J. VON NEUMANN

Théorie des anneaux d'opérateurs

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. nº 11, p. 1-46
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A13_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année 1934-1935

ESPACE DE HILBERT

K.- Théorie des anneaux d'opérateurs

Exposé fait par M. Von NEUMANN, le lundi 6 Mai 1935

1ère Partie

DISCUSSION GENERALE DU PROBLEME

I.- Le problème de la représentation spectrale d'un opérateur quelconque - hermitique, unitaire, ou cas plus général, normal, borné ou non borné - étant résolu complètement (1) ainsi que le problème du calcul fonctionnel (algébrique ou analytique) avec un opérateur de ces classes(2), le futur développement de la théorie des opérateurs devra nécessairement avoir pour objet les relations entre plusieurs opérateurs Dans l'esprit des méthodes modernes de l'analyse et de l'algèbre, une discussion ayant ce but, prendra la forme suivante : Si nous voulons obtenir des informations sur les relations (algébriques ou analytiques) entre deux ou plusieurs opérateurs A_o , B_o ...... , nous construisons tous les opérateurs qui peuvent être obtenus par les opérations fondamentales de l'algèbre et de l'analyse, en partant de A_o, B_o...

---

(1) Pour les opérateurs hermitiques voir les exposés D et F de ce Séminaire et la littérature qui y est citée. Pour les opérateurs normaux, aussi; J.v.Neumann, Math.Ann. IO2 (I929) p.404-4I7 (Ce mémoire souvent cité dans la suite sera désigné par M.A), Ann.of Math. 33(I932) p.308-309; Proc.Nat.Acad.t.2I (I935) (à paraitre prochainement).

(2) Voir M.H.Stone "Linear transformations in Hilbert Space" New York I932, (Ann.Math.Soc.Coll.vol.XV) p.22I-24I; J.v.Neumann, Annals of Math. vol.32(I93I) p.I9I-226 (ce mémoire sera désigné dans la suite par A.O.M.)

et nous étudions les propriétés "intérieures" du système d'opérateurs qui résulte de cette construction.
Les opérations de l'<u>algèbre</u> des opérateurs sont représentées par les symboles : a A (où a est un nombre complexe), A^* A + B , A B, tandis que l'<u>analyse</u> des opérateurs doit être fondée sur une définition de $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$, qui se peut faire de différentes façons (faible, forte, uniforme), que nous allons examiner (1). Nous devons donc considérer tous les systèmes d'opérateurs $\mathcal{M}$ qui jouissent des deux propriétés suivantes :

<u>I.</u>- Si A, B, $\in \mathcal{M}$, alors aA, A^*, A + B , AB $\in \mathcal{M}$ (a est un nombre complexe quelconque).

<u>II.</u>- $\mathcal{M}$ est un ensemble fermé dans une topologie convenable de l'espace des opérateurs , que nous allons définir bientôt.

Puis il s'agit de former le système minimum $\mathcal{M}$ qui contient (deux ou plusieurs) opérateurs A_0 ,B_0 donnés, et d'étudier les propriétés intérieures de $\mathcal{M}$.

2.- Si l'on adopte ce point de vue général, il y a lieu de faire des remarques suivantes qui sont d'un ordre technique et fournissent les arrangements de détail et la terminologie nécessaires pour la manipulation effective

---

(1) Pour toutes ces opérations voir l'exposé C de ce Séminaire, ainsi que M.A.p.370-376 . Les questions topologiques sont étudiées p.378-388.

des idées générales que nous avons esquissées.

a) Les opérations qui figurent dans I, surtout A+B et AB, ne se prêtent à un calcul simple que dans le cas d'opérateurs <u>partout définis</u> et <u>bornés</u> (1) .Il est donc raisonnable de nous borner d'abord aux cas où tous les opérateurs de $\mathcal{M}$ sont bornés. Nous verrons plus tard qu'avec une connaissance suffisante des systèmes $\mathcal{M}$ d'opérateurs bornés, nous aurons des moyens de comprendre dans $\mathcal{M}$ des opérateurs fermés mais non bornés.

Désignons donc l'ensemble de tous les <u>opérateurs linéaires et bornés par I</u> . Nous ne considèrerons que des ensembles $\mathcal{M} \subseteq I$. Il est d'ailleurs pratique de postuler un peu plus que <u>I</u>; Nous exigerons que l'opérateur unité 1 appartienne à $\mathcal{M}$. Et nous remplacerons <u>I</u> par <u>I*</u> :

<u>I*</u> $1 \in \mathcal{M}$. Si A, B $\in \mathcal{M}$, alors a A, A^*, A+B, AB $\in \mathcal{M}$ (a est un nombre complexe quelconque). Tous ces opérateurs doivent être linéaires et bornés, c'est à dire $\mathcal{M} \subseteq I$.

b) Il faut décider quelle topologie de I servira pour formuler <u>II</u>. Pour être sûr que rien d'intéressant ne nous échappera, nous prendrons la topologie la plus faible

---

(1) Voir au commencement de l'exposé F. Si A est partout défini et fermé, il est borné, voir C p.12 . Si A n'est pas défini partout et donc non borné, et s'il en est de même de B, le calcul avec A+B et AB devient extrêmement difficile et même <u>pathologique V.J.v.Neumann Journ. fürMath. 161(1929)p.229-234</u>

possible, c'est à dire celle qui donne le plus grand nombre de points de condensation possible. C'est pour cette raison que nous choisissons la topologie "faible" des opérateurs. Mais de ce point de vue, il y a une remarque importante à faire : la définition courante de la topologie faible ne définit en réalité que la convergence faible, c'est à dire qu'elle fait de I un espace limite et non un espace topologique (au sens de M. Fréchet). L'expérience moderne sur ce sujet nous a cependant appris que les espaces topologiques sont d'ordinaire préférables aux espaces limites, et nous verrons bientôt qu'il y a dans notre cas des raisons spécifiques pour désirer une topologisation au sens propre.
Nous devons donc introduire la notion de "voisinage au sens faible", ce qui se fait naturellement ainsi :

Soit $A_0 \in I$, et soient $\varphi_1, \psi_1 \ldots\ldots \varphi_m, \psi_m$ 2m éléments quelconques de l'espace de Hilbert (m=1,2 .... mais fini), $\varepsilon > 0$.
Désignons par $U(A_0; \varphi_1, \psi_1, \ldots \varphi_m, \psi_m, \varepsilon)$ l'ensemble de tous les opérateurs $A \in I$ pour lesquels

$$|((A-A_0)\varphi_\nu, \psi_\nu)| < \varepsilon \quad \text{pour } \nu = 1,\ldots,m.$$

Les $U(A_0; \varphi_1, \psi_1, \ldots \varphi_m, \psi_m, \varepsilon)$ (pour tous les choix de m = 1,2... des φ_ν, ψ_ν, et de $\varepsilon > 0$) sont les <u>voisinages faibles</u> de A_0, définissant la <u>topologie faible</u> de I. (Voir M.A.).

