une correspondance entre les éléments de $\mathcal{A}$, considérés comme produisant des automorphies de Γ , et certains éléments de $\mathcal{A}^*$, qui engendrent une algèbre $\mathcal{A}_1^*$. $\mathcal{A}_1^*$ n'est pas en général isomorphe à $\mathcal{A}$; mais on montre qu'on peut par un artifice déduire de $\mathcal{A}_1^*$ une algèbre isomorphe à $\mathcal{A}$ qui admette une représentation fidèle .