

# SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

F. MARTY

## **Recouvrements. Groupe fondamental**

*Séminaire de Mathématiques (Julia)*, tome 3 (1935-1936), exp. n° 8, p. 1-17

[http://www.numdam.org/item?id=SMJ\\_1935-1936\\_\\_3\\_\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1935-1936__3__A8_0)

© École normale supérieure, Paris, 1935-1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

---

Troisième année 1935-36

---

TOPOLOGIE

---

Recouvrements . - Groupe fondamental

---

Exposé fait par M. MARTY, le lundi 23 Mars 1936

---

Exemplaire n° 187

Par comparaison avec les invariants topologiques d'homologie et d'enlacement, dont il a été parlé dans les conférences précédentes, la théorie du groupe fondamental prend un aspect un peu particulier, du fait que l'on ne connaît pas encore d'algorithme satisfaisant pour définir d'une manière purement abstraite, partant généralisable, les chemins homotopes .

En sorte que l'on ne maîtrise actuellement bien les propriétés d'homotopie que pour les chemins à une dimension et dans le cas des pseudomultiplicités . Ces recherches en leur état actuel jouent cependant un rôle très important. Je me placerai systématiquement à un point de vue aussi intuitif que possible, renvoyant pour une discussion serrée des relations entre l'aspect combinatoire et l'aspect "mengen-theoretisch" aux traités classiques .

Dans la première partie, nous étudierons le groupe fondamental, sa structure, ses relations avec divers invariants déjà étudiés dans les précédents exposés .

Dans la deuxième partie, nous parlerons des recouvrements d'un complexe et de la théorie du groupe de monodromie: le problème de la représentation du groupe fondamental par des groupes de permutations est en fait à la base des recherches récentes sur l'aspect topologique de la géométrie algébrique .

### I.- Définition du groupe fondamental .

Soit un complexe simplicial  $K$ , connexe. Nous appellerons chemin dans  $K$  l'image continue d'un vecteur . Un chemin a un point initial et un point final . Si ces deux points sont confondus en un seul point  $P$ , le chemin s'appelle un lacet de  $P$  . Si deux chemins sont tels que le point final du premier est point initial du second, leur réunion est un chemin qui joint le premier point initial au deuxième point final . On l'appelle produit des deux chemins donnés . Deux chemins n'ont pas toujours un produit, mais en particulier : deux lacets de  $P$  ont pour produit un lacet de  $P$  . Un lacet peut évidemment être réduit à un point, et dans cette multiplication, le lacet nul joue le rôle d'unité . Par contre, deux lacets donnés n'ont en général pas de quotient . Pour pouvoir parler d'un groupe de lacets, il faut faire intervenir la déformation homotope, dont la définition sous forme figurée est la suivante : un ensemble connexe  $Y$  restera connexe mais deux points à distance finie peuvent en cours de déformation  $Y$  devenir provisoirement , ou définitivement, infiniment voisins . Si quatre lacets de  $P$ ,  $l$ ,  $l'$ ,  $m$ ,  $m'$ , sont tels que  $l$  est homotope à  $l'$ , et  $m$  à  $m'$ , on voit de suite que  $lm$  est homotope à  $l'm'$ . Rangeons dans une classe tous les lacets de  $P$  homotopes entre eux. La multiplication des lacets engendre une mul-

tiplication des classes de lacets, où la classe des lacets homotopes au lacet point joue le rôle de l'unité . Mais cette fois, il est clair que le produit d'un lacet par lui-même parcouru en sens contraire est homotope au lacet point . Donc chaque classe a un inverse , et nous avons maintenant le résultat suivant :

Les classes de lacets de P homotopes entre eux forment un groupe , que nous appellerons (provisoirement) groupe fondamental de K au point P .

On se convainc d'ailleurs immédiatement que ce groupe en tant que groupe abstrait est indépendant du point P choisi. Soit en effet,  $u$  un lacet de P ,  $u'$  un lacet de P' ,  $\bar{\omega}$  le chemin PP' ,  $\bar{\omega} u' \bar{\omega}^{-1}$  est un lacet de P,  $\bar{\omega}^{-1} u \bar{\omega}$  est un lacet de P' , et il est clair que cette correspondance est isomorphe, cette isomorphie étant d'ailleurs déterminée à une automorphie interne de l'un des groupes près .

Nous parlerons donc désormais du groupe fondamental d'un complexe (ou d'une variété topologique connexe).

