R. DE POSSEL

Points fixes des transformations

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 3 (1935-1936), exp. n° 7, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1935-1936__3__A7_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Troisième année 1935-1936

TOPOLOGIE

Points fixes des transformations

Exposé fait par M. de POSSEL, le lundi 9 Mars 1936

Exemplaire n° 187

INTRODUCTION

Soit K un complexe <u>fini</u> , c'est-à-dire composé d'un nombre fini de simplexes, chaque simplexe étant l'image topologique d'un simplexe droit d'un espace à n dimensions, donc de dimension n au plus ; nous supposerons que tout simplexe de K est, ou bien de dimension n , ou bien face d'un simplexe de dimension n (complexe <u>homogène</u> au sens de Hopf-Alexandroff (1) On ne supposera pas, en général, que K est une variété (exp.D p.10) .

Soit f une application continue de K <u>dans</u> lui-même ; on dira que o est point-fixe si f(o) = o . On établira une formule générale qui donnera le "nombre algébrique " N de points-fixes d'une telle application à condition de les compter d'une manière convenable . N sera exprimé en fonction du type d'homologie de l'application f . (En particulier , $N \neq 0$ permet d'affirmer l'existence de points-fixes). Plus exactement, l'application f transforme toute chaine de K en une autre chaine de K, donc définit des homomorphies dans les groupes de Betti de K. Ces homomorphies portant sur des groupes libres commutatifs sont définies par des matrices dont les traces constituent des invariants topologiques du couple (K,f).

---

(1) Nous désignerons dans la suite par H.A. le traité de Topologie de Hopf et Alexandroff .

la formule en question dite "formule des traces" donnera N en fonction de ces traces. En particulier deux applications f, f_1 de K dans lui-même <u>homotopes</u>, c'est-à-dire se déduisant l'une de l'autre par une déformation continue, possède le même type d'homologie donc le même nombre N .

Cette définition du "nombre algébrique" de points-fixes est analogue à celle du nombre d'intersection (exp.F, p.5) .

Voici le plan qui va être suivi :

I.- On définira d'abord le point-fixe régulier et l'indice d'un tel point-fixe. Par exemple pour la transformation définie dans le plan complexe par $w = z^n$, l'indice du point-fixe o se définira en faisant décrire au point z un cercle de centre o et de rayon inférieur à 1 et en considérant l'angle dont tourne le vecteur $w-z$; c'est +1 quel que soit n entier, supérieur à 1 , car o est un zéro simple de $w-z$.

II.- On démontrera que si tous les points fixes sont réguliers la somme de leurs indices , ou <u>nombre algébrique de points-fixes</u> est égale à

$$(-1)^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \operatorname{Tr}(\mathfrak{B}^r) \qquad (1)$$

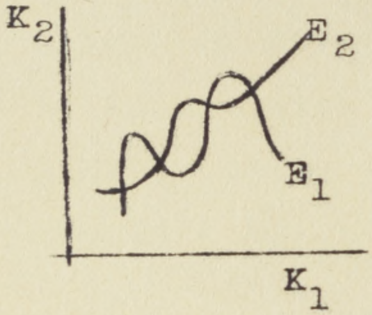
où $\operatorname{Tr}(\mathfrak{B}^r)$ désigne la trace de la matrice qui représente l'application dans lui-même définie par f du groupe de Betti $\mathfrak{B}^r$ de dimension r du complexe K (groupe de Betti ordinaire , c'est-à-dire mod.O).

Dans le cas où f est l'identité, on retrouve la formule d'Euler-Poincaré (Voir exp.B).

III.- De cette formule générale, on tirera un assez grand nombre de conséquences particulières relatives à l'existence de points-fixes pour des complexes, et des applications particulières simples .

IV.- Enfin, on appliquera les résultats aux singularités des champs de directions sur les variétés closes, champs continus sauf en un nombre fini de points singuliers . On donnera des résultats sur le "nombre" de ces points singuliers .