On voit aisément que pour toute suite A_1, A_2....
la relation

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A_0$$

dans cette topologie , est équivalente à la"convergence faible vers A_0" , au sens donné dans l'exposé C.p.I4-I5 . Mais cette topologie faible ne vérifie pas le"premier axiome de dénombrabilité"de F.Hausdorff, et par conséquent, il n'est pas vrai que tout point de condensation faible d'un ensemble $\mathfrak{X} \subseteq I$ est nécessairement un point limite faible d'une suite convergente extraite de $\mathfrak{X}$. Donc il est nécessaire de faire usage de la topologie définie ci-dessus elle-même, et non seulement de la notion de limite faible de suites convergentes .(1)

Nous précisions donc <u>II</u> de cette façon :

<u>II*</u> : $\mathfrak{M}$ est <u>faiblement clos</u>, c'est à dire que tout point de condensation faible de $\mathfrak{M}$ (et non seulement tout point de limite faible de $\mathfrak{M}$) appartient à $\mathfrak{M}$.

c) . Il est raisonnable de se conformer à l'usage de l'algèbre moderne par la définition suivante :

Les ensembles $\mathfrak{M} \subseteq I$ qui satisfont les conditions <u>I*</u> et <u>II*</u>, et ces ensembles seuls, sont dits des <u>anneaux</u> .

---

(1) Une discussion détaillée de ces conditions se trouve dans M.A . D'ailleurs la topologie faible vérifie l'"axiome de dénombrabilité" si nous ne sortons pas de la sphère $|||A||| \leq I$. Voir M.A.

On voit immédiatement que :

Il existe un anneau minimum ; il ne contient que les éléments $a.1$; où a est un nombre complexe quelconque ; nous le désignerons par 0 .

Il existe un anneau maximum; c'est évidemment I.
L'intersection d'un nombre quelconque d'anneaux est un anneau. Donc pour tout ensemble $\mathcal{X} \subseteq I$, il existe un anneau minimum $\supseteq \mathcal{X}$ que nous désignerons par $A(\mathcal{X})$. Pour tout ensemble $\mathcal{X} \subseteq I$ les opérateurs $A \in I$ qui sont commutatifs avec B et B^* pour tout $B \in \mathcal{X}$, forment un anneau, nous le désignerons par $\mathcal{X}'$.

On prouve aisément que :

$$0' = I \; ; \quad I' = 0 \; ; \quad \mathcal{X}'' \supseteq \mathcal{X}$$

et puisque l'anneau minimum $\supseteq \mathcal{X}$ est $A(\mathcal{X})$, on a même

$$\mathcal{X}'' \supseteq A(\mathcal{X})$$

en outre

$$\mathcal{X}' = \big(A(\mathcal{X})\big)'$$

$$\big(A(\mathcal{X},\mathcal{Y})\big)' = \mathcal{X}'.\mathcal{Y}'$$

(. désigne l'intersection de deux ensembles).

Les deux opérations représentées par $A(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ et $\mathcal{X}.\mathcal{Y}$ sont des opérations dans le domaine de tous les anneaux dans I. Elles ont quelques analogies avec l'addition et la multiplication : toutes les deux, elles sont commutatives et associatives, d'ailleurs à la façon de l'addition et de la multiplication logiques:

Pour un anneau $\mathcal{M}$ on a :

$A(\mathcal{M},\mathcal{M}) = \mathcal{M}.\mathcal{M} = \mathcal{M}$.

L'analogie est en défaut pour la loi distributive , qui n'est pa vraie en général. Il y a des raisons de mettre $A(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ en correspondance avec l'addition , et $\mathcal{X}.\mathcal{Y}$ avec la multiplication, car

$A(\mathcal{M}, 0) = \mathcal{M}$; $A(\mathcal{M}, I) = I$

$\mathcal{M} . 0 = 0$; $\mathcal{M} . I = \mathcal{M}$.

d) Dans toutes ces considérations, il est préférable de permettre que l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, (dont A,B,..) sont des opérateurs) dégènère en un espace Euclidien à un nombre fini de dimensions . Il est cependant préférable d'exclure le cas où cette dimension est O. C'est à dire que la condition D de l'axiomatique de $\mathfrak{H}$ (Voir l'exposé B, p.3-4) doit être remplacée par la suivante :

<u>D</u>.- $\mathfrak{H}$ possède des éléments différents de O, cependant $\mathfrak{H}$ est séparable.

Donc $\mathfrak{H}$ a une dimension $N = 1,2.....\infty$. Nous appellerons ces $\mathfrak{H}$ des <u>espaces unitaires</u> .

3.- Une des relations prouvées en <u>2</u> (c) était :

$\mathfrak{X}'' \supseteqq A(\mathfrak{X})$.

Or, on peut prouver que

(R) $\boxed{\mathfrak{X}'' = A(\mathfrak{X})}$ (1)

---

(1) (Voir page suivante)

Pour bien comprendre l'importance de ce résultat, il est nécessaire de faire les remarques suivantes :

a) (R) prouve la nécessité d'employer la topologie et non la convergence faible dans la définition des anneaux. Car il est évident que $A(\mathfrak{X})$ est obtenu en appliquant toutes les opérations de $\underline{I^*}$ à tous les éléments de $\mathfrak{X}$, et en ajoutant à cet ensemble, celui de tous les points de condensation . C'est ainsi que l'on obtient $\mathfrak{X}''$. Si nous n'avions ajouté que les points limite faible, nous aurions peut-être obtenu un ensemble $\subset \mathfrak{X}''$. Donc: pour avoir l'équation (R), il faut définir les anneaux par la topologie et non par la convergence faible. (2) .

---

(1) - Voir M.A. p.393-396 .

(2) - Il faut dire cependant que ce raisonnement n'a qu'une justification relative dans l'état présent de notre information . Car nous connaissons des ensembles $\mathfrak{Y}$ qui ont des points de condensation non points limites (faibles) mais ils ne sont pas fermés dans les opérations de $\underline{I^*}$.
Donc il faut dire :
(R) est prouvé si nous définissons les anneaux avec la topologie faible, tandis qu'il n'est ni prouvé ni réfuté , si nous employons la convergence faible .
L'auteur croit que (R) est faux en ce cas .

b) Pour des anneaux $\mathcal{M}$ (R) devient :

(R') $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$

C'est à dire que l'opération désignée par $\mathcal{M}'$ est involutive pour les anneaux.