Avec la définition que nous venons d'adopter, il est clair que le groupe fondamental est un invariant topologique . D'une manière plus précise et plus complète :

Par une représentation continue d'un complexe  $K_n$  dans un complexe  $K_m$  le groupe fondamental  $\mathcal{F}$  de  $K_n$  est représenté homéomorphement dans le groupe fondamental de  $K_m$  . En cas d'ho-

méomorphie des complexes et de représentation topologique ,  
l'homomorphie ci-dessus devient un homomorphisme .

La base de ce résultat est naturellement que les images de deux chemins homotopes sont homotopes si la représentation est continue . Il est clair aussi que l'isomorphie ou l'homomorphie ne sont définies qu'à une automorphie intérieure près de l'un des groupes .

## II.- Détermination effective du groupe fondamental

Partant directement de la définition du groupe fondamental, on arrive au lemme suivant qui est souvent très utile :

Le groupe fondamental du produit topologique de deux complexes est égal au produit direct des groupes fondamentaux des deux facteurs .

Cela s'obtient par une discussion rapide de la structure des classes homotopes , et de la remarque qu'un chemin du produit topologique est déterminé biunivoquement par le couple de chemins correspondants dans les deux complexes facteurs .

Remarquons , en outre, que :

Le groupe fondamental d'un sous-complexe d'un complexe donné n'est pas forcément un sous-groupe du groupe fondamental du complexe . En effet, un lacet du sous-complexe relatif à un de ses points P est aussi un lacet du sur-complexe, et deux éléments de même classe du sous-complexe sont aussi de même

classe pour le sur-complexe . Nous avons donc une homomorphie du groupe fondamental du sous-complexe sur un sous-groupe du groupe sur-complexe .

Ce phénomène nous est précisé par le théorème suivant :

Si le complexe  $\mathcal{K}$  est la somme topologique des complexes  $\mathcal{K}'$  et  $\mathcal{K}''$  lesquels ont en commun  $\mathcal{K}'''$  , le groupe fondamental de  $\mathcal{K}$  est un groupe facteur du produit libre des groupes fondamentaux de  $\mathcal{K}'$  et  $\mathcal{K}''$  . On obtient les relations supplémentaires, si  $\mathcal{K}'''$  est connexe, en prenant chaque élément du groupe fondamental de  $\mathcal{K}'''$  et en identifiant l'élément du groupe de  $\mathcal{K}'$  et celui du groupe de  $\mathcal{K}'''$  qui lui correspondent .

Donnons quelques exemples simples :

La boule à  $n$  dimensions a un groupe fondamental réduit à l'unité, La circonférence de cercle a pour groupe le groupe cyclique libre .

L'intérieur d'un tore est le produit topologique d'une circonférence et d'un cercle ; donc son groupe est aussi le groupe cyclique libre .

La surface d'un tore est le produit direct de deux circonférences . Son groupe fondamental est donc un groupe abélien à deux générateurs d'ordre infini .

Une variété est dite simplement connexe si son groupe fondamental se réduit à l'unité. Trouver dans un type de di-

dimension donnée les variétés même homogènes, qui sont simplement connexes, est un problème assez délicat. Pour une dimension il n'y a que deux telles variétés, le cercle et la droite. La droite est simplement connexe; à deux dimensions, la seule surface fermée simplement connexe est la sphère ordinaire; le plan est la seule solution infinie. A trois dimensions la sphère est vraisemblablement d'après Poincaré la seule solution. A quatre dimensions le produit de deux sphères à deux dimensions est simplement connexe sans être homéomorphe à la sphère à quatre dimensions (les nombres de Betti de la dimension 2 ne sont pas les mêmes).

Pour le calcul pratique du groupe fondamental, on s'efforce généralement de prendre comme point de départ un aspect combinatoire du problème: on décompose le complexe en simplexes ou en cellules, et on se propose de construire des suites de simplexes ou de cellules qui fonctionnent comme générateurs du groupe, après quoi, on ajoute une suite de relations élémentaires qui constitueront des relations du groupe (déformations combinatoires).

Par exemple la méthode classique (Traité de Seifert - Threlfall) prend une décomposition simpliciale et en forme les chemins au moyen de côtés à une dimension. Pour cela, on prend un sommet fixe, auquel on joint tous les autres



sommets, chacun pris une fois pour toutes ; alors à chaque côté à une dimension correspond un élément générateur, à chaque face à deux dimensions une relation (Méthode des chemins de côtés) .

Dans un article (actuellement sous presse) j'ai montré que pour les complexes fortement connexes, on pouvait construire directement la définition duale du groupe fondamental. En effet, dans la définition classique un chemin est une suite de sommets définis par des côtés à une dimension, dans ma définition, on a des simplexes réunis par une face à  $n-1$  dimensions, chaque relation naissant cette fois d'une arête à  $n-2$  dimensions . Cette définition avait un intérêt dans l'étude de la structure des recouvrement relativement ramifiés, où on arrive ainsi à des définitions combinatoires beaucoup plus faciles .