Remarque. Le rapprochement entre "points-fixes" et "intersections" n'est pas sans raison d'être : soient f_1 et f_2 deux applications, ou plus généralement deux correspondances quelconques entre deux ensembles K_1 et K_2 . Elles sont représentées respectivement par des ensembles E_1 et E_2 dans l'espace produit $K_1 K_2$. Les points communs à E_1 et E_2 sont des points où les deux correspondances font correspondre à deux points de K_1 le même point de K_2 ; ce sont des points de "coincidence" . Si $K_1 = K_2$, et si l'une des correspondances f_1 , f_2 est l'identité, les points de coincidence sont les points fixes de l'autre . Donc la recherche du nombre de points fixes



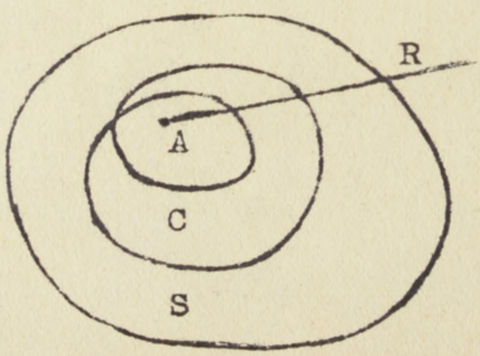
se ramène à celle du nombre d'intersection de ces deux ensembles E_1 et E_2 dans l'espace produit .

Si K_1 et K_2 sont des complexes, il arrive qu'on puisse définir le nombre d'intersection de E_1 et de E_2 au moyen de complexes dans le complexe produit $K_1 \times K_2$; ce sera le nombre algébrique de points de coincidence . Les formules obtenues sont plus complètes en un certain sens que celle que nous établirons, mais la méthode exige une étude détaillée des groupes d'homologie de l'espace produit (Voir Lefschetz, Topology). La méthode employée ici est celle de H.A.

I.- Définition d'un point fixe régulier et de l'indice d'un tel point

Ordre d'un point A par rapport à un cycle .

Rappelons que dans un espace à n dimensions E^n , l'ordre d'un point A par rapport à un cycle singulier (exp.F) C peut se définir des trois façons suivantes équivalentes :



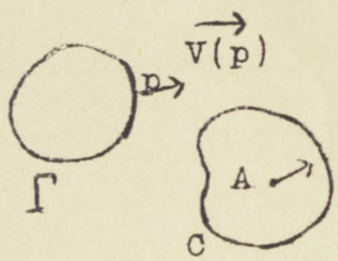
a) c'est le coefficient d'enlacement $o(C,A)$ de C avec A.

b) C'est le nombre d'intersection o (R,C) d'un demi-rayon R issu de A avec C

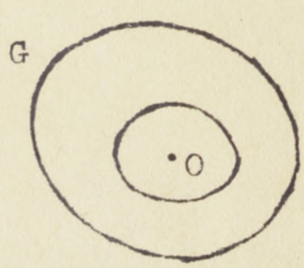
c) Si on projette C de A comme centre sur une sphère S contenant C, c'est le degré global de l'application ainsi définie de C sur S .

Champ de vecteurs dans E^n

Soit Γ un cycle sur lequel le champ de vecteurs V(p) ne s'annule pas . D'un point A menons un vecteur équipollent à V(p), et considérons le cycle C décrit par l'extrémité de ce vecteur lorsque p décrit Γ .L'ordre de A par rapport à C se nomme alors caractéristique du champ sur Γ .



Supposons maintenant un champ de vecteurs défini dans un domaine G et ayant dans ce domaine O pour unique zéro. Entourons O dans G d'un cycle Γ à n-1 dimensions par rapport auquel O ait l'ordre +1 . On appelle indice du zéro du champ la caractéristique de ce champ sur Γ .