D'autre part, la relation $\left(A(\mathcal{X}.\mathcal{Y})\right)' = \mathcal{X}'.\mathcal{Y}'$ devient (on y posant $\mathcal{X} = \mathcal{M}', \mathcal{Y} = \mathcal{N}'$)

$$\left(A(\mathcal{M}'.\mathcal{N}')\right)' = \mathcal{M}.\mathcal{N}$$

et en y posant

$$\mathcal{X} = \mathcal{M} \quad , \quad \mathcal{Y} = \mathcal{N}$$

et en appliquant'au tout

$$(\mathcal{M}'.\mathcal{N}')' = A(\mathcal{M}.\mathcal{N})$$

Donc l'opération involutive transforme l'addition $A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ et la multiplication $\mathcal{M}.\mathcal{N}$ l'une dans l'autre. Ainsi l'opération ' est analogue à la négation en logique. (L'addition correspond à la conjonction, la multiplication à la disjonction). Mais la négation logique a encore d'autres caractéristiques, dont

(S) $\mathcal{M}.\mathcal{M}' = 0$

(S') $A(\mathcal{M},\mathcal{M}') = I$

sont les analogues dans notre calcul, et ces équations ne sont pas vraies en général. Elles sont cependant équivalentes entre elles :

$\mathcal{M}.\mathcal{M}' = 0$ est équivalent à $(\mathcal{M}.\mathcal{M}')' = 0'$

or : $(\mathcal{M}.\mathcal{M}')' = (\mathcal{M}''.\mathcal{M}')' = A(\mathcal{M}.\mathcal{M}')$, et $0' = I$

Il y a donc lieu de croire que les anneaux $\mathcal{M}$ qui satisfont (S), c'est à dire pour lesquels l'analogie avec la logique est plus stricte que dans le cas général, auront des propriétés intéressantes .

4.- Abandonnons maintenant ces analogies formelles et revenons à notre problème original . C'était de caractétiser les anneaux qui sont engendrés par deux ou plusieurs opérateurs A_o, B_o,.... : $\mathcal{M} = A(A_o, B_o, \ldots)$ et d'analyser les propriétés intérieures des anneaux .

Quant à cette dernière question, le premier cas qui se présente conformément à l'usage général de l'algèbre , est celui des anneaux abéliens :

Un anneau $\mathcal{M}$ est abélien si tous ses éléments sont commutatifs, ce qui s'èxprime évidemment par

$$\mathcal{M} \subseteqq \mathcal{M}'$$

Si $\mathcal{M}$ est abélien, et $A \in \mathcal{M}$, alors $A^* \in \mathcal{M}$, donc A et A^* sont commutatifs, c'est à dire que A est normal. Réciproquement, on peut prouver que, si $\mathcal{M}$ est un anneau non-abélien, il existe un $A \in \mathcal{M}$ non-normal. Donc si N est l'ensemble de tous les opérateurs (bornés) normaux, le caractère abélien est, pour un anneau $\mathcal{M}$, équivalent à $\mathcal{M} \subseteqq N$.

D'ailleurs N lui-même n'est pas un anneau , et il n'y a pas d'anneau abélien maximum, contenant tous les autres, (Voir M.A. p.389).

Pour que l'anneau A(A) soit abélien, il est donc nécessaire que A soit normal, et l'on prouve aisément que c'est suffisant aussi. Ces résultats sont élémentaires, mais ils admettent une réciproque qui ne l'est pas du tout, car sa démonstration est fondée sur une analyse détaillée de la théorie spectrale et de la topologie des opérateurs bornés. Ce théorème réciproque est :

Tout anneau abélien $\mathcal{M}$ peut être mis sous la forme $\mathcal{M}$ = A(A), où l'opérateur A (qui est nécessairement normal) peut être choisi hermitique.

(V.M.A. p.401-404).

Ceci prouve que l'étude des anneaux abéliens $\mathcal{M}$ ne peut nous donner que les propriétés d'un seul opérateur normal (ou même hermitique) A, et en effet, un tel opérateur $\mathcal{M}$ n'est que l'ensemble de toutes les fonctions de A. (Voir A O M p.213-215).

Pour revenir à notre problème original, l'étude des relations entre plusieurs opérateurs, il est donc important d'analyser les anneaux non-abéliens.

Nous voyons d'ailleurs que pour étudier les relations entre plusieurs opérateurs, on peut se limiter au cas où ceux-ci sont non-commutatifs. Car si A_o, B_o....sont des opérateurs hermitiques commutatifs, on prouve aisément que

$A(A_0, B_0 \ldots)$ est abélien, donc

$$A(A_0, B_0 \ldots) = A(A)$$

pour un certain A hermitique , c'est à dire A_0, $B_0 \ldots$ sont tous fonctions d'un seul opérateur hermitique A . (Voir AOM p.22I) .

Si nous voulons étudier les anneaux non-abéliens, il est d'un intérêt spécial de considérer l'extrême opposé au cas abélien . Le cas abélien est caractérisé par $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ c'est à dire $\mathcal{M} . \mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Puisque toujours $\mathcal{M} . \mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ ceci peut être interprété ainsi : $\mathcal{M} . \mathcal{M}'$ est aussi grand que possible (Puisque $\mathcal{M} . \mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}'$, on pourrait établir $\mathcal{M} . \mathcal{M}' = \mathcal{M}$, c'est à dire $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ aussi. Mais ceci signifie que $\mathcal{M}'$ est abélien, ce qui nous ramène au cas abélien) Le cas opposé est que $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ est aussi petit que possible c'est à dire $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = 0$, ce qui est l'équation (S) de <u>3</u> (b). Donc nous sommes ramenés à la consition

$$\text{(S)} \qquad \mathcal{M} . \mathcal{M}' = 0$$

par un chemin tout à fait différent .

<u>5</u>.- Les considérations des paragraphes précédents montrent la nécessité de l'étude de (S).
Que signifie (S) si nous l'envisageons comme une propriété intérieure algébrique de l'anneau $\mathcal{M}$?
En algèbre le <u>centre</u> d'un anneau se compose de tous ceux de

ses éléments qui sont commutatifs avec tous les éléments de l'anneau. Pour les anneaux d'opérateurs $\mathcal{M}$ ($\subseteq$ I) c'est $\mathcal{M} \cdot \mathcal{M}'$. Donc (S) signifie : le centre de $\mathcal{M}$ ne contient que les éléments de la forme a.1 (où a est un nombre complexe quelconque), c'est à dire son étendue est aussi petite que possible . Ou encore, Le centre de $\mathcal{M}$ est unidimensionnel .

Cette formulation prouve que nous touchons à un des problèmes fondamentaux de la théorie des systèmes de nombres hypercomplexes et de représentations de groupes .(1) . En effet, un des théorèmes fondamentaux de cette théorie énonce que tout système hypercomplexe , c'est à dire tout anneau abstrait, d'ordre fini, est somme directe d'un nombre fini de systèmes hypercomplexes à centres unidimensionnels . Si le nombre de dimension N de notre espace $\mathcal{G}$ est fini, on voit qu'il n'y a que N^2 opérateurs linéaires indépendants ; donc tout $\mathcal{M} \subseteq$ I est d'ordre fini . Donc, dans ce cas , tous les $\mathcal{M}$ sont des sommes directes de $\mathcal{M}$ satisfaisant (S) Mais le cas vraiment intéressant est celui de l'espace de Hilbert : $N = \infty$, l'ordre de $\mathcal{M}$ sera alors infini en général.