Dans un article récent<sup>(1)</sup> Reidemeister prend pour chemins élémentaires des suites de simplexes tels que chacun soit incident au précédent ; cette définition diffère en fait peu de la mienne, mais permet de ne pas exclure le cas où le complexe présente un étranglement . Toutefois, au point de vue du groupe fondamental j'ai pu démontrer récemment que, à tout complexe fini non fortement connexe on peut adjoindre un com-

(1)

Math., Zeitschrift , P.40 , 1935 , 5 , 406

plexe fini fortement connexe et ayant le même groupe fondamental. Ce résultat (peut-être pas inédit mais très détaillé) enlève naturellement un certain intérêt à la généralisation.

Dans la théorie des noeuds dans l'espace à trois dimensions, on rencontre des exemples simples de groupes fondamentaux non abéliens. Pour les calculer on applique un certain nombre de méthodes particulières, qui toutes reviennent à choisir une direction de droites ne donnant pas lieu à sécantes triples, et à décomposer l'espace à trois dimensions en cellules cylindriques par le cylindre ayant le noeud pour directrice. Les relations naissent alors à raison de une relation par sécante double<sup>(1)</sup>.

Mais il n'existe pour ce cas aucun algorithme aussi satisfaisant que l'algorithme des cycles pour les questions d'homologie.

### III.- Homologie, homotopie, homéomorphie.

On constate très facilement qu'un chemin peut aussi être considéré comme une chaîne (à coefficients entiers) à une dimension, et que deux chemins homotopes donnent lieu à deux chaînes homologues, la réciproque n'étant, au surplus, pas

---

(1) Voir Reidemeister, Knotentheorie, Berlin Springer 1934.

nécessairement vraie ; et que le produit de deux chemins est la somme des deux chaînes correspondantes .

Soit inversement une classe de cycles homologues (coefficients entiers) ; la classe contient au moins un cycle passant par un point donné ; donc le groupe fondamental est susceptible d'une représentation homomorphe sur le groupe d'homomorphie de la dimension 1 .

Si l'on cherche le noyau de l'homomorphie on trouve presque immédiatement le groupe des commutateurs . Il est clair en effet, que le groupe d'homologie étant abélien, tout commutateur appartient au noyau . Réciproquement, soit une chaîne homologue à 0 de la dimension 1 , elle est frontière d'une surface et le problème à résoudre est essentiellement celui de trouver les rétrosections qui la rendent simplement connexe ; une fois cela fait, le cycle devient homotope à un commutateur . Et on aboutit à :

Théorème : Le groupe d'homologie à une dimensions (coefficients entiers) est le groupe quotient du groupe fondamental par le groupe des commutateurs .

Par contre, on démontre par des exemples reproduits dans les traités classiques que l'identité des groupes d'homologie de toutes les dimensions n'entraîne pas l'identité des groupes fondamentaux , pas plus que l'identité des groupes fondamentaux n'entraîne l'identité des groupes d'homologie , sauf pour la dimension 1. Enfin l'identité totale des groupes d'ho-

mologie et fondamental n'entraîne pas l'homéomorphie .

#### IV.- Théorie classique du recouvrement non ramifié.

Définition : Un complexe  $\tilde{K}$  est dit recouvrement de  $K$ ,  $K$  support de  $\tilde{K}$ , s'il existe une représentation bicontinue de  $\tilde{K}$  sur  $K$  (non nécessairement biunivoque).

Le recouvrement est dit sans ramification et sans frontière relative si la correspondance est localement biunivoque .

Dans ces conditions, on dit que le point du support et les points du complexe dont il est l'image sont des points superposés et qu'un point du support est la projection de ses superposés du recouvrement . Passant de là à la notion de chemins superposés, on constate que la projection d'un chemin fermé du recouvrement est un chemin fermé . Au contraire les superposés d'un chemin fermé peuvent être des chemins ouverts. Ceci conduit au résultat suivant :

Le groupe fondamental du complexe de recouvrement est un sous-groupe du groupe fondamental du complexe support .

Lorsqu'on change le point initial des lacets on remplace d'ailleurs ce sous-groupe par un sous-groupe conjugué .

