Jean Delsarte

La théorie des opérateurs hermitiques bornés

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. n° 4, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A6_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année 1934-1935

ESPACE DE HILBERT

D.- La théorie des opérateurs hermitiques bornés

Exposé fait par M. Jean DELSARTE, le 14 Janvier 1935.

La théorie des opérateurs hermitiques bornés est due essentiellement à Hilbert qui l'exposa en 1906 dans les Göttingen Nachrichten ,(Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen; vierte Mitteilung, p.157). La théorie fut ultérieurement perfectionnée et complétée par Hellinger et aussi par Fr.Riesz

Dans cette conférence, nous adopterons, sans grandes modifications, l'exposé de Riesz, à la fois plus rapide et plus compréhensif.

Plan de l'exposé

a).- Rappel sommaire des propriétés des formes hermitiques dans l'espace de Hilbert à n dimensions .

b).- Réduites successives d'une forme hermitique, établissement d'une correspondance entre les polynomes à une variable et certaines fonctions polynomiales d'une forme hermitique donnée .

c).- Extension de cette correspondance à des fonctions plus générales .

---

a).- Formes hermitiques à n variables

Soit A un opérateur hermitique, c'est à dire identique à son associé : $A = A^{\times}$.

On en déduit une fonctionnelle bilinéaire des éléments f et g de l'espace : $(f.Ag) = (Af.g)$
et une fonctionnelle quadratique de l'élément f :

$$(f.Af) = (Af.f)$$

qui est nécessairement un nombre réel; cette dernière fonctionnelle est une forme hermitique. Lorsque l'espace de Hilbert envisagé n'a qu'un nombre fini n de dimensions, on retrouve évidemment les formes hermitiques à n variables; il est bien connu, depuis Hermite, qu'une telle forme est réductible d'au moins une manière, à une somme de n carrés

$$(f.Af) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |(f.\varphi_i)|^2$$

les λ_i étant des nombres réels, les n éléments φ_i formant un système orthogonal et normal, de telle sorte que

$$\sum_{i=1}^{n} |(f.\varphi_i)|^2 = \|f\|^2$$

Si on introduit les n opérateurs de projection $P_i f = \varphi_i(f.\varphi_i)$ les formes hermitiques correspondantes sont respectivement $|(f.\varphi_i)|^2$, de sorte qu'on peut écrire

$$A = \sum \lambda_i P_i$$

(Dans cette égalité nous désignons par une même lettre un opérateur hermitique et la forme hermitique correspondante; nous ferons de même à l'avenir).

Ajoutons que les opérateurs de projection P_i sont orthogonaux, et que leur somme se réduit à l'opérateur identité E . Il en résulte sans peine que les opérateurs

$\lambda E - A = \sum (\lambda - \lambda_i) P_i$ et $\sum P_i / (\lambda - \lambda_i)$ sont inverses l'un de l'autre quel que soit $\lambda \neq \lambda_i$.

Les remarques suivantes sont essentielles : supposons que l'élément f varie sous la condition $\| f \| = 1$; les formes hermitiques P_i prennent des valeurs toujours positives, qui ont alors pour somme l'unité, la forme hermitique $A = \sum \lambda_i P_i$ prend donc une valeur toujours comprise entre le plus grand et le plus petit des nombres λ_i, et ces deux nombres extrêmes sont respectivement égaux au maximum et au minimum de la forme A variée sous la condition $\| f \| = 1$.

D'après les relations entre les opérateurs P_i, on constate facilement que les opérateurs A, A^2, A^3 etc .. ont pour expression

$A = \sum \lambda_i P_i$; $A^2 = \sum \lambda_i^2 P_i$;.... ; $A^n = \sum \lambda_i^n P_i$;.....

désignant ensuite par $p(\mu)$ le polynome à coefficients réels

$$p(\mu) \equiv a_0 + a_1 \mu + \ldots + a_r \mu^r$$

et posant

$$p(A) = a_0 E + a_1 A + \ldots + a_r A^r$$

on voit que $p(A) = \sum p(\lambda_i) P_i$; de là résulte que l'élément f de l'espace variant sous la condition $\| f \| = 1$, l'ensemble des valeurs prises par la forme hermitique $p(A)$ pour tous ces éléments est compris entre les valeurs maxima et minima de la forme A variée dans les mêmes conditions.

