René de Possel

Espaces topologiques

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 3 (1935-1936), exp. nº 1, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1935-1936__3__A1_0>

III.- A .

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Troisième année 1935-1936

TOPOLOGIE

A.- Espaces topologiques

Exposé fait par M.René de Possel , le 18 Novembre 1935

Exemplaire n° 187

A.- INTRODUCTION

On peut peut-être définir la topologie comme l'étude des fonctions continues .

Idée d'une famille de fonctions définie à partir de deux familles d'ensembles .

Soit x un point d'un espace $\mathcal{E}$, y un point d'un espace $\mathcal{F}$, $y = f(x)$ une fonction définie en tout point de $\mathcal{E}$, univoque. L'image inverse E d'un ensemble F de $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ tels que $f(x) \in F$, ce qu'on note

$$E = f^{-1}(F)$$

Considérons une famille $\mathfrak{E}$ d'ensembles de $\mathcal{E}$ et une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles de $\mathcal{F}$; elles définissent la famille des fonctions $y = f(x)$ telles que, si $F \in \mathfrak{F}$, alors $f^{-1}(F) \in \mathfrak{E}$. C'est ce procédé qui permettrait de définir les fonctions de Baire à partir des ensembles de Borel . Si on a un troisième espace $\mathcal{G}$ et une famille $\mathfrak{G}$ d'ensembles de $\mathcal{G}$, les familles d'ensembles $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, définissent une famille de fonctions $z = g(y)$; dans ces conditions, toute fonction $g\left[f(x)\right]$ appartient à la famille de fonctions définie par les familles d'ensembles $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}$. Cette dernière propriété serait d'ailleurs vraie avec les images directes, mais pour l'application aux fonctions continues, ce sont les images inverses qu'il faut prendre .

Nous définirons les fonctions continues de cette manière, à partir de deux familles d'ensembles, les ensembles "ouverts" .

B.- ESPACES TOPOLOGIQUES.

Les définitions qui ont été proposées pour un espace topologique sont extrêmement nombreuses (Voir plus loin). Nous adopterons la suivante, particulièrement appropriée à l'étude des fonctions continues que nous avons en vue .

Définition

Un espace topologique $\mathcal{E}$ est constitué par un ensemble fondamental E et par une famille $\mathcal{V}$ de parties de cet ensemble appelés *ensembles ouverts* et vérifiant *l'axiome I* :

Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert .

Si $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}$ $\qquad$ $\gamma_i\, \mathcal{V}_i \in \mathcal{V}$

Par définition, l'ensemble vide est ouvert .

On dit encore que la famille $\mathcal{V}$ d'ensembles ouverts définit une *topologie* dans l'ensemble fondamental E .

Il arrive que l'on ait à considérer des topologies différentes dans un même ensemble fondamental .

Soient $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ les familles d'ensembles ouverts des topologies T_1 et T_2 , on dira alors :

T_1 plus faible que T_2

si $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$

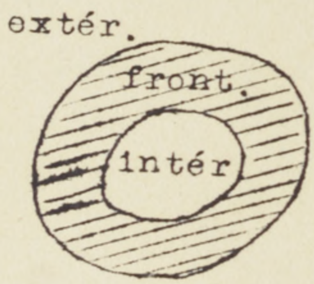
Les deux topologies extrêmes définies dans un ensemble E sont :

la topologie discrète où tout point est un ensemble ouvert, donc tout ensemble ouvert ;

la topologie dans laquelle l'espace tout entier seul est ouvert .

Nous adopterons les définitions suivantes :

Soit A un ensemble situé dans un espace topologique $\mathcal{E}$:



1. Intérieur de A = Réunion des ensembles ouverts contenus dans A .(C'est un ensemble ouvert qui peut être vide).
2. Extérieur de A = Réunion des ensembles ouverts étrangers à A (Même remarque).
3. Frontière de A = E - (intérieur + extérieur).

Tout ensemble A définit donc une décomposition de E en trois ensembles étrangers . L'ensemble complémentaire A donnerait la même décomposition . De tout point de l'espace, on peut donc dire qu'il est point intérieur, point extérieur ou point frontière .