---

(1).- Pour les analogies algébriques dans tout ce qui suit, Voir B.L.Van der Waerden "Moderne Algebra" , Berlin 1930 (Julius Springer); particulièrement, vol.2, chap.I6 :"Theorie der Hyperkomplexen Grössen", ainsi que chap.I7 :"Darstellungstheorie etc.." .La décomposition mentionnée ci-dessous se trouve p.I6I-I64.

T.S.V.P.

Cependant il est possible, même en ce cas, de décomposer tout anneau $\mathcal{M}$ en une somme directe d'anneaux $\mathcal{M}$ satisfaisant (S). Pour ce faire, il est nécessaire de généraliser la notion algébrique de la somme directe au cas d'une infinité , et même d'un ensemble continu de termes - une généralisation du même genre que celle qui mène de la forme diagonale des opérateurs de $\mathcal{C}_g$ à N fini, à la forme spectrale de ceux de l'espace de Hilbert à N infini .

Il n'est pas possible de donner des détails ici, nous ne voulons qu'indiquer que la chose peut se faire (Voir un mémoire de l'auteur, qui paraitra prochainement dans les Annals of Mathém.) ce qui signifie que les anneaux à centre unidimensionnel, c'est à dire satisfaisant (S) sont les éléments dont la combinaison (par sommation directe) produit tous les anneaux . Pour cette raison, nous pouvons bien dire , que le <u>problème fondamental de la théorie des anneaux d'opérateurs est la détermination de toutes les solutions de (S)</u> .

<u>6</u>.- Un certain intérêt s'attache à (S) aussi du point de vue de la mécanique des quanta dans sa forme opératoire. On sait que dans cette théorie , toutes les quantités physiques -observables- d'un système γ correspondent à tous les

---

(I) (suite) . On peut voir aussi l'exposé F , fait par M.Cartan au Séminaire en Février 34- ou le livre récent de V.der Waerden :"Gruppen von linearen transformationen (Springer I935) opérateurs hermitiques d'un certain espace $\mathcal{G}$, et les quantités bornées en particulier aux opérateurs bornés hermitiques, éléments de I . Soit maintenant γ la somme de deux sous-systèmes disjoints : γ_1 et γ_2. Désignons les opérateurs correspondant aux quantités observables situées entièrement dans γ_1 et γ_2 respectivement, par A_1 et A_2 ; il est évident qu'ils ont les propriétés :

(P) Tout A_1 est commutatif avec tout A_2

(P') L'anneau déterminé par tous les A_1 et tous les A_2 contient tous les opérateurs correspondant aux quantités observables de $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$
C'est donc I.

Désignant l'anneau déterminé par les A_1 par $\mathcal{M}$ et celui des A_2 par $\mathcal{N}$, celà signifie :

(P) $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}'$;(P') $A(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = I$

Donc, a fortiori, $A(\mathcal{M}, \mathcal{M}') = I$, $\mathcal{M}$ satisfait (S') , donc (S) , et de même $\mathcal{N}$. Inversement, Si $\mathcal{M}$ satisfait (S), il satisfait aussi (S') , et $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} = \mathcal{M}'$ ont les propriétés (P) et (P') .

Ainsi, nous voyons que les solutions de (P) et (P') , c'est à dire les anneaux des sous-systèmes γ_1 et γ_2 de coincident avec les solutions de (S) .

Cependant, cette discussion de γ_1 et γ_2 est plus abstraite que nécessaire : nous pouvons caractériser $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ plus explicitement . Car γ_1 admet nécessairement une description physique par une ou plusieurs coordonnées que nous désignerons par x ; nous désignerons par $\mathcal{E}$ le domaine de variabilité de x (l'"espace de configuration" de γ_1) Nous avons de même y et $\mathcal{F}$ pour γ_2; et par suite x,y et $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ ("produit direct" de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{F}$) pour $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Donc la fonction d'onde de γ a la forme $\varphi(x,y)$, autrement dit c'est un élément de l'espace de Hilbert $\mathcal{G}$ de toutes les fonctions f(x,y) telles que

$$\iint |f(x,y)|^2 \, dx \, dy$$

soit fini ; le produit "intérieur" (f,g) étant

$$\iint f(x,y) \overline{g(x,y)} \, dx \, dy$$

$\mathcal{M}$ sera évidemment l'anneau de tous les opérateurs opérant sur la variable x seule, et $\mathcal{N}$ celui de tous ceux opérant sur la variable y seule . Nous allons préciser ces notions immédiatement . Une analyse détaillée de ces questions se trouve dans le mémoire annoncé par. II.

On vérifie (P) et (P') sans beaucoup de difficultés , ainsi que $\mathcal{N} = \mathcal{M}'$. D'ailleurs on peut passer à des matrices de la façon suivante :

Soit $\varphi_m(x)$, m = 1,2 ...., un système complet orthogonal

en x ; $\psi_n(y)$, n= 1,2.... , un système en y ;
$\varphi_m(x)\psi_n(y)$ en est un en x,y, c'est à dire dans $\mathcal{G}$.
Alors tout $f \in \mathcal{G}$ a la forme :

$$f = f(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}\varphi_m(x)\psi_n(y)$$

$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2$ étant fini , et ainsi $\mathcal{G}$ peut être considéré comme l'espace de toutes les suites doublement infinies (a_{mn}) m,n = 1,2.... telles que $\sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn})^2$ soit fini,

le produit "intérieur" (f,g) étant

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \overline{b_{mn}}$$

si f et g correspondent à (a_{mn}) et (b_{mn}) respectivement .

On voit aisément que $A_1 \in \mathcal{M}$ signifie :

$$A_1 f(x,y) = \sum_{p,n=1}^{\infty} a_{pn}\left[A_1\varphi_p(x)\right]\psi_n(y)$$

$$= \sum_{p,n=1}^{\infty} a_{pn}\left(\sum_{m=1}^{\infty}(A_1\varphi_p,\varphi_m)\cdot\varphi_m(x)\psi_n(y)\right)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty}(A_1\varphi_p,\varphi_m)\,a_{pn}\right)\varphi_m(x)\psi_n(y) .$$

Or tout opérateur A de $\mathcal{G}$ a une matrice $\alpha_{pq,mn}$ définie par l'identité

$$A\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\varphi_m(x)\psi_n(y)\right) \equiv \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}\varphi_m(x)\psi_n(y)$$

d'où

$$b_{mn} = \sum_{p,q=1}^{\infty} \alpha_{pq,mn}\, a_{pq}\,.$$

Donc $A_1 \in \mathcal{M}$ signifie $\alpha_{pq,mn} = (A_1\varphi_p, \varphi_m)\, \delta_{qn}$

c'est à dire :

$$\boxed{(T) \quad \alpha_{pq,mn} = \alpha'_{pm}\, \delta_{qn}}$$

δ_{qn} désignant le symbole de Kronecker-Weierstrass :

$$\delta_{qn} \begin{cases} = 1 & \text{pour} \quad q=n \\ = 0 & \text{pour} \quad q \neq n \end{cases}$$

α'_{pm} est un nombre complexe dépendant d'une façon arbitraire de $p,m = 1,2\ldots$.