---

b).- Réduites successives d'une forme hermitique

Soit, dans l'espace de Hilbert général, un système d'éléments coordonnés (α_i), système toujours supposé orthogonal et normal.

L'opérateur identique E est défini par le système (L)

$\sigma_i = \alpha_i$.

Le $n^{ème}$ réduit E_n de E est défini par le système (L) suivant :

$\sigma_{ni} = \alpha_i$; $(i \leq n)$; $\sigma_{ni} = 0$; $(i > n)$

E_n peut être regardé comme opérant dans la multiplicité — linéaire $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$; son domaine des valeurs se réduit en effet à cette multiplicité, et il transforme de la même manière deux éléments ayant même projection sur cette multiplicité ; E_n se réduit en fait à l'opérateur de projection sur la multiplicité finie $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots \alpha_n)$

Observons encore que E_n tend fortement vers E.

Soit maintenant A un opérateur linéaire borné ayant pour système (L), par rapport aux éléments coordonnés, l'ensemble d'éléments (σ_i). On définit d'abord l'opérateur B_n ayant pour système (L)

$\sigma_{ni} = \sigma_i$; $(i \leq n)$; $\sigma_{ni} = 0$; $(i > n)$

Il est clair que B_n tend fortement vers A, il a encore comme domaine des valeurs la multiplicité $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ mais deux éléments ayant même projection sur cette multiplicité sont transformés différemment, en général, par B_n c'est pourquoi on prend pour $n^{\text{ème}}$ réduit de A l'opérateur $A_n = B_n E_n$; il opère bien dans $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots \alpha_n)$ et peut être regardé comme un opérateur défini dans un espace à n dimensions , il tend fortement vers A puisqu'il en est ainsi de B_n et que E_n tend fortement vers E.

Supposons maintenant A hermitique , il en est de même de A_n . On a le théorème fondamental suivant :

<u>Théorème 1</u> . - L'élément f variant sous la condition $\| f \| = 1$ dans la multiplicité $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, la forme hermitique A varie entre les bornes m et M , la forme hermitique A_n varie entre les bornes m_n et M_n , je dis que $m = m_n = M_n = M$

Soit en effet f_n le transformé de f par E_n ; on a

$$(f.A_n f) = \sum_{i=1}^{\infty} (f.\alpha_i)\,\overline{(\sigma_{ni}.f_n)} = \sum_{i=1}^{n} (f.\alpha_i)\,\overline{(\sigma_{ni}.f_n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f_n.\alpha_i)\,\overline{(\sigma_{ni}.f_n)} = \sum_{i=1}^{n} (f_n.\alpha_i)\,\overline{(\sigma_i.f_n)} = (f_n.Af_n)$$

m_n et M_n sont donc les bornes inférieure et supérieure de la forme hermitique A quand f, de norme unité, varie dans la multiplicité $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots ; \alpha_n)$, ce qui prouve notre assertion .