Nous appellerons adhérence de A et nous noterons $\bar{A}$ la somme de l'intérieur et de la frontière de A . On dit d'ordinaire la fermeture, ici adhérence sera plus commode , bien qu'on se soit déjà servi de ce mot dans la dérivation transfinie des ensembles . Un point de l'adhérence de A sera dit un <u>point adhérent de A</u> ; on peut, d'une manière intuitive, considérer que c'est un point qui "touche" l'ensemble, qu'il lui appartienne ou non .

Si une topologie T_1 est plus <u>faible</u> qu'une topologie T_2

$$\text{Front.}_{T_1}(A) \subset \text{Front.}_{T_2}(A) \quad \text{et}$$

$$\text{Adh.}_{T_1}(A) \subset \text{Adh.}_{T_2}(A)$$

<u>Remarques</u>

1. On a les équivalences suivantes :

   p intérieur à A $\leftrightarrows$ il y a un ensemble ouvert contenant p et contenu dans A .

   p extérieur à A $\leftrightarrows$ il y a un ensemble ouvert contenant p et étranger à A .

   p point-frontière de A $\rightleftarrows$ tout ensemble ouvert contenant p contient un point de A et un point étranger à A .

2. Si des points de E n'étaient pas contenus dans aucun ensemble ouvert, ils seraient points-frontière de tout ensemble et ne jouerait aucun rôle dans cette topologie . Nous supposerons qu'il n'y en a pas .

3. On a encore les équivalences :

   (A ouvert) $\leftrightarrows$ (A = intérieur de A) $\leftrightarrows$ (A ne contient aucun point frontière)

(A = adhérence de A ou A contient sa frontière) $\rightleftarrows$ ($\mathcal{C}$ A ouvert)

Dans ce dernier cas, A est dit fermé, par définition : tout l'espace est fermé comme complémentaire de l'ensemble vide .

4. On aurait pu définir une topologie par la famille des ensembles fermés en remplaçant dans l'axiome I , la réunion par l'intersection .

Les exemples étant toujours plus compliqués que ces définitions, nous n'en donnerons pas ; on en rencontre sans cesse . Les cas qui se présentent sont si variés que tout exemple risque de faire oublier la simplicité de l'axiome de départ .

<u>Un moyen d'obtenir une topologie</u> dans un ensemble fondamental E est le suivant : On part d'une famille de sous-ensembles de E ne vérifiant pas nécessairement l'axiome I et on prend pour ensembles ouverts la famille $\mathcal{V}_{\Sigma}$ formée de toutes les réunions d'ensembles de $\mathcal{V}$. La condition pour que deux familles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ conduisent à la même topologie est : $\mathcal{V}_{\Sigma} = \mathcal{V}'_{\Sigma}$, ou encore : pour tout ensemble V de $\mathcal{V}$ et tout point p de V , il y a un ensemble V' de $\mathcal{V}'$ contenant p et contenu dans V, et inversement .

<u>Sous-espace</u> . Soit A un ensemble de $\mathcal{E}$. La famille des ensembles $O \cap A$, où O est ouvert, vérifie l'axiome I ; elle

définit donc une topologie dans A, c'est la topologie induite dans A par celle de $\mathcal{E}$. L'espace topologique $\mathcal{A}$ ainsi obtenu est dit sous espace de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{A}$ est plongé ou immergé dans $\mathcal{E}$. Par exemple, la topologie d'une droite euclidienne du plan euclidien, est induite par celle du plan.

Produit topologique. Considérons des espaces topologiques $\mathcal{E}_i$ d'ensembles fondamentaux E_i où i est un élément d'un ensemble d'indices I quelconques.

Dans l'ensemble produit $E = \prod_{i \in I} E_i$, considérons la famille $\mathcal{V}$ des ensembles $\prod_{i \in I} O_i$ où O_i est un ensemble ouvert de $\mathcal{E}_i$. La famille $\mathcal{V}$, vérifiant l'axiome I, définit une topologie dans E d'où un espace topologique $\mathcal{E}$ qui est, par définition, le produit des espaces topologiques donnés.