On prouve sans difficulté que A_1, c'est à dire la matrice $(\alpha_{pq,mn})$ est bornée si , et seulement si la matrice (α'_{pm}) est bornée .

On montre de même que $A_2 \in \mathcal{N}$ s'exprime par :

$$(T') \quad \boxed{\alpha_{pq,mn} = \delta_{p,m}\, \alpha''_{qn}}$$

Cette fois, α''_{qn} est arbitraire .

On vérifie immédiatement que si $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont définis par (T) et (T'), $\mathcal{N} = \mathcal{M}'$. $\mathcal{M}.\mathcal{N} = 0$. Donc $\mathcal{M}.\mathcal{M}' = 0$ c'est à dire que $\mathcal{M}$ satisfait (S) , et par conséquent, que

$\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ satisfont (P) et (P').

Cette analogie avec la théorie des quanta suggère que peut-être toutes les solutions de (S) sont données par (T) - celles de (P) et (P') par (T) et (T'). Si nous formulons ces hypothèses, il est raisonnable d'admettre la possibilité que m ou n ait un domaine fini : m = 1,....., P , et n = 1,..... ,Q . Mais en ce cas il n'y a pas de raison d'exclure les $\mathfrak{H}$ de dimension N finie (alors P , Q , sont finis tous deux, et N = PQ). Ainsi, il s'agit de décider si les énoncés suivants sont vrais :

α) Soit $\mathfrak{H}$ un espace unitaire à N = 1,2....∞ dimensions Pour toute solution $\mathcal{M}$ de (S) , il existe deux nombres P, Q = 1,2....,∞ , PQ = N, tels que $\mathcal{M}$ soit représenté par (T) , les domaines respectifs de m et n étant 1,....,P et 1,....., Q.

Si P = ∞ , alors m = 1,2 ..... ;

de même si Q = ∞ alors n = 1,2....... .

β) De même, pour toute solution $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ de (P) et (P') il existe deux P ,Q = 1,2 .....∞ , PQ = N , tels que $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ soient représentés par (T) et (T') , les domaines respectifs de m et n étant 1,.... P , et 1,......,Q .

Puisque (T') donne $\mathcal{M}'$ si (T) donne $\mathcal{M}$, β est équivalent à

(α) et :

$\left\{\begin{array}{l}\alpha)\\ \gamma)\end{array}\right\}$ (P) et (P') ont pour conséquence $\mathcal{N} = \mathcal{M}'$.

Mais γ est une conséquence de $\underline{\alpha}$: Si $\mathcal{M}$ est représenté par (T), $\mathcal{M}'$ l'est par (T') , et ainsi tout opérateur $A \in \mathcal{M}'$ correspond par (T') à uhe matrice (α''_{qn}). dans l'espace $\mathcal{G}''$ des suites (a_n), n = 1,2..... telles que $\sum_{n=1}^{Q} |a_n|^2$ soit fini ; et où le "produit intérieur" $\sum_{n=1}^{Q} a_n\bar{b}_n$ est le produit de deux suites (a_n) et(b_n).

Donc tout anneau $\subseteq \mathcal{M}'$ correspond à un anneau dans $\mathcal{G}''$, en particulier $0, \mathcal{M}'$ correspondent respectivement à $0, I$, et $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}'$ à $\mathcal{N}_1 . \mathcal{N}_1'$ est un ensemble d'opérateurs en $\mathcal{G}''$, il se compose de tous ceux qui correspondent à des éléments de $\mathcal{M}'$ commutatifs avec $\mathcal{N}$, donc appartenant à $\mathcal{M}' . \mathcal{N}' = (A(\mathcal{M}, \mathcal{N}))' = I' = 0$.

Ainsi (en $\mathcal{G}''$) $\mathcal{N}_1' = 0$, $\mathcal{N}_1 = 0' = I$, c'est à dire

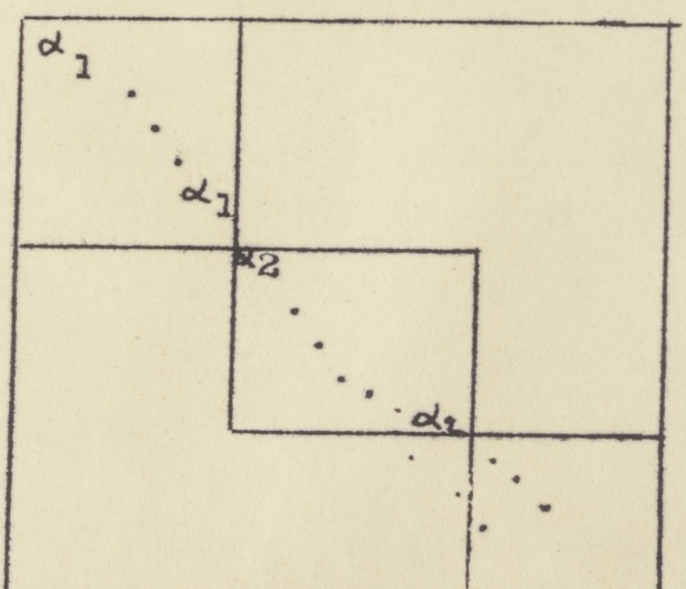
$$\boxed{\mathcal{N} = \mathcal{M}'} .$$

Il est donc important de savoir si α est vrai ou non .

7.- Nous obtenons une première orientation en considérant le cas d'un N fini . Pour le discuter , nous nous servirons des notations et des résultats de l'ouvrage cité de Van der Waerden (par.5).

$\mathfrak{M}$ est un système hypercomplexe d'<u>ordre fini</u>, donc la "Minimalbedingung" (V.der W. II p.I5I) est satisfaite . Pour toute matrice $A \neq 0$, $A \in \mathfrak{M}$, nous avons $A^* \in \mathfrak{M}$ $A^* A \neq 0$ est semi définie; il en est donc de même des $(A^* A)^n$ quel que soit n. Soit $\mathfrak{p} \neq 0$ un "idéal à gauche" dans $\mathfrak{M}$, il existe un $A \neq 0$, $A \in \mathfrak{p}$, donc $(A^* A)^n \in \mathfrak{p}^n$, donc $\mathfrak{p}^n \neq 0$; autrement dit, $\mathfrak{M}$ est <u>sans radical</u> (définition p.I55) . Il en résulte que $\mathfrak{M}$ est"complètement réductible" (démonstration p.I56-I6I) (1). Mais alors les matrices de $\mathfrak{M}$ coincident, après introduction d'un système convenable de coordonnées en $\mathfrak{E}$, avec les matrices suivantes :

A =



(1) C'est une des raisons pour lesquelles l'opération qui fait passer A à A^* est si importante dans la théorie des anneaux et doit être ajoutée dans leur définition aux opérations proprement algébriques définies par les symboles aA, A+B , AB; c'est celle qui garantit la réductibilité complète de tous les anneaux .