<u>Conséquence</u>.- $\mathcal{P}(\mu)$ étant un polynome à coefficients réels

$$\mathcal{P}(\mu) \equiv a_0 + a_1 \mu + \ldots + a_r \mu^r$$

on définit immédiatement

$$\mathcal{P}(A) = a_0 E + a_1 A + \ldots + a_r A^r$$

$$\mathcal{P}(A_n) = a_0 E + a_1 A_n + \ldots + a_r A_n^r$$

et il est clair que $\mathcal{P}(A_n)$ tend fortement vers $\mathcal{P}(A)$. Or, A_n peut être considérée comme une forme hermitique dans un espace à n dimensions, donc la forme $\mathcal{P}(A_n)$ prend pour tout élément f de norme unité, une valeur comprise entre le maximum et le minimum de $\mathcal{P}(\mu)$ dans l'intervalle $(m_n\ M_n)$; passant à la limite, on voit que l'ensemble des valeurs de la forme $\mathcal{P}(A)$, variée sous la condition $\|f\| = 1$, est tout entier compris entre les valeurs extrêmes de $\mathcal{P}(\mu)$ dans l'intervalle (m,M).

Nous avons établi à partir d'une forme hermitique A une correspondance entre les polynomes $\mathcal{P}(\mu)$ et les formes $\mathcal{P}(A)$;

1).- cette correspondance est distributive : au polynome $a_1 \mathcal{P}_1(\mu) + a_2 \mathcal{P}_2(\mu)$ correspond la forme $a_1 \mathcal{P}_1(A) + a_2 \mathcal{P}_2(A)$

2).- l'ensemble des valeurs prises par la forme $\mathcal{P}(A)$, la forme E étant égale à l'unité, est compris entre les valeurs extrêmes de $\mathcal{P}(\mu)$ dans l'intervalle $(m;M)$.

3).- la correspondance est multiplicative : au produit effectif de polynomes $\mathcal{P}_1(\mu)\,\mathcal{P}_2(\mu)$ correspond le produit symbolique de formes $p_1(A)\, p_2(A)$.

---

c).- <u>Extension de la correspondance</u>

On pourrait facilement étendre la correspondance aux fonctions continues du paramètre ρ ; il suffirait d'utiliser une suite de polynomes convergeant uniformément vers la fonction; on obtiendrait ainsi une suite uniformément convergente d'opérateurs et de formes hermitiques . Mais pour la suite, il est indispensable d'étendre la correspondance à certaines fonctions discontinues .

Nous prendrons une suite croissante de polynomes

$$p_1(\rho) \leq p_2(\rho) \leq \dots \leq p_n(\rho) \leq \dots$$

quel que soit ρ dans l'intervalle $(m\ M)$; ces polynomes étant de plus bornés dans leur ensemble sur cet intervalle. Dans ces conditions, pour $m \leq \rho \leq M$, la suite $p_n(\rho)$ converge vers une fonction $p(\rho)$ qui ne sera pas continue en général . Prenons la suite correspondante de formes hermitiques

$$p_1(A)\ ;\quad p_2(A)\ ;\ \dots\ ;\ p_n(A)\ ;\ \dots$$

La forme $p_j(A) - p_i(A)$, $(i < j)$ correspond au polynome $p_j(\rho) - p_i(\rho)$ qui est positif dans l'intervalle (m,M), la borne inférieure de ce polynome est donc positive et d'après (2), la forme $p_j(A) - p_i(A)$ prend une valeur positive quel que soit l'élément de l'espace pour lequel on la calcule . C'est ce que nous entendrons quand nous dirons que la suite de forme $p_n(A)$ est croissante.

De plus, les $p_n(\rho)$ sont bornés dans leur ensemble ; il est clair , toujours d'après (2), qu'il en est de même des valeurs prises par les formes $p_n(A)$ pour un élément f déterminé . Si $\|f\| = 1$, la borne supérieure des $p_n(A)$ calculées pour cet élément, est égale à celle des $p_n(\rho)$. Dès lors , quel que soit l'élément f de l'espace, ce qui précède montre que les valeurs des formes $p_n(A)$ pour cet élément, ont une limite pour n infini ; la considération des valeurs prises par ces formes pour l'élément f + g montre que les fonctionnelles bilinéaires correspondantes ont des limites quels que soient les éléments f et g pour lesquels on les calcule; par suite les opérateurs hermitiques $p_n(A)$ forment une suite faiblement convergente vers un opérateur borné, nécessairement hermitique, B.