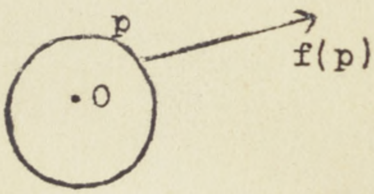


Cet indice est indépendant d'après b) du cycle choisi, car deux cycles Γ_1 et Γ_2 par rapport auxquels O a l'ordre +1 sont homotopes dans G - O , et il en est de même des cycles transformés C_1 et C_2 .

L'indice ne change pas d'après c) si on multiplie V(p) par un scalaire $\varphi(p)$ positif en tout point différent de O , donc ne dépens que de la <u>direction</u> de $V(p)$.

<u>Indice d'un point fixe régulier d'une application f d'un complexe K en lui-même</u> .

On dira qu'un point fixe O est <u>régulier</u> s'il existe une division simpliciale de K pour laquelle O est à l'intérieur d'un simplexe $\mathcal{X}$ à n dimensions de K. Dans ce cas, le champ de vecteurs $\overrightarrow{p\,f(p)}$ a un zéro isolé en O (dans une représentation d'un voisinage de O dans E^n) . L'indice de ce zéro est appelé <u>l'indice du point fixe O</u>.



Il faut montrer que c'est un invariant topologique du couple (K,f) .

Représentons dans E^n un domaine G de $\mathcal{X}$ contenant O tel que $f(G) \subset \mathcal{X}$.

<u>1er cas</u>

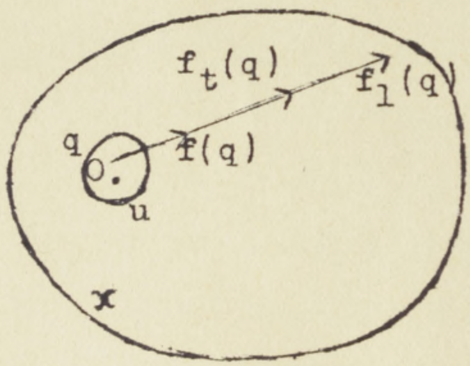
Supposons d'abord qu'il existe un simplexe $u \subset G$ qui ne contienne aucun point de l'image $f(\dot{u})$ de la frontière $\dot{u}$ de u . On peut alors amener par variation continue le champ $\overrightarrow{p\,f(p)}$ défini sur $\dot{u}$ sur le champ $\overrightarrow{O\,f(p)}$ sans que jamais le vecteur ne s'annule . L'indice du point fixe O est donc l'ordre de O par rapport à $f(\dot{u})$, ou encore le degré de l'application f en O . C'est un invariant topologique .

<u>2ème cas</u> (général)

Il suffit de montrer qu'on peut en transformant f d'une manière continue l'amener à vérifier la condition du ler cas sans qu'il apparaisse jamais d'autre point fixe .

Désignons par d le minimum de la distance de O à la frontière de $\mathcal{X}$. Soit u un simplexe contenu dans $\mathcal{X}$,contenant O, et de diamètre inférieur à $\frac{d}{4}$, $\varphi(q)$ une fonction continue égale à zéro au point O et à 1 sur la frontière de u, et $f_t(q)$ le point de la droite $q, f(q)$ à une distance de q égale à

$$\rho\left[f(q), q\right] + t\frac{d}{2}\ \varphi(q)$$



$f_1(q)$ vérifie alors la condition du ler cas, et on passe de f à f_1 par une variation continue au cours de laquelle $f_t(q)$ ne s'annule pas .

II.- Nombre algébrique de points fixes d'une application

Si tous les points fixes d'une application contenus dans un domaine D sont réguliers, la somme de leurs indices est appelée le nombre algébrique de points fixes de f contenus dans D .

Le théorème général que nous avons en vue peut alors s'énoncer de la façon suivante :

Toute application continue de K en lui-même peut être approchée d'aussi près que l'on veut par une application qui n'a que des points fixes réguliers, en nombre égal à :

$$(-1)^n \sum^{n} (-1)^r \text{ Trace } \mathcal{B}^r$$

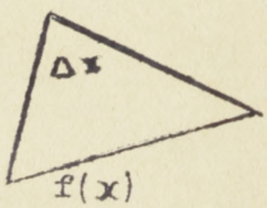
(Voir dans l'introduction la définition de Trace $\mathcal{B}^r$).