Exemple : l'espace euclidien à n dimensions est le produit de n droites euclidiennes.

C.- FONCTIONS CONTINUES.

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ étant deux espaces topologiques, soit f(p) une fonction définie pour tout point de $\mathcal{E}$ et dont la valeur est un point de $\mathcal{F}$. Considérons la définition suivante :

C.1 - f(p) est continue si, p étant un point adhérent de A, f(p) est adhérent à f(A)

définition qui correspond, si l'on veut, à une notion intuitive.

Soit V un ensemble ouvert contenant f(p). Il y a

un ensemble ouvert U contenant p et tel que $f(U) \subset V$. Sinon tout U contiendrait un point x_U tel que $f(x_U) \not\subset V$. Soit A l'ensemble des points x_U, p est adhérent à A et f(A) est étranger à V , donc f(p) n'adhère pas à f(A) . Par conséquent une fonction continue au sens C.1 vérifie la définition classique :

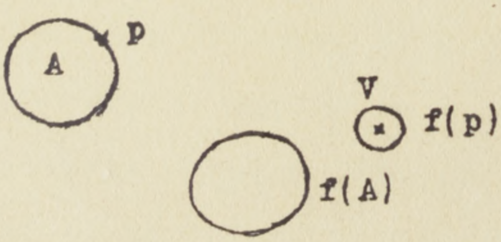
C.2 : <u>Si V est un ensemble ouvert de</u> $\mathcal{F}$ <u>contenant f(p) , il y a un ensemble ouvert U contenant p tel que $f(U) \subset V$</u>.

Soit maintenant V un ensemble ouvert ; ou bien $f^{-1}(V)$ est vide, donc ouvert, ou bien , tout point de $f^{-1}(V)$

/point est/intérieur , donc $f^{-1}(V)$ est ouvert . Par conséquent, la fonction f vérifie la propriété :

C.3 : <u>Si V est unensemble ouvert, $f^{-1}(V)$ est ouvert</u> .

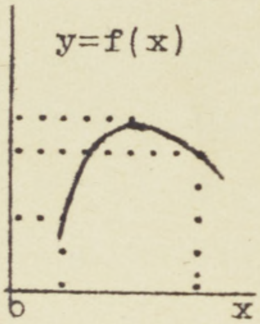
Enfin, démontrons que C.2 entraine C.1 . Supposons en effet qu'il existe une fonction f(p) qui vérifie C.3 et



qui ne vérifie pas C.1 . Il y aurait alors un point p adhérent à un ensemble A tel que f(p) n'adhère pas à f(A) . Il y a donc un ensemble ouvert V contenant f(p) sans contenir de point de f(A); son image inverse est un ensemble ouvert

U contenant p tel que $f(U) \subset V$, donc ne contenant aucun point de A ; p étant adhérent à A, il y a contradiction .

Le cycle se referme ; les trois propriétés sont équivalentes ; une fonction continue sera une fonction qui vérifie l'une des trois propriétés , donc aussi les deux autres .



Remarque 1. Une fonction continue ne transforme pas toujours un ensemble ouvert en un ensemble ouvert (fig.)

Remarque 2 . On peut remplacer C.3 par l'"image inverse d'un ensemble fermé est fermée ".

Bien entendu, il ne s'est agi, répétons-le, que de fonctions f(p) définies dans tout l'espace; sinon, l'équivalence des trois propriétés ne serait plus vraie, il faudrait utiliser une topologie induite .

Une correspondance biunivoque continue dans les deux sens est appelée homéomorphie, ou transformation topologique. Dans ce cas, les ensembles ouverts se correspondent, il s'agit au fond des mêmes espaces topologiques .

Remarque . Une transformation peut être biunivoque et continue dans un sens, sans être topologique ; prenons par exemple un premier espace de trois points, a, b, c, les ensembles ouverts étant O, ab, cb, abc, et un deuxième espace discret de trois points a',b',c'; la correspondance $a \longrightarrow a'$, $b \longrightarrow b'$, $c \longrightarrow c'$ est continue dans un sens, mais pas dans l'autre .