<u>Théorème 2</u>.- L'opérateur limite B ne dépend que de la fonction $p(\rho)$ et non de la suite croissante de polynomes dont elle est la limite .

Plus généralement, nous démontrerons le résultat suivant:

<u>Théorème 3</u>.- Soient deux suites croissantes de polynomes $p_n(\rho)$ et $q_n(\rho)$ tendant respectivement vers les fonctions $p(\rho)$ et $q(\rho)$; supposons de plus que

dans (m,M) on ait $p(\rho) \leq q(\rho)$; soient alors B la limite faible des opérateurs $p_n(A)$ et C la limite faible des opérateurs $q_n(A)$; je dis qu'entre les formes B et C on a l'inégalité $B \leq C$.

Choisissons en effet un indice i et un nombre positif ε ; considérons le polynome $p_i(\rho) - \varepsilon$; on peut trouver un indice j assez grand pour que $q_j(\rho) > p_i(\rho) - \varepsilon$ quel que soit ρ dans (m,M) . Il suffit pour le voir de considérer la suite d'ensembles E_1 ; E_2 ;..... , sur lesquels

$$q_1(\rho) \leq p_i(\rho) - \varepsilon \quad ; \quad q_2(\rho) \leq p_i(\rho) - \varepsilon \quad ; \ \ldots$$

etc ...

ces ensembles s'emboitent; il existe un j assez grand pour que $E_j = 0$, sinon la suite E_j se prolongeant indéfiniment et étant formée d'ensembles fermés, il y aurait une valeur ρ_0 de ρ appartenant à tous les E_j pour láquelle on aurait

$$q(\rho_0) \leq p_i(\rho_0) - \varepsilon$$

ce qui est impossible . L'indice j étant ainsi choici, on aura pour tout élément de l'espace $q_j(A) > p_i(A) - \varepsilon E$; puis , faisant j infini, $C > p_i(A) - \varepsilon E$; mais cela ayant lieu pour i et ε arbitraires, il en résulte $C > B - \varepsilon E$, puis $C \geq B$.

Je dis maintenant que $B = C$ si $p(\rho) = q(\rho)$; on a en effet simultanément $p(\rho) \leq q(\rho)$; $q(\rho) \leq p(\rho)$

et donc aussi $B \leq C$; $C \leq B$; par suite $B = C$.

La correspondance est donc étendue aux fonctions bornées limites de suites croissantes de polynomes ; on l'étend de même aux fonctions limites de suites décroissantes de polynomes . Prenons maintenant deux fonctions $p(p)$ et $g(p)$ du premier type ; $p(p) + g(p)$ est encore du premier type, mais $p(p) - g(p)$ n'est ni du premier ni du second . Si $r(p) = p(p) - g(p)$, on pose par définition $r(A) = p(A) - g(A)$; il faut montrer que cette convention est légitime, c'est à dire que

$$p(p) - g(p) = p_1(p) - g_1(p) \quad \text{entraine}$$
$$p(A) - g(A) = p_1(A) - g_1(A) ;$$

c'est bien clair, car il en résulte

$$p(p) + g_1(p) = p_1(p) + g(p) ,$$

où les deux membres sont du premier type , donc

$$p(A) + g_1(A) = p_1(A) + g(A)$$

et

$$p(A) - g(A) = p_1(A) - g_1(A) .$$

On a du même coup montré que la correspondance est distributive .