La démonstration procède par un certain nombre d'étapes successives dont nous allons donner les grandes lignes . Etudions d'abord les applications simpliciales .

Formule des traces pour une application simpliciale.

Soit f une application simpliciale, appliquant dans K une subdivision K_1 de K .

Soit x un simplexe à r dimensions de K_1 contenu dans son image $f(x)$. Un tel simplexe est dit simplexe fixe pour f . Soit F^r le nombre algébrique des simplexes fixes de dimension r, obtenu en comptant $+1$ tout simplexe fixe x qui



a une orientation même que celle de $f(x)$ et -1 tout simplexe fixe qui a une orientation opposée à celle de $f(x)$. Dans ces conditions, on a l'égalité suivante , dite formule des traces :

$$\sum^{n} (-1)^r F^r = \sum^{n} (-1)^r \text{ Trace } \mathcal{B}^r$$

Tout d'abord, f définit une homomorphie dans le groupe $\mathcal{L}^r$ des chaines de dimension r de K_1 à coefficients entiers;

et on voit immédiatement que F^r est la trace de cette homomorphie

$$F^r = \text{Trace } \mathcal{L}^r$$

Soit $\mathcal{C}^r$ le groupe des cycles à r dimensions de K_1, $\hat{\mathcal{H}}^r$ le groupe des cycles dont un multiple est homologue à zéro, $\mathcal{H}^r$ le groupe des cycles homologues à zéro, f définit des homomorphies dans les groupes libres quotients :
$\mathcal{L}^r / \mathcal{C}^r$ et $\mathcal{C}^r / \hat{\mathcal{H}}^r = \mathcal{B}^r$

On peut donc considérer les traces de ces homomorphies :
Trace $\mathcal{C}^r$, Trace $\hat{\mathcal{H}}^r$, Trace $\mathcal{H}^r$, Trace $(\mathcal{L}^r / \mathcal{C}^r)$
Trace $\mathcal{B}^r$.

La frontière d'une chaine ne conservant pas l'application f, il en résulte que les deux homomorphies des groupes $\mathcal{L}^r / \mathcal{C}^r$ et $\mathcal{H}^{r-1}$ sont isomorphes dans la correspondance qui amène chaque chaine sur sa frontière, et par conséquent :

$$\text{Trace } (\mathcal{L}^r / \mathcal{C}^r) = \text{Trace } \mathcal{H}^{r-1} .$$

Or la propriété d'additivité des traces[1] donne :

$$\text{Trace } \mathcal{L}^r - \text{Trace } \mathcal{C}^r = \text{Trace } (\mathcal{L}^r / \mathcal{C}^r) .$$

Donc :

---

(1) Elle s'énonce ainsi : Si le sous-groupe U de M est transformé en lui-même, et si $\hat{U}$ désigne le groupe des éléments dont un multiple appartient à U, on a

$$\text{Trace } M = \text{Trace } U + \text{Trace } (M/\hat{U}) .$$

$$\text{Trace } \mathcal{L}^r = \text{Trace } \mathcal{C}^r + \text{Trace } \mathcal{H}^{r-1}$$

L'additivité des traces donne encore :

$$\text{Trace } \mathcal{B}_o^{\ r} = \text{Trace } \mathcal{C}^r - \text{Trace } \mathcal{H}^r$$

D'où en multipliant par $(-1)^r$, en sommant, et en remarquant que $\quad \text{Trace } \mathcal{H}^{-1} = \text{Trace } \mathcal{H}^n = 0$

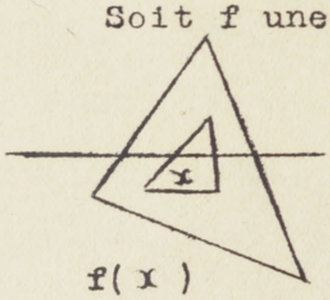
$$\sum^n (-1)^r \text{ Trace } \mathcal{L}^r = \sum_{r=o}^n (-1)^r \text{ Trace } \mathcal{B}^r$$

<u>Cas d'une application quelconque</u> .