D.- QUALITES DES ENSEMBLES D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE & DE CET ESPACE .

Points d'accumulation

Par définition, p est point d'accumulation de A si tout ensemble ouvert contenant p contient un point de A autre que p .

On voit immédiatement que les points d'accumulation de A appartiennent à A ou à sa frontière , et que tout point frontière est, ou point de A, ou point d'accumulation de A . D'où l'équivalence :

(ensemble fermé) $\rightleftharpoons$ (ensemble qui contient ses points d'accumulation)

Remarque 1 . Il peut arriver qu'il n'y ait pas une infinité de points dans tout ensemble ouvert contenant p .

Remarque 2 . L'ensemble d'accumulation d'un ensemble donné n'est pas toujours fermé .

Par définition, p est dit point d'accumulation complète de A (maximée au sens de Fréchet) si tout ensemble ouvert contenant p contient un ensemble de points de A qui a même puissance que A .

Compacité

Par définition :

Un ensemble A est dit compact si toute partie infinie de A a un point d'accumulation .(Généralisation des ensembles bornés, lemme de Bolzano-Weierstrass).

Un ensemble est dit compact en soi si toute partie infinie de A a un point d'accumulation contenu dans A.

On voit que : Tout ensemble fermé et compact est compact en soi . Si un ensemble E compact en soi est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles ouverts O_i : $E \subset \Upsilon O_i$, il est contenu aussi dans la réunion d'un nombre fini des O_i (lemme de Borel-Lebesgue dénombrable) .

Un espace topologique est dit compact si l'ensemble de tous les points de l'espace est compact .

Soit A un ensemble et $\mathfrak{A}$ le sous-espace avec topologie induite correspondant. On aperçoit l'équivalence suivante : (ensemble A compact en soi) $\rightleftarrows$ (espace $\mathfrak{A}$ compact).

Un ensemble est dit localement compact si chacun de ses points est contenu dans un ensemble ouvert compact .

Bicompacité. (compacité parfaite au sens de Fréchet).

Un ensemble A est dit bicompact si toute partie infinie de A a un point d'accumulation complète . On définit de même bicompact en soi et localement bicompact.

La propriété fondamentale de la bicompacité s'exprime par les équivalences suivantes :

(ensemble A bicompact en soi) $\leftrightarrows$ (de toute famille d'ensembles ouverts dont la réunion contient A, on peut extraire une famille finie jouissant de la même propriété) $\rightleftarrows$ (toute famille monotone ordonnée d'ensembles fermés contenus dans A a une intersection non vide). Le deuxième terme est le lemme de Borel-Lebesgue général (Chittenden) ; la troisième est la propriété de Cantor .

Ces équivalences sont particulièrement importantes dans le cas d'un espace vérifiant le deuxième axiome de dénombralité [1] de Haussdorff : en ce cas (compact) $\leftrightarrows$ (bicompact).

Limites.

On dit qu'une suite de points a_n distincts ou non converge vers a si tout ensemble ouvert contenant a contient tout point de la suite sauf au plus un nombre fini .

Il existe des espaces bicompacts dans lesquels il n'existe aucune suite convergente, à l'exception de celles dont tous les points sont les mêmes à partir d'un certain rang (Tychonoff) .

E.- AUTRES FAMILLES D'ESPACES TOPOLOGIQUES .

Nous venons d'étudier une famille d'espaces topologiques, il en existe beaucoup d'autres .

---

(1) Dans la suite, cet axiome sera désigné par D.2.

Deux questions se posent alors :

1°) Quelles sont les familles d'espaces intéressantes par leurs propriétés ? Ainsi la famille des espaces-limites (Fréchet) qui a joué un grand rôle historique semble avoir perdu aujourd'hui beaucoup de son intérêt .