Constatons maintenant que la propriété (2) a encore lieu . Prenons une forme $r(A) = p(A) - g(A)$, $p(p)$ et $g(p)$ étant par exemple du premier type. Je dis que l'ensemble des valeurs de la forme $r(A)$, variée sous la condition $\|f\| = 1$, est compris entre le maximum et le minimum de $r(p)$ sur l'intervalle (m,M). Soit k le minimum de $r(p)$ dans cet intervalle, on a $r(p) \geq k$ ou $\mathfrak{p}(p) \geq \mathfrak{q}(p) + k$, et dans les deux membres figurent des fonctions du premier type, il vient alors, d'après le théorème 3, $\mathfrak{p}(A) \geq \mathfrak{q}(A) + kE$ ou $r(A) \geq kE$; on montrerait de même que $r(A) \leq KE$, K désignant le maximum de $r(p)$. Donc...

Nous démontrerons enfin le théorème suivant :

<u>Théorème 4</u>.- La correspondance est multiplicative.

Soient $\mathfrak{p}(p)$ et $\mathfrak{q}(p)$ des fonctions du premier type, limites de suites croissantes de polynomes : $\mathfrak{p}_n(p)$ et $\mathfrak{q}_n(p)$. Nous supposons toutes ces fonctions positives, ce qui revient à leur ajouter des constantes convenables. Considérons la suite croissante $\mathfrak{p}(p)\mathfrak{q}_n(p)$ qui tend vers $\mathfrak{p}(p)\mathfrak{q}(p)$; toutes ces fonctions sont du premier type, il leur correspond donc des formes hermitiques $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_n(A)$, $\mathfrak{p}\mathfrak{q}(A)$. Je dis que pour n infini, l'opérateur $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_n(A)$ tend faiblement vers $\mathfrak{p}\mathfrak{q}(A)$.

Soit en effet $r(p)$ un polynome tel que $r(p) < \mathfrak{p}(p)\mathfrak{q}(p)$ on démontre, comme pour le théorème 3, qu'on peut trouver un indice n tel que $\mathfrak{p}(p)\mathfrak{q}_n(p) > r(p)$ pour toute valeur p de l'intervalle (m,M) ; alors $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_n(A) > r(A)$; d'ailleurs la suite $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_n(A)$ est une suite croissante bornée il en résulte, comme plus haut, que les opérateurs $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_n(A)$ tendent faiblement vers un opérateur hermitique borné B, la forme B est supérieure à la forme $r(A)$.

Prenons maintenant une suite croissante de polynomes tendant vers $p(p)\,q(p)$, par exemple la suite $r_n(p) = p_n(p)\,q_n(p)$; le raisonnement précédent s'applique aux polynomes $r_n(p) - 1/n$; et par suite $B > r_n(A) - E/n$, quel que soit l'indice n. Pour n infini, on a $B \geq pq(A)$. D'autre part on a

$$p(p)\,q_n(p) < p(p)\,q(p)$$

par suite

$$pq_n(A) < pq(A)$$

et pour n infini $B \leq pq(A)$; il en résulte que

$$B = pq(A).$$

Ceci étant bien vu, la démonstration s'achève aisément : la correspondance étant multiplicative pour les polynomes, on a $p_m(A)\,q_n(A) = p_m q_n(A)$; et en prenant les limites faibles des deux membres, n restant fixe et m devenant infini, il vient sans difficulté

$$p(A)\,q_n(A) = pq_n(A) \;;$$

l'opérateur B est donc aussi la limite faible, pour n infini des opérateurs $p(A)\,q_n(A)$, limite qui est évidemment $p(A)\,q(A)$ de sorte qu'on a bien $p(A)\,q(A) = pq(A)$. La correspondance est multiplicative .