Ici les α_ν, $\nu = 1,\ldots, s$, sont des matrices de degré ρ_ν, répétées dans notre schéma σ_ν fois ; donc

$$\rho_1\sigma_1 + \ldots\ldots + \rho_s\sigma_s = N$$

les α_ν parcourent un système irréductible Σ_ν de matrices de degré ρ_ν, les systèmes $\Sigma_1, \ldots \Sigma_s$ étant non-équivalents . Les places vides sont occupées par des 0 (p.168-169) . Puisque $\mathcal{M}$ est un anneau, le théorème de Burnside peut être appliqué : c'est à dire que $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ parcourent indépendamment toutes les matrices de degrés respectifs $\rho_1, \ldots \rho_s$.(p.183, en haut et en bas).

Mais le A correspondant à $\alpha_1 = 1$ (matrice unité de dimension ρ_1) , $\alpha_2 = 0, \ldots\ldots, \alpha_s = 0$, appartient au centre de $\mathcal{M}$, ($\mathcal{M} . \mathcal{M}'$) , donc $A = a.1$ (matrice unité de N dimensions) , ce qui nécessite $s = 1$.
Posons $P = \rho_1$, $Q = \sigma_1$, et employons deux indices m, n , dans les matrices A : $m = 1,\ldots,P$, dans l'intérieur des α_1 , et $n = 1,\ldots, Q$, pour numéroter les carrés qui contiennent les α_1. (De même pour p,q). Alors nous aurons

$$A = (\alpha_{pq,mn}) , \quad \alpha_1 = (\alpha'_{pm}) , \text{ avec}$$

$$\alpha_{pq,mn} = \alpha'_{pm}\ \delta_{qn}$$

ce qui coincide avec (T).

Ainsi nous avons prouvé $\underline{\alpha}$.- $\underline{\gamma}$. pour les N finis , et nous voyons que pour N $=\infty$ ils constituent la généralisation au cas d'un ordre infini, des théorèmes fondamentaux sur les systèmes hypercomplexes sans radical . Et quelle que soit la réponse aux questions $\underline{\alpha}$. $\underline{\gamma}$. elle est indispensable pour étendre la théorie des systèmes hypercomplexes aux cas d'ordre infini c'est à dire au delà du cadre classique des "Minimalbedingungen".(1) .

<u>8</u>. - Avant d'attaquer le problème général, (N $=\infty$) disons encore un mot sur la façon dont les opérateurs <u>non bornés</u> peuvent être classifiés à l'aide des anneaux $\mathcal{M} \subseteq I$. Considérons les opérateurs unitaires $U \in \mathcal{M}$, dénotons leur ensemble par $\mathcal{M}_U$. $\mathcal{M}$ est un anneau contenant $\mathcal{M}_U$ et il est le plus petit qui ait cette propriété :

$A(\mathcal{M}_U) = \mathcal{M}$ (Voir M.A. p.392) . Par suite :

$$(\mathcal{M}'_U)' = \left(A\,(\mathcal{M}'_U)\right)' = \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$$

---

(1) Ce n'est pas seulement le désir de la généralisation qui nous intéresse dans ce dernier problème . La mesure des groupes de A.Haar (voir les exposés H et I de ce Séminaire) établit une relation directe entre les groupes topologiques et les anneaux d'opérateurs . Les résultats modernes relatifs à ces groupes sont fondés sur la réduction de ces anneaux, mais pour les groupes non compacts et non abéliens, ce sont précisément l'ordre infini de ces anneaux et l'insuffisance des méthodes accoutumées pour leur réduction qui arrêtent tout progrès . Voir aussi le mémoire des Annals of Math. signalé par.5).

Autrement dit, si un opérateur linéaire et borné A est invariant dans tous les isomorphismes de $\mathcal{G}$, qui laissent tous les éléments de $\mathcal{M}$ invariants (1), il est lui-même un élément de $\mathcal{M}$.

Ceci suggère la définition suivante :

Un opérateur X quelconque appartient à $\mathcal{M}$ au sens étendu, ce que nous écrirons : $X \,\eta\, \mathcal{M}$, s'il est invariant dans tous les isomorphismes de $\mathcal{G}$, qui laissent tous les éléments de $\mathcal{M}$ invariants.

Nous avons vu, que pour $X \in I$, $X \,\eta\, \mathcal{M}$ et $X \in \mathcal{M}$ sont équivalents.

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons aussi aux opérateurs non-bornés (mais linéaires et fermés) qui appartiennent à $\mathcal{M}$ au sens étendu. C'est ainsi que la théorie des anneaux pourra nous fournir des informations sur des opérateurs non-bornés (2).

---

(1) Un isomorphisme de $\mathcal{G}$ est un opérateur unitaire U : $f \longrightarrow U f$. A est invariant dans U si $U A U^{-1} = A$, c'est à dire si A et U sont commutatifs. La commutativité avec U et celle avec U^* sont équivalentes, puisque $U^* = U^{-1}$

(2) Si $X, Y,$ sont des opérateurs linéaires et fermés, on peut montrer qu'il existe un anneau $\mathcal{M}$ minimum avec $X, Y, \dots \,\eta\, \mathcal{M}$ (C'est $\mathcal{M} = U'$, si U est l'ensemble de tous les U unitaires laissant $X, Y, \dots$ invariants). Donc, on peut parler de l'anneau déterminé par $X, Y, \dots$: $A(X, Y, \dots)$ généralisé même si $X, Y, \dots \notin I$.

Nous verrons en particulier, que cette méthode ouvre une voie pour éviter les paradoxes, des opérateurs non bornés, signalés dans le mémoire cité au début du paragraphe 2.

L'application de ces considérations à la mécanique des quanta (voir parg. 6) est évidente.

Seconde partie

Théorie des facteurs

9.- Pour ce qui suit, quelques définitions sont utiles.

Soit $\mathcal{G}$ un espace unitaire à $N = 1,2 \ldots \infty$, dimensions. Un facteur est un anneau $\mathcal{M}$ satisfaisant à la condition

$$(S) \qquad \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}' = 0$$

Une factorisation est un système de l anneaux $\mathcal{M}_1, \ldots \mathcal{M}_l$ ($l = 1,2 \ldots$), satisfaisant aux conditions

(P) pour $i \neq j$ $\mathcal{M}_i$ et $\mathcal{M}_j$ sont commutatifs c'est à dire $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}'_j$

(P') $A(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_l) = I$

La condition (S) du paragraphe 4 coincide donc avec la présente condition, définissant la notion de facteur; tandis que celles (P) et (P') du paragraphe <u>6</u> coincident avec celles qui définissent la notion de la factorisation pour $\ell = 2$, ... D'ailleurs la même interprétation physique serait applicable pour tout ℓ : en décrivant une décomposition du système γ en ℓ parties $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_\ell$.

(S) ~~entraine~~ est équivalent à :

$$A(\mathcal{M}, \mathcal{M}') = A(\mathcal{M}'', \mathcal{M}') = (\mathcal{M}'.\mathcal{M})' = 0' = I$$

et (P) et (P') entrainent :

$$\mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{M}'_1$$

$$I = A(\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_\ell) \subseteq A(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1) \subseteq I$$

d'où $A(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1) = I$, et ainsi (S) .