2°) Une famille ayant été jugée intéressante, trouver pour la définir un système d'axiomes à partir duquel on puisse l'étudier aussi commodément que possible. Il y a intérêt, par exemple, à ce que la définition soit univoque. Ainsi dans les définitions classiques des espaces par des voisinages, des systèmes de voisinages différents peuvent conduire aux mêmes ensembles ouverts; il est nécessaire alors de dire dans quels cas les espaces topologiques définis par ces systèmes doivent être considérés comme équivalents .

Voici quelques familles d'espaces qui se rangent par ordre de généralité décroissante, chacune d'elle comprenant les suivantes :

1. <u>Espaces avec notion de dérivation</u>
2. <u>Espaces $\mathcal{V}$</u> (Fréchet). Les voisinages sont complètement arbitraires.

Ces espaces sont de nature différente des suivants et ne conduisent pas aux propriétés Cl.2.3 des fonctions continues .

3. <u>Espace topologique avec axiome I</u>

   Toute réunion d'ensembles ouverts est ouvert (Sierpinski)

   Propriétés Cl.2.3, des fonctions continues.

4. Espace topologique avec axiome I et axiome II : l'intersection de deux ensembles ouverts est ouverte .
Propriétés des systèmes de voisinages.

5. Espace accessible (Fréchet)
Pour deux points a et b, il existe un ensemble ouvert contenant a sans contenir b.

6. Espace de Hassdorff : séparation de deux points par des ensembles ouverts.

7. Séparation de deux points par des ensembles fermés.

8. Espaces réguliers . Séparation d'un point et d'un ensemble fermé par des ensembles ouverts .

Ces propriétés sont transitives, c.à.d.que si elles sont vraies d'un espace, elles sont vraies de tous ses sous-espaces .

9. Espaces complètement réguliers.
(Tychonoff). Séparation d'un point et d'un ensemble fermé par une fonction continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue prenant la valeur 0 au point et la valeur 1 sur l'ensemble .

Pour qu'un espace de Haussdorff puisse être immergé dans un espace bicom-

S'il existe un système dénombrable de voisinages (axiome D2.) les 5 familles 8-12 sont identiques
Dans ce cas l'espace universel E dans lequel on peut immerger tout l'es-

pact il faut et il suffit qu'il soit complètement régulier .

Propriétés non transitives

10. Espace normal . Séparation de deux ensembles fermés par des ensembles ouverts ; ou : si $\bar{A} \cap \bar{B} = 0$, A et B sont séparables par des ensembles ouverts; ou encore : étant donnés des ensembles fermés étrangers A et B il existe une fonction continue prenant les valeurs 0 sur A et 1 sur B. S'il existe un système de voisinages de puissance α on peut immerger l'espace dans un espace universel E_{α} (Tychonoff)

11. Espace complètement normal : Deux ensembles A et B sont séparables par des ensembles ouverts, chaque fois que $A \cap \bar{B} = 0$, et $\bar{A} \cap B = 0$. La condition nécessaire et suffisante pour que tous les sous-espaces d'un espace normal soient normaux est qu'il soit complètement normal.

pace normal n'est autre que le cube de l'espace de Hilbert (voir le texte de la démonstration).

12. Espace métrisable :

Il existe une fonction symétrique et non négative de deux points $d(a,b)$ qui n'est nulle que si $a=b$ et qui vérifie l'inégalité du triangle :

$d(ab) + d(bc) \geq d(ac)$.

Propriétés des familles énumérées

Espace topologique avec axiome I + axiome II : l'intersection de deux ensembles ouverts est ouverte .

L'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est ouverte . Donc la réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés est fermée . Tout ensemble de points d'accumulation d'un ensemble donné est fermé .

Systèmes de voisinages

Soit une famille $\mathcal{V}$ d'ensembles possédant les deux propriétés suivantes :

1. Tout point appartient à un ensemble de $\mathcal{V}$.
2. Si $p \subset (V \cap V')$, $(V, V' \in \mathcal{V})$, il existe un ensemble $W \in \mathcal{V}$ tel que $p \in W \subset (V \cap V')$.