d).- <u>Etude du spectre</u>

Soit une fonction continue $\varphi(\rho)$ définie de $-\infty$ à $+\infty$, et qui soit dans (m,M) limite d'une suite de polynomes ; il lui correspond une certaine forme $\varphi(A)$.
Nous approximerons cette fonction par une fonction en escalier $\varphi'(\rho)$. Divisons pour celà l'intervalle $(-\infty ;+\infty)$ en intervalles partiels I_k, $(\xi_k \leq \rho < \xi_{k+1})$ dans lesquels l'oscillation de $\varphi(\rho)$ sera au plus égale à ω ; ρ_k sera un nombre de l'intervalle I_k et $\varphi'(\rho)$ sera égal à $\varphi(\rho_k)$ dans I_k. Introduisons encore les fonctions discontinues, $\varphi_\xi(\rho)$ égales à l'unité pour $\rho < \xi$ et nulles pour $\rho \geq \xi$; elles sont aussi limites de suites croissantes de polynomes , il leur correspond des opérateurs hermitiques A_ξ. Comme on a

$$\varphi'(\rho) = \sum_k \varphi(\rho_k).\left[\varphi_{\xi_{k+1}}(\rho) - \varphi_{\xi_k}(\rho)\right] \quad ;$$

il vient

$$\varphi'(A) = \sum_k \varphi(\rho_k)\left[A_{\xi_{k+1}} - A_{\xi_k}\right] \quad ;$$

de plus $\left|\varphi(\rho) - \varphi'(\rho)\right| < \omega$ quel que soit ρ, donc on a, entre formes, les inégalités suivantes :

$$-\omega E \leq \varphi(A) - \varphi'(A) \leq \omega E$$

$\varphi'(A)$ donne donc une valeur approchée de $\varphi(A)$ à ωE près; quand la limite supérieure d'oscillation tend vers zéro, $\varphi'(A)$ tend faiblement vers $\varphi(A)$.
On écrira symboliquement

$$\varphi(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d A_{\xi} \; ;$$

cette notation, analogue à l'intégrale de Stieljès ayant un sens précis, d'après ce qui précède . En particulier, on a, à cause de la propriété 3 l'identité entre opérateurs, pour $\varphi(\mu) = 1 / (\lambda - \mu)$,

$$(\lambda E - A)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d A_{\xi}}{\lambda - \xi}$$

valable, à priori, seulement pour λ complexe. Mais on peut remarquer que A_{ξ} est nul pour $\xi < m$, et qu'il se réduit à E pour $\xi > M$; dans la sommation qui donne $\varphi'(A)$, on peut évidemment supprimer les termes correspondant aux intervalles I_k dans lesquels A_{ξ} reste indépendant de ξ ; en passant à l'intégrale , on voit qu'elle s'écrit aussi bien

$$(\lambda E - A)^{-1} = \int_{m}^{M} \frac{d A_{\xi}}{\lambda - \xi}$$

elle a donc encore un sens pour λ réel inférieur à m ou supérieur à M . Elle a même encore un sens pour toutes les valeurs de λ intérieures à (m;M) telles de plus qu'il existe des intervalles I entourant λ , dans lesquels A_{ξ} reste constant. Il y a donc , dans l'intervalle (m,M) un ensemble de valeurs de λ pour lesquelles la formule n'a plus de sens Ces valeurs sont telles que, aussi petit que soit ε , A_{ξ} ne soit pas constant pour $\lambda - \varepsilon < \xi < \lambda + \varepsilon$.

<u>Théorème</u> 5.- Les valeurs que nous venons de définir forment

un ensemble S qui se confond avec le spectre de l'opérateur hermitique A.

Soit λ une telle valeur, et désignons par $(\lambda - \varepsilon\ ;\ \lambda + \varepsilon)$ l'intervalle où A_ξ n'est pas constant. Posons encore

$$g(p) = \rho_{\lambda+\varepsilon}(p) - \rho_{\lambda-\varepsilon}(p) = \begin{cases} 1 & (\lambda - \varepsilon \leq p < \lambda + \varepsilon) \\ 0 & (p < \lambda - \varepsilon \text{ , ou } p \geq \lambda + \varepsilon) \end{cases}$$