Le nombre $\Lambda_f = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \text{ Trace } \mathcal{B}^r$, nommé <u>nombre de Lefschetz</u>, est défini pour toute application f continue d'un complexe K en lui-même . C'est un invariant topologique puisqu'il ne dépend que des homomorphies des groupes de Betti définies par f . Il est le même pour deux applications appartenant à la même classe d'homologie .

<u>Point fixe d'une application affine</u> .

Soit f une application affine de E^n en lui-même qui transforme un simplexe x à n dimensions en un simplexe f(x) contenant x . Pour l'application f^{-1}, le vecteur déplacement en tout point de la frontière de f(x) est dirigé vers l'intérieur. f^{-1} admet donc un point fixe au moins dans x (voir exposé F) . Il ne peut y avoir deux points fixes sinon l'application étant affine, tous les points de la droite qui les joint seraient fixes, donc, en particulier,



les deux points de cette droite situés sur la frontière de $\mathfrak{X}$,ce qui est impossible . (On peut encore déduire ici l'existence d'un point fixe de la formule des traces ,V.H.A.)

Lemme I . - Si dans un simplexe $\mathfrak{X}$, l'application f possède un nombre fini de points fixes, le nombre algébrique de points fixes est égal à la caractéristique sur $\mathfrak{X}$ du champ de vecteurs $\overrightarrow{p\,f(p)}$.


$\mathfrak{X}$

Il suffit pour le voir de se reporter aux définitions ci-dessus de l'ordre et de la caractéristique .

Lemme II . - Toute application f simpliciale, dans K d'une subdivision K_1 de K possède un point fixe et un seul dans chacun des simplexes fixes de K_1 , et n'en possède pas d'autre.

En effet, tout simplexe fixe contient un point fixe et un seul d'ordre +1 ou -1 . Inversement, si p est point fixe, le simplexe $\mathfrak{X}$ à l'intérieur duquel se trouve p est simplexe fixe .

Lemme III. - Soit f une application de F en lui-même dont tous les points fixes sont réguliers et sont en nombre algébrique F .

Si ε est assez petit, toute application f_1 dont

<u>les points fixes sont tous réguliers, et qui diffère de f de moins de ε, possède le même nombre F de points fixes.</u>

Soit O_i, les points fixes de f, x_i le simplexe de K qui contient O_i, et y_i un simplexe contenant O_i et tel que $f(\overline{y}_i) \subset x_i$ ($\overline{y}_i$ désignant y_i et sa frontière).

Soit d le minimum de la distance $\rho[p, f(p)]$ dans $K - \sum y_i$, a_i le minimum de cette même distance sur la frontière de y_i, et b_i le minimum de la distance de $f(y_i)$ à la frontière de x_i.

Prenons ε inférieur à d, aux a_i et aux b_i. Dans ces conditions, en considérant une image de x_i dans E^n, $f_1(y_1)$ est contenu dans x_i, f_1 n'a pas de point fixe dans $K - \sum y_i$, et la caractéristique du champ de vecteurs $\overrightarrow{p\,f(p)}$ sur y est la même que celle du champ $\overrightarrow{p\,f_1(p)}$, et par conséquent le nombre algébrique de points fixes de f_1 dans y_i est égal à l'indice du point fixe C_i de f. Comme f_1 n'a pas de point fixe dans $K - \sum y_i$, il en résulte le lemme.

<u>Théorème I</u>.