Soit alors une décomposition du groupe fondamental de  $K$  d'après un de ces sous-groupes  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{F} = \mathcal{H} + \mathcal{H}(\mathcal{F}_1) + \dots$$

Deux chemins partant de  $O_1$ , de  $\mathcal{R}$ , et qui arrivent au même superposé de  $O_1$  sont visiblement de la même classe de restes et réciproquement. D'où de suite l'énoncé :

Le nombre de feuillets du recouvrement est égal à l'indice de  $H_1$  dans  $F$ . Mais les résultats précédents admettent une réciproque fort intéressante :

A chaque classe de sous-groupes conjugués du groupe fondamental correspond biunivoquement un recouvrement du complexe de base.

Pour résoudre le problème combinatoirement dans la méthode classique, on se propose de trouver la décomposition simpliciale du complexe de base. Dans la théorie classique à chaque sommet de la décomposition simpliciale aboutissent des chemins partis de  $O$  que l'on répartit en classes au moyen du sous-groupe étudié. Alors à chaque sommet appartiennent autant de sommets superposés que de classes de chemins. Les arêtes à une dimension se déterminent au moyen de chemins homotopes à zéro et une discussion délicate, mais sans difficultés théoriques permet d'achever le problème.

#### V.- Quelques problèmes de recouvrement.

Y a-t-il un recouvrement simplement connexe d'un complexe donné ? - c'est-à-dire, dont le groupe fondamental est réduit à l'unité ? - Oui, car tout groupe admet l'unité pour

sous-groupe ; le recouvrement correspondant s'appelle le recouvrement universel . En effet, son groupe fondamental étant sous-groupe de tout sous-groupe du groupe du support, il est recouvrement de tout recouvrement du support .

On a aussi étudié avec attention le cas des recouvrements dits réguliers , dans lesquels le sous-groupe associé au recouvrement est un sous-groupe invariant du groupe fondamental du support . A cette définition est équivalente la suivante : tous les superposés d'un chemin fermé sont à la fois ouverts et fermés . Les recouvrements réguliers ont des propriétés particulières en ce qui concerne le groupe des autoprojections , que nous verrons après l'étude du groupe de monodromie. le recouvrement universel est toujours un recouvrement régulier .

#### VI.- Théorie du recouvrement ramifié d'une pseudomultiplicité.

Ainsi que je l'ai montré dans l'article précité , la théorie du recouvrement relativement ramifié se présente naturellement lorsqu'on se propose une construction du recouvrement dual de la construction classique , c'est-à-dire simplexe de dimension  $n$  par simplexe de dimension  $n$  . En ce cas, il arrive que des simplexes de la dimension  $n-2$  soient recouverts un nombre de fois inférieur au nombre de feuilletts du recouvrement . Ces simplexes sont les éléments de ramification et on arrive à associer au support , et à son groupe fonda-

mental les éléments suivants :

1°) un complexe de perforation, relativement sans frontière et de dimensions inférieures de 2 à celle du support .

2°) le groupe auxiliaire qui n'est autre que le groupe fondamental du complexe perforé .

On constate alors que :

le groupe fondamental du support est un groupe quotient du groupe auxiliaire (par un groupe d'éléments ramifiants) , le groupe fondamental du recouvrement est un sous-groupe du groupe auxiliaire .

Dans le cas où le support est à deux dimensions , le groupe des éléments ramifiants peut être engendré par des éléments générateurs libres (recouvrements Riemanniens) . Il n'en est pas de même pour le cas des supports à un nombre de dimensions supérieur .

La connaissance de tous les recouvrements d'une variété étant équivalente, au moins en gros, à la connaissance de son groupe fondamental, il y a intérêt à donner un schéma qui permette de les construire . On sait qu'un complexe peut être donné soit par son schéma de sommets, soit par les matrices qui expriment les relations d'incidences . A côté des matrices d'incidence, nous introduisons la matrice des contacts orientés , définie comme produit de la matrice des incidences de l'ordre  $n$  sur l'ordre  $n-1$  par sa transposée .

il y correspond une ligne et une colonne à chaque simplexe d'ordre  $n$ . Les termes de la diagonale principale sont égaux à  $n+1$ , et au croisement d'une ligne et d'une colonne d'indices différents, il y a 0 si les deux simplexes n'ont pas une face de dimension  $n-1$  en commun,  $+1$  ou  $-1$  s'ils ont une telle face commune avec concordance ou discordance des orientations.

On sait que les tableaux des incidences déterminent le complexe, mais ne sont pas arbitraires ; la matrice des contacts ne le détermine pas ; mais le résultat fondamental que j'ai obtenu est le suivant :

Si on connaît un support du complexe donné, sa matrice des contacts le détermine.