On a

$$g(A) = A_{\lambda+\varepsilon} - A_{\lambda-\varepsilon}$$

qui ne s'annule pas identiquement, il existe donc un élément f de l'espace tel que son transformé par l'opérateur $g(A)$ ait une norme non nulle; soit g ce transformé . D'ailleurs $g^2(p) = g(p)$, et par suite $g(A)\,g(A) = g(A)$; le carré scalaire $(g.g)$ peut donc s'obtenir en calculant la valeur prise par la forme $g(A)$ pour l'élément f; de plus, en appliquant l'opérateur $g(A)$ à g , on doit retrouver g. Par suite , appliquer l'opérateur $(\lambda E - A)^2$ à g revient à lui appliquer l'opérateur $(\lambda E - A)^2\, g(A)$; or, la forme correspondant à ce dernier opérateur, correspond à la fonction $(\lambda - p)^2\, g(p)$, qui, dans l'intervalle $(\lambda - \varepsilon\ ,\ \lambda + \varepsilon)$ reste inférieure à ε^2 ; appliquons alors l'opérateur $(\lambda E - A)$ à g ; on obtient un élément g', et le carré scalaire de g' est égal à la valeur prise par la forme $(\lambda E - A)^2$ pour l'élément g ; on a donc

$$(g'.g') = (\lambda E - A)^2\, g \leq \varepsilon^2\, (g.g)$$

ou

$$\frac{\|g'\|}{\|g\|} < \varepsilon$$

Si petit que soit ε il existe un élément g de norme non nulle, tel que celà ait lieu. Il en résulte que λ est une valeur singulière, sinon, en effet, $(\lambda E - A)^{-1}$ existerait et serait un opérateur borné, on aurait $g = (\lambda E-A)^{-1}.g'$ puis aussi $\|g\| \leqq \mathfrak{M}\|g'\|$, et le quotient $\|g'\| / \|g\|$ serait borné inférieurement. Donc ...

Le spectre de l'opérateur hermitique A est donc formé de nombres réels, il est intérieur à l'intervalle (m,M).

Théorème 6.- Les nombres m et M appartiennent au spectre.

Soient, dans le cas contraire, m' et M' les extrémités du spectre $m < m' \leqq M' < M$.

A_ξ est alors constant pour $\xi \leqq m'$ et $\xi \geqq M'$, on peut écrire

$$p(A) = \int_{m'-\varepsilon}^{M'+\varepsilon} p(\xi) \, dA_\xi$$

et en particulier

$$E = \int_{m'-\varepsilon}^{M'+\varepsilon} dA_\xi \; ; \qquad A = \int_{m'-\varepsilon}^{M'+\varepsilon} \xi \, dA_\xi \; ;$$

Mais A_ξ est, quand ξ croit, une forme non décroissante; par suite, de la définition précise des symboles précédents résulte les inégalités entre formes

$$(m'-\varepsilon) E < A < (M'+\varepsilon) E$$

d'où, quel que soit ε positif

$$(m'-\varepsilon) \leq m \quad ; \qquad (M'+\varepsilon) \geq M$$

on a donc bien

$$m' = m \quad ; \qquad M' = M$$

<u>Définition et étude du spectre ponctuel</u>.-

Introduisons la fonction

$$g_\xi(\rho) = 0 \quad (\rho \neq \xi) \; ; \quad \text{ou} = 1 \quad (\rho = \xi)$$

qui est limite d'une suite de polynomes . Il lui correspond un opérateur hermitique et une forme hermitique $B_\xi = g_\xi(A)$.

<u>Définittion</u> .- On appelle spectre ponctuel l'ensemble des valeurs ξ pour lesquelles B_ξ n'est pas nul.

<u>Théorème 7</u>.- Le spectre ponctuel forme un ensemble dénombrable.

On a évidemment $B_\xi \geq 0$, et quels que soient $\xi_1; \xi_2; \; \ldots\ldots \; ; \xi_n;$

$$B_{\xi_1} + B_{\xi_2} + \ldots\ldots + B_{\xi_n} \leq E$$

d'où résulte l'assertion.