Celà prouve la relation intime qui existe entre les facteurs et les factorisations :

Si $\mathcal{M}$ est un facteur, alors $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ est une factorisation
Si $\mathcal{M}_1, \dots \mathcal{M}_\ell$ est une factorisation, tous les $\mathcal{M}_1$ sont des facteurs .

Nous continuons nos définitions :

Un facteur $\mathcal{M}$ est <u>direct</u> , s'il a la forme <u>α</u> (C'est à dire (T) du paragraphe <u>6</u>). Une factorisation $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ est <u>directe</u> si elle a la forme <u>β</u> .(C'est à dire (T) (T') (1)). Elle est <u>simple</u> si $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}'_1$.

(1) Ici $\ell = 2$, la généralisation aux cas de ℓ quelconque est claire .

Les énoncés $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, γ du paragraphe $\underline{6}$, deviennent maintenant :

$\underline{\alpha}$) Tous les facteurs sont directs.

$\underline{\beta}$), γ) Toutes les factorisations ($\ell = 2$) sont $\left\{ \begin{array}{l} \text{directes} \\ \text{simples} \end{array} \right.$

Nous avons prouvé dans les paragraphes qui précèdent,

$\underline{\alpha}$) est équivalent à $\underline{\beta}$), et implique γ. Pour tous les N finis, $\underline{\alpha}$. , γ. sont vrais.

De plus, ces considérations prouvent (indépendamment de la situation générale pour $\underline{\alpha}$. γ.):

Si un facteur d'une factorisation est direct, <u>tous le sont</u>, et <u>la factorisation l'est aussi</u> (1).
Réciproquement, si la factorisation est directe, les facteurs le sont aussi.

<u>10.</u>- L'étude d'un anneau $\mathcal{M}$ peut être fondée sur l'étude des opérateurs de projection E qu'il contient, car ces E le déterminent (2).

La propriété la plus importante d'un opérateur de projection E ou de sa multiplicité linéaire, fermée (3), est sa

---

(1)- Ceci pour $\ell = 2$; il serait facile de généraliser pour ℓ quelconque.

(2)- Si $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ est leur ensemble on a $\mathcal{M} = A(\mathcal{M}_{\mathcal{E}})$. Voir M.A. p.392.

(3)- Voir l'exposé C p.6. $\mathfrak{M}$ est l'ensemble de toutes les solutions de $f = Ef$, tandis que $E = P_{\mathfrak{M}}$.

dimension. $\mathfrak{M}$ est un espace unitaire et a une dimension

$$d(\mathfrak{M}) = d(E) = 0, 1, 2, \ldots, \infty \quad .$$

Si nous ne voulons définir que l'égalité des dimensions de deux multiplicités, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, (et non la valeur numérique de $d(\mathfrak{M})$) , nous pouvons le faire en rappelant que la dimension est le seul invariant unitaire d'un espace unitaire . C'est à dire que $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, ont la même dimension s'il existe un isomorphisme $\bar{U}$ de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, Cet $\bar{U}$ est donc un opérateur linéaire défini en $\mathfrak{M}$; ses valeurs couvrent précisément $\mathfrak{N}$; et on a $\|\bar{U} f\| = \|f\|$, pour tout f de $\mathfrak{M}$.

Posons $E = P_{\mathfrak{M}}$, $F = P_{\mathfrak{N}}$

Nous pouvons définir un opérateur linéaire U défini en tout point de $\mathfrak{H}$, en posant

$$U f \begin{cases} = \bar{U} f & \text{pour} \quad f \in \mathfrak{M} \\ = 0 & \text{pour} \quad f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{M} \end{cases}$$

c'est à dire $U = \bar{U} E$.

Cette situation peut être caractérisée par les <u>définitions</u> suivantes :

Un opérateur linéaire U dans $\mathfrak{H}$ est <u>partiellement isométrique</u>, s'il existe une multiplicité fermée linéaire $\mathfrak{M}$, telle que

$$\|U f\| \begin{cases} = \|f\| & \text{pour} \quad f \in \mathfrak{M} \\ = 0 & \text{pour} \quad f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{M} \end{cases}$$

$\mathfrak{M}$ est la <u>multiplicité initiale</u> de U, l'ensemble $\mathfrak{N}$ des valeurs de U est sa <u>multiplicité finale</u>, $E = P_{\mathfrak{M}}$ $F = P_{\mathfrak{N}}$ sont sa <u>projection initiale</u> et sa <u>projection finale</u>.

On démontre aisément que :

<u>Tout opérateur isométrique est borné</u>; <u>les équations</u>

$$\underline{E = U^* U} \qquad \underline{F = U U^*}$$

<u>sont vérifiées</u>

Chacune des conditions suivantes est caractéristique de l'isométrie partielle :

a) $U U^* U = U$

b) $U^* U$ est une projection

c) $U U^*$ est une projection .

Nous pouvons alors énoncer :

<u>Deux opérateurs</u> $E = P_{\mathfrak{M}}$, $F = P_{\mathfrak{N}}$, <u>ont la même dimension si, et seulement s'ils sont les projections initiale et finale d'un même opérateur partiellement isométrique U.</u>

Nous écrirons alors :

$$E \sim F \quad , \quad \text{ou } \mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$$

Si nous étudions les projections $E \in \mathcal{M}$ d'un anneau $\mathcal{M}$, il est naturel d'introduire une notion d'égale dimension plus restreinte, relative à $\mathcal{M}$:

Définition

E, F ont la même dimension relativement à $\mathcal{M}$ si, et seulement s'ils sont les projections initiale et finale d'un même opérateur partiellement isométrique $U \in \mathcal{M}$ (1)
Et nous écrirons :

$$E \sim F \ldots \text{mod.}\, \mathcal{M} \quad \text{ou} \quad (E = P_{\mathfrak{M}} \ , \ F = P_{\mathfrak{N}})$$
$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \ldots \text{mod.}\, \mathcal{M} \ .$$

Montrons l'importance de cette notion dans le cas d'un facteur $\mathcal{M}$. Considérons le cas où $\mathcal{M}$ est un facteur direct. Alors (T) fait correspondre à tout opérateur $A \in \mathcal{M}$ dont la matrice a la forme $(\alpha_{pq,mn})$ avec $\alpha_{pq/mn} = \alpha'_{pm}\delta_{qn}$ un opérateur A_1 dont la matrice est $(\alpha'_{p,m})$, dans l'espace $\mathfrak{H}'$ des suites (a_m) $m=1,2\ldots\ldots$ telles que

$$\sum_{m=1}^{P} (a_m)^2$$ soit fini , (a_m) et (b_m) ayant pour "produit intérieur" $\sum_{m=1}^{P} a_m \bar{b}_m$.