La famille $\mathcal{V}_\Sigma$ des réunions des ensembles de $\mathcal{V}$

satisfait aux axiomes I et II et définit par conséquent un espace topologique (I.II) . Inversement tout espace topologique (I,II) peut être défini de cette manière en prenant comme système $\mathcal{V}$ tous les ensembles ouverts . Deux familles de voisinages $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ définiront la même tppologie sous la condition déjà vue plus haut (P.5) . Nous avons les propriétés :

1. Le produit topologique de plusieurs espaces (I,II) défini par les systèmes de voisinages $\mathcal{V}_i$ s'obtient en prenant pour voisinages les produits des voisinages des $\mathcal{V}_i$.

2. La définition C.2 des fonctions continues devient ici : pour tout voisinage V de f(p) , il existe un voisinage U de p tel que $f(U) \subset V$.

Un invariant important d'un espace (I,II) est la plus petite puissance α des systèmes de voisinages qui le définissent (voir sur le tableau l'utilisation de cet invariant pour les espaces normaux). Dans tout ensemble de puissances, il y en a toujours une de plus petite que les autres . Si est le dénombrable l'espace satisfait à D.2. , on le dit <u>parfaitement séparable (</u>Fréchet) (aucun rapport avec les axiomes de séparation).

<u>Théorèmes de métrisation</u>

1. Il existe une condition relativement simple portant sur le système de voisinages pour qu'un espace (I,II) soit mé-

trisable (Alexander-Urysohn-Fréchet).

2. <u>Un espace normal qui satisfait à D.2 est métrisable</u> (on démontre même qu'il suffit qu'il soit régulier).

Etant donné, en effet, un système dénombrable de voisinages, numérotons les couples K_n de voisinages D et D' tels que $\overline{D} \in D'$. A tout K_n associons une fonction continue $f_n(p)$ nulle sur $\overline{D}$, égale à 1 sur $\mathcal{C}\, D'$ et comprise entre 0 et 1. A tout point a, faisons correspondre la suite

$a_n = \frac{1}{n} f_n(a)$; on voit immédiatement que :

α) A deux points a et b distincts correspondent des suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ différentes.

β) Pour avoir $\sum (a_n - b_n)^2 < \varepsilon$ il suffit de prendre b dans un certain ensemble ouvert contenant a.

Considérant la suite $\{a_n\}$ comme point de l'espace de Hilbert, il en résulte une homéomorphie de l'espace avec un sous-espace de la sphère de Hilbert : $\sum a_n^2 \leq \sum \frac{1}{n^2}$; on a comme métrique $d(a,b) = \sum (a_n - b_n)^2$.

3. Un espace de Haussdorff localement compact qui vérifie D.2 est métrisable.

4. Un espace de Haussdorff compact et métrisable vérifie D.2.

Enfin, signalons que dans un espace métrisable, l'existence d'une suite dénombrable partout dense (tout point en est point d'accumulation) entraine D.2 .

BIBLIOGRAPHIE

1. Pour les propriétés des espaces satisfaisant aux axiomes I et II, voir HAHN : Theorie der reellen Funktionen (Berlin Srpinger 2è éd.)

2. Espaces vérifiant l'axiome I seulement : Sierpinski , introduction to the general topology (Toronto 1934) et MOORE (Colloquium lectures).

3. Sur la métrisation , la bicompacité, les axiomes de séparation, voir en outre de Ahn, les mémoires d'URYSOHN et d'URYSOHN-ALEXANDROFF , Math.Ann.T.92, 95 et 96 ; Verhandlingen Ak. Amsterdam , 1928 ; C.R. t.177 (1923) p.1294 .

4. TYCHONOFF, Math.Ann. t.102 ,p.544 et t.111, p.762 .

5. HAUSDORFF , Grundzüge der Mengenlehre (Berlin 1927).

6. FRECHET , Les espaces abstraits (Paris 1928) , où l'on trouvera une multitude de définitions (en particulier toutes celles ci-dessus) et de très nombreuses références .

7. CHITTENDEN, Bull.Amer.math.Soc. Vol XXX , 1924 .