Il est clair encore que

$$B_\xi^2 = B_\xi \; ; \qquad B_{\xi_1} B_{\xi_2} = 0 \qquad (\xi_1 \neq \xi_2)$$

De plus, $\rho\, g_\xi(\rho) = \xi\, g_\xi(\rho)$, et par suite

$$A B_\xi = B_\xi A = \xi B_\xi$$

on voit donc que

$$(\lambda E - A) B_\lambda = B_\lambda (\lambda E - A) = 0 \qquad (\text{quel que soit } \lambda)$$

Partons alors d'un élément f de l'espace et appliquons lui l'opérateur B_λ, soit $g = B_\lambda f$; appliquons ensuite à g l'opérateur $\lambda E - A$, on trouve zéro, donc

$$\lambda g = A g.$$

Si maintenant λ appartient au spectre ponctuel, il existera un élément f tel que $\| g \|$ ne soit pas nul, (ceci à cause de $B_\lambda^2 = B_\lambda$) et il existera un élément g de l'espace, non nul, solution de l'équation homogène

$$\lambda g = A g$$

λ est une valeur caractéristique de l'opérateur A. Inversement, toute valeur caractéristique appartient au spectre ponctuel; soit, en effet, λ un nombre tel qu'il existe un élément de l'espace, de norme non nulle, solution de l'équation homogène $\lambda g = A g$; appliquer A à g revient à le multiplier par λ ; appliquer $p(A)$ à g revient à le multiplier par $p(\lambda)$; (c'est clair si $p(\rho)$ est un polynome un passage à la limite facile montre qu'il en est de même pour une fonction limite d'une suite de polynomes). On voit donc qu'appliquer B_ξ à g revient à le multiplier par $g_\xi(\lambda)$, ce qui donne zéro si $\lambda \neq \xi$ et g si $\lambda = \xi$; donc B_λ n'est pas identiquement nul, et λ appartient au spectre ponctuel.

D'où :

Théorème 8.- Le spectre ponctuel se confond avec l'ensemble des valeurs caractéristiques de l'opérateur A.

On a enfin le théorème suivant :

Théorème 9.- Le spectre ponctuel fait partie du spectre de A.

Introduisons la fonction

$$P_\xi^+(\rho) = 1 \quad ; (\rho \leq \xi) \quad ; \qquad = 0 \quad ; (\rho > \xi)$$

à laquelle correspond la forme A_ξ^+ ; il est clair que $B_\xi = A_\xi^+ - A_\xi$, d'ailleurs

$$A_{\xi+\varepsilon} = A_\xi^+ = A_\xi = A_{\xi-\varepsilon}^+ = A_{\xi-\varepsilon}$$

de là, on déduit sans peine , en faisant $\varepsilon = 0$

$$A_{\xi+0}^+ = A_{\xi+0} = A_\xi^+ \quad ; \qquad A_\xi = A_{\xi-0}^+ = A_{\xi-0}$$

(on s'appuie ici sur le fait que A_ξ est semi-continue inférieurement, tandis que A_ξ^+ est semi-continue supérieurement; c'est ce qu'on constate sans peine en remontant aux définitions, et en remarquant que lorsqu'une suite de fonctions du premier type, par exemple, tend en croissant vers une fonction du même type, les opérateurs correspondants tendent faiblement vers l'opérateur qui correspond à la fonction limite . Nous avons rencontré incidemment ce résultat en démontrant le théorème 4).

De ces égalités résulte que A_ξ et A_ξ^+ sont des fonctions discontinues de la variable ξ , les points de discontinuité étant ceux du spectre ponctuel, la discontinuité en ces points étant égale à B_ξ . Cela suffit à prouver que le spectre ponctuel appartient au spectre .

Quand on retranche le spectre ponctuel du spectre, il reste un ensemble appelé spectre continu, ensemble qui sera étudié dans la prochaine conférence .