Enfin, supposons donné un complexe, à partir de sa matrice des contacts, on peut construire la matrice des contacts de tout recouvrement (ramifié ou non, connexe ou non) par la règle suivante : le dernier carré de la nouvelle matrice est une subdivision par  $n$  (nombre de feuillets) du dernier de l'ancienne. Si l'ancienne case contenait  $n+1$ , les nouvelles cases de sa diagonale contiennent  $n+1$ , les autres 0. Si l'ancienne case contenait 0, on met 0 dans les nouvelles. Enfin, si l'ancienne case contenait  $+1$ , (ou  $-1$ ) on répartit des  $+1$  (ou  $-1$ ) et des 0 dans les nouvelles de telle sorte que chaque ligne et chaque colonne contiennent un unique terme non nul.



Bien entendu, une fois le nouveau tableau ainsi construit, il faut connaître tous les tableaux d'incidence du complexe de recouvrement .

Ceci répond donc à l'objection de Reidemeister dans l'article cité ; le groupe fondamental est déterminé par la donnée des simplexes des dimensions 0, 1, 2 , tandis que pour définir les recouvrements , il faut faire appel à tous les simplexes du support : oui le recouvrement dépend au point de vue absolu de tout le support, mais les relations du recouvrement avec le support ne dépendent , elles, que des simplexes de l'ordre le plus élevé (ou, par dualité, de ceux de l'ordre le plus faible.) .

#### VII.- Groupe de monodromie , hypergroupe des autoprojections.

Bien que tout ce qui va suivre soit indépendant du nombre des feuillets, nous supposerons dans l'écriture, que celui-ci est fini, laissant aux soins du lecteur, les petites adaptations nécessaires .

Considérons les divers superposés d'un point  $O$  , soit  $O_1 , \dots , O_g$  . A un lacet de  $O$  correspond pour chaque  $O_i$  un chemin superposé  $O_i O_j$  ; c'est-à-dire que, à chaque lacet de  $O$  correspond une permutation des  $O_i$  . Il est clair que deux chemins homotopes dans le support (ou dans le support perforé, s'il y a lieu) donnent naissance à la même permuta-

tion . Ces permutations forment un groupe , le groupe de monodromie .

Le groupe de monodromie est d'ailleurs une représentation du groupe fondamental ; d'une manière plus précise :

Le groupe de monodromie est  $l$  , isomorphe au groupe quotient du groupe fondamental du support (perforé s'il y a lieu) par la partie commune aux sous-groupes du groupe fondamental auxquels le recouvrement appartient .

L'ordre du groupe de monodromie est au moins égal au nombre de feuillets, puisque la transitivité résulte directement de la définition . L'égalité a lieu si le sous-groupe de primitivité (qui laisse fixe un élément donné) se réduit à l'identité .

Supposons le groupe fondamental du support donné , la représentation étudiée est déterminée en tant que groupe abstrait par le sous-groupe de primitivité , et par le sous-groupe associé de  $F$  ; et par cela même la structure du recouvrement . Réciproquement, d'ailleurs on constate sans difficultés que, à chaque représentation du groupe fondamental par une permutation de  $g$  variables correspond un recouvrement bien déterminé à  $g$  feuillets .

Enfin, nous allons associer à un recouvrement donné un hypergroupe (rappelons que j'ai appelé hypergroupe un système possédant multiplication et division, mais où le produit de deux facteurs est fonction multiforme des arguments) qui

ne se réduit à un groupe que pour des recouvrements réguliers.

Et en outre :

L'hypergroupe des autoprojections est isomorphe de l'hypergroupe quotient du groupe de monodromie par son sous-groupe de primitivité.

Dans le cas particulier du recouvrement régulier, déjà étudié par les auteurs classiques, ce résultat se réduit au suivant :

le groupe des autoprojections est isomorphe du groupe de monodromie ;

car, dans ces conditions, le sous-groupe de primitivité est l'identité . D'ailleurs c'est seulement dans ce cas que l'hypergroupe quotient est un groupe : il faut en effet que le sous-groupe envisagé soit invariant, et à cause de la transitivité, le sous-groupe de primitivité ne peut l'être que s'il se réduit à l'identité .

#### Références .

- |                   |   |
|-------------------|---|
| THRELFALL-SEIFERT | Lehrbuch der Topologie , Teubner 1934<br>(prg.42 à 59)                              |
| REIDEMEISTER      | Zur Theorie der Fundamentalgruppe<br>Math. Zeitschrift 40 (1935) p.406              |
| F. MARTY          | Groupes et hypergroupes attachés à une<br>fraction rationnelle , Annales ENS (1936) |