<u>Soit f une application continue de K en lui-même qui n'a que des points fixes réguliers O_i, et soit f_1 une ε-approximation simpliciale de f, où tous les simplexes fixes sont de dimension n. Dans ces conditions, dès que ε est assez petit, le nombre algébrique de points fixes de f</u>

<u>et f_1 est le même, et est égal à $(-1)^n \Lambda_f$.</u>

En effet, il suffit de prendre ε assez petit pour que f et f_1 soient <u>homotopes</u>, et aient le même nombre F de points fixes réguliers (lemme III) . On a alors (Lemme II)

F = Nombre de simplexes fixes de dimension n de f_1
Mais tous les simplexes fixes de f_1 étant de dimension n, ce dernier nombre est $(-1)^n \Lambda_{f_1}$, ou encore $(-1)^n \Lambda_f$ puisque f et f_1 sont homotopes .

<u>Lemme IV</u>. - <u>Pour toute application continue de K en lui-même et tout ε , il existe une ε -approximation simpliciale dont tous les simplexes fixes sont de dimension n.</u>

La démonstration étant assez délicate, nous en donnerons le principe plus loin.

De ce dernier lemme, et du théorème I, on conclut enfin le théorème suivant :

<u>Théorème II</u> .

<u>Soit f une application continue de K en lui-même, et</u> Λ_f <u>le nombre de Lefschetz correspondant</u> .

1°) <u>Pour tout nombre ε , il existe des applications approchant f à moins de ε et ne possédant que des points fixes réguliers</u> .

2°) <u>Si ε est assez petit, chacune de ces approximations possède un nombre algébrique de points fixes égal à</u>

$(-1)^n \Lambda_f$.

<u>Indications sur la démonstration du lemme IV</u> , ou <u>théorème d'approximation.</u>

On partira d'une approximation simpliciale f_o à $\frac{\varepsilon}{n}$ près , et on en déduira par subdivision une approximation f_1 à $\frac{2\varepsilon}{n}$ près, où il n'y aura plus de simplexe fixe de dimension 0, et ainsi de suite jusqu'à une approximation f_n à ε près ne contenant que des simplexes fixes de dimension n.

Supposons obtenue f^r , application simpliciale d'une subdivision K_r de K ne contenant aucun simplexe fixe de dimension inférieure à r, mais pouvant en contenir de dimension $\geq$ r . Soient x_i^r ceux de ces simplexes qui sont de dimension r $(i=1,2,\ldots,k)$.

On modifie f^r autour des x_i^r . Soit $S_{K_r}(x_i^r)$ l'ensemble des simplexes de dimension $\geq$ r de K_r qui ont x_i pour face .

En dehors de S_{K_r} , prenons $f_{r+1} = f_r$. Pour modifier f_r sur S_{K_r} , subdivisons $S_{K_r}(x_i^r)$; subdivisons d'abord x_i^r lui-même au moyen d'un point intérieur p_i , puis au moyen d'un point intérieur q_λ , tous les simplexes y^s de S_{K_r} à $s = r+1, r+2, \ldots$ dimensions qui touchent x_i^r . On obtient ainsi la subdivision K_{r+1} dans laquelle il faut définir f_{r+1} .

Pour cela , posons $X_i^r = f_r(\chi_i^r)$. Au point p_i , prenons pour $f_{r+1}(p_i)$ un sommet de $S_{K_r}(X_i^r)$ n'appartenant pas à X_i^r (et il en existe tant que $r < n$) , et au point q_λ , prenons pour $f_{r+1}(q_\lambda)$ un sommet quelconque de X_i^r .

Il reste à vérifier que l'application f_{r+1} ainsi définie est bien simpliciale et n'a pas de simplexe fixe de dimension $\leq r$ (pour plus de détails , Voir H.A.).

III.- Applications de la formule obtenue

Cherchons la valeur de

$$\Lambda_f = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \text{ Trace } \mathcal{B}^r$$

dans quelques cas particuliers .

1.- <u>Cas d'un complexe connexe dont tous les nombres de Betti b^r sont nuls sauf b^0</u>

Alors $\mathcal{B}^r$ se réduit à l'unité pour $r > 0$, et Trace $\mathcal{B}^0 = 1$.

D'où $\Lambda_f = 1$, quel que soit f .

C'est le cas pour :

<u>un simplexe à n dimensions</u>

<u>un espace projectif dont le nombre de dimensions est pair</u>

<u>un H-simplexe</u>, au sens de H.A. , c'est-à-dire un

complexe vérifiant les conditions suivantes : Tout cycle homogène de dimension non nulle est frontière d'un sous-complexe Tout cycle à 0 dimension dont la somme des coefficient est nulle est frontière d'un complexe à 1 dimension.

2.- Cas où on peut utiliser l'homotopie .

a) Cas d'un complexe quelconque K et d'une application réductible à celle qui amène K en un seul de ses points .

Alors Trace $\mathcal{B}^0 = 1$, Trace $\mathcal{B}^r = 0$ pour $r \geq 0$
d'où $\Lambda_f = 1$.

b) Cas d'une application homotope à l'identité .

Alors Trace $\mathcal{B}^r = b^r$
et $\Lambda_f = \sum (-1)^r b^r$ = Caractéristique d'Euler-Poincaré.

Si donc la caractéristique d'Euler-Poincaré de K n'est pas nulle, toute application homotope à l'identité a au moins un point fixe.

C'est le cas pour toutes les surfaces (à 2 dimensions) à l'exception :

du tore à 1 trou

de la couronne

de la surface de Klein

du ruban de Möbius.

C'est encore le cas pour la sphère à un nombre pair de dimensions .

3. - <u>Cas d'un complexe clos à n dimensions</u> .

On nomme ainsi un complexe où il existe un cycle C de dimension n, tel que tout cycle à n dimensions soit homologue à un multiple de C .

Dans ces conditions, $\mathfrak{B}^n$ est le groupe additif des entiers, et par conséquent :

$$\text{Trace } \mathfrak{B}^n = \text{degré global } d \text{ de } f .$$

d'où :

$$\Lambda_f = 1 + (-1)^n d + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \text{ Trace } \mathfrak{B}^r$$

<u>Si donc tous les nombres de Betti sont de dimension $0 < r < n$ sont nuls, et si $d \neq (-1)^{n+1}$, f a au moins un point fixe</u>.

Ceci s'applique en particulier à <u>la sphère à n dimensions</u>, et à <u>l'espace projectif de nombre de dimension impair</u>.

<u>Remarques</u>

La somme a_f des valeurs absolues des indices des points fixes peut être supérieure à $|\Lambda|_f$. De plus, le théorème général ci-dessus ne donne aucun renseignement sur le nombre minimum λ_f de points fixes d'une classe d'applications homotopes à une application donnée, ni sur le nombre minimum λ'_f d'une classe d'applications homologues à une application donnée (chaque point fixe étant compté maintenant +1) On a évidemment :

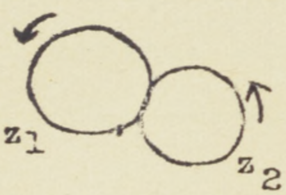
$$a_f \geq \lambda_f \geq \lambda'_f$$

Les théories de J. Nielsen donnent des renseignements sur λ_f dans le cas des variétés closes .

Voici des exemples de chacun des cas $\lambda_f > \Lambda_f$, $\lambda_f = \Lambda_f$, $\lambda_f < \Lambda_f$

1°) $\lambda_f > \Lambda_f$

Prenons le complexe à 1 dimension formé par deux cercles tangents . Soient z_1 et z_2 , les cycles constitués par chacun des cercles . Ils forment une base pour le groupe de Betti $\mathcal{B}^1$. Pour toute application dans laquelle z_1 se transforme en $-z_1$, et z_2 en $-z_2$, on a :



$$\text{Trace } \mathcal{B}^0 = 1 , \quad \text{Trace } \mathcal{B}^1 = 1 \quad , \text{ d'où } \quad \Lambda_f = 0$$

D'autre part, on voit que toute application de ce type a un point fixe .

2°) $\lambda_f = \Lambda_f$

Il suffit de considérer une application convenable d'un simplexe en lui-même ; ou encore une application en lui-même du cercle de degré d , qui donne $\Lambda_f = 1 - d$, $\lambda_f = 1 - d$.

3°) $\lambda_f < \Lambda_f$

Considérons une translation dans le plan complexe . On a $\Lambda_f = 2$, et il n'y a qu' un point fixe, le point à l'infini, mais il est d'indice 2 .

IV.- Les champs de directions dans les variétés closes localement différentiables

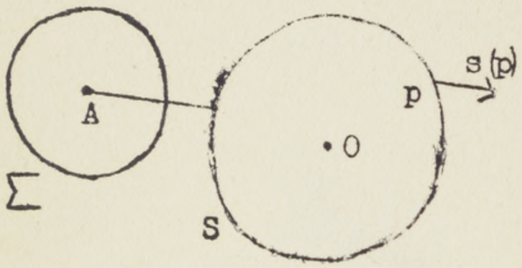
Hypothèses

1°) Nous supposerons la variété $\mathcal{V}$ définie par un système de voisinages V à n dimensions, en correspondance chacun avec un voisinage T(V) de E^n , de sorte que, si un point p a des images dans deux voisinages différents, la correspondance définie entre ces deux images au voisinage de p a des dérivées continues et un déterminant fonctionnel non nul .

2°) On peut, d'après 1°) , définir deux courbes tangentes donc une direction en un point p de $\mathcal{V}$. (Ces directions forment un espace à 2n-1 dimensions) . Nous admettrons qu'à toute direction s on peut faire correspondre un arc K(s) image continue du segment (0,1) , de sorte que le point P(s,t) de paramètre t sur l'arc K(s) soit fonction continue de s et de t .

Considérons un champ de directions s(p) sur la variété $\mathcal{V}$, continu sauf peut-être en des points isolés, qu'on nommera les singularités du champ .

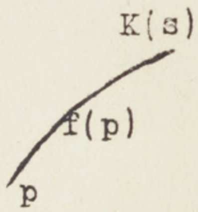
Soit O une singularité représentée dans un voisinage



$T(V)$ de E^n , S une sphère à n-1 dimensions entourant O et contenue dans $T(V)$ et Σ une sphère ayant pour centre un point A quelconque . Par A menons une parallèle à $s(p)$. Nous définissons ainsi une application de S sur Σ . Le degré de cette application est par définition <u>l'indice de la singularité du champ de directions</u> .

On démontre aisément que l'indice est invariant pour une transformation continûment différentiable (H.A.).

En choisissant sur chaque arc $K(s)$ de direction $s(p)$



un point convenable , on déduit d'un champ de directions une application f de $\mathcal{V}$ en elle-même, homotope à l'identité dont les points fixes coincident avec les singularités du champ, et ont le même indice . Par conséquent, la somme des indices des singularités du champ Σ_j est égale à $(-1)^n \chi(\mathcal{V})$, ($\chi(\mathcal{V})$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{V}$).

<u>Supposons d'abord n pair</u> . On a

$$\Sigma_j = \chi(\mathcal{V})$$

<u>Supposons n impair</u> . On a : $\Sigma_j = -\chi(\mathcal{V})$

Mais le champ des directions opposées a les mêmes singularités avec les indices multipliés par $(-1)^n$, d'où

$$\sum_j = \chi(\mathcal{V})$$

Par conséquent :

$$\sum_j = \chi(\mathcal{V}) = 0$$

On a donc démontré en même temps que pour toute variété close dont le nombre de dimensions est impair, la caractéristique d'Euler-Poincaré, ainsi que la somme des indices des singularités d'un champ de directions , sont nulles .

D'autre part, on démontre l'existence, pour toute variété close, d'un champ de directions n'ayant qu'une singularité au plus . Par conséquent :

si n est impair, il existe un champ sans singularité

si n est pair , et si $\chi(\mathcal{V}) = 0$, il existe encore un champ sans singularité.