Ainsi E , F correspondent à des projections E_1, F_1 dans $\mathfrak{H}'$, et $E \sim F \ldots \text{mod.}\, \mathcal{M}$ est équivalent à $E_1 \sim F_1$. Donc la notion de dimension dérivée de $E \sim F \ldots$ mod. $\mathcal{M}$ est celle dans $\mathfrak{H}'$, tandis que l'autre qui découle de $E \sim F$ est celle dans $\mathfrak{H}$. La seconde est Q-fois la première ; ainsi, pour $Q = \infty$, la seconde aura toujours la valeur ∞ , si la première a une des valeurs $1,2\ldots.\infty$.

(1) $U \in \mathcal{M}$ et $E = U^* U$, $F = UU^*$ implique $E, F \in \mathcal{M}$

La relation $E \sim F \ldots \mathrm{mod.}\,\mathcal{M}$ donne donc une classification beaucoup plus délicate des $E \in \mathcal{M}$, que $E \sim F$, et cette classification donne des informations essentielles sur la nature des deux indices m,n, qui caractérisent les facteurs directs . Il est donc important d'avoir une théorie indépendante de la classification par $E \sim F \ldots \mathrm{mod.}\,\mathcal{M}$ pour tous les facteurs $\mathcal{M}$, sans s'appuyer sur leur caractère direct éventuel .

Puisque $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \ldots \mathrm{mod}\,\mathcal{M}$ exprime l'existence d'une correspondance biunivoque $f \leftrightarrows Uf$ entre $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, d'une classe spéciale (U partiellement isométrique et $U \in \mathcal{M}$) il y a lieu d'appliquer à cette notion les méthodes de la théorie de l'équivalence (des alephs) de la théorie générale des ensembles , dûe à G.Cantor. En particulier, il est désirable de définir un nombre $d_{\mathcal{M}}(\mathfrak{M}) = d_{\mathcal{M}}(E)$ pour toute projection $P_{\mathfrak{M}} = E \in \mathcal{M}$, telle que $d_{\mathcal{M}}(\mathfrak{M}) = d_{\mathcal{M}}(\mathfrak{N})$ soit équivalent à $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \ldots \mathrm{mod.}\,\mathcal{M}$. Ce sera l'analogue de ce que la dimension ordinaire $d(\mathfrak{M}) = d(E)$ est pour la relation $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$; et de ce que les alephs de Can Cantor sont pour l'équivalence des ensembles .

__11.-__ La discussion fondée sur des idées analogues à celles de la théorie de Cantor réussit complètement . Nous ne pouvons donner ici qu'une esquisse de ces résultats (1 -p.suivante).

Suivant l'analogie avec la théorie Cantorienne, nous définissons :

Soit $P_{\mathfrak{M}} = E \in \mathcal{M}$, $P_{\mathfrak{N}} = F \in \mathcal{M}$
$E \lesssim F$...mod.$\mathcal{M}$ (ou bien $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$...mod.$\mathcal{M}$) signifie qu'il existe un $G \in \mathcal{M}$, $G \leq F$, avec $E \sim G$... mod. $\mathcal{M}$. $E \prec F$...mod.$\mathcal{M}$ (ou bien $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$...mod.$\mathcal{M}$) signifie que $E \lesssim F$ ...mod.$\mathcal{M}$, mais pas $E \sim F$ ... mod.$\mathcal{M}$.

On démontre par les mêmes méthodes que dans la théorie des ensembles, l'analogue du "Théorème d'équivalence" de Cantor-Bernstein :

$E \lesssim F$...mod.$\mathcal{M}$ et $F \lesssim E$.... mod.$\mathcal{M}$ impliquent $E \sim F$...mod.$\mathcal{M}$.

Mais ce qui est plus remarquable, on peut, pour tout facteur $\mathcal{M}$ prouver un "théorème de comparabilité universelle" :

Si $E, F \in \mathcal{M}$, on a soit $E \lesssim F$...mod.$\mathcal{M}$, soit $F \lesssim E$.. mod.$\mathcal{M}$.

Ces résultats impliquent que :

---

(1) Ces résultats ont été obtenus en collaboration par J.F. Murray et l'auteur . Ils sont contenus dans un mémoire à paraitre prochainement dans les Annals of Mathematics, Vol.36 (1935) .

La relation $E \prec F$ ....mod.$\mathcal{M}$ définit pour tout facteur $\mathcal{M}$ un arrangement linéaire des $E \in \mathcal{M}$, c'est à dire

(a) Pour tous les E, $F \in \mathcal{M}$ une et une seule des 3 relations

$$E \prec F \text{...mod.} \mathcal{M}\ ,\quad E \sim F \text{...mod.} \mathcal{M}\ ,\quad F \prec E \text{...mod} \mathcal{M}$$

est vérifiée .

(b) Si $E \prec F$...mod.$\mathcal{M}$, $F \prec G$...mod.$\mathcal{M}$, on a $E \prec G$ ... mod $\mathcal{M}$.

Continuant le procédé de la théorie des ensembles , on <u>définit</u> :

E (ou bien $\mathcal{M}$) est <u>infini Mod.$\mathcal{M}$</u>, s'il existe un $F < E$ avec $E \sim F$ ....mod.$\mathcal{M}$, il est <u>fini mod.$\mathcal{M}$</u> si ce n'est pas le cas .

Nous pouvons formuler maintenant ce que nous désirons d'un nombre $d_{\mathcal{M}}(\mathfrak{M}) = d_{\mathcal{M}}(E)$, analogue à la dimension ordinaire et aux alephs de Cantor :

$d_{\mathcal{M}}(\mathfrak{M}) = d_{\mathcal{M}}(E)$, défini pour tous les $P_{\mathfrak{M}} = E \in \mathcal{M}$ est une <u>dimension relative mod.$\mathcal{M}$</u>, si cette fonction a les propriétés suivantes :

(a) $0 \leq d_{\mathcal{M}}(E) \leq \infty$; $d_{\mathcal{M}}(E) = 0$ est équivalent à $E = 0$; $d_{\mathcal{M}}(E) = \infty$ est équivalent à E infini mod.$\mathcal{M}$

(b) $d_{\mathcal{M}}(E) = d_{\mathcal{M}}(F)$ est équivalent à $E \sim F$...mod.$\mathcal{M}$
$d_{\mathcal{M}}(E) < d_{\mathcal{M}}(F)$ est équivalent à $E \prec F$

(c) Si $E + F$ est une projection (c'est à dire $EF=0$) alors $d_{\mathcal{M}}(E+F) = d_{\mathcal{M}}(E) + d_{\mathcal{M}}(F)$.

Le <u>théorème fondamental</u> de la théorie des facteurs, est alors

Pour tout facteur $\mathcal{M}$ il existe une et, à un facteur de normalisation près (fini et positif), une seule fonction de dimension relative mod. $\mathcal{M}$, $d_{\mathcal{M}}(E)$.

<u>12.</u> - Désignons l'ensemble des valeurs numériques de $d_{\mathcal{M}}(E)$ pour tous les $E \in \mathcal{M}$, par Δ. On déduit aisément de (a), (b), (c) que :

<u>(I)</u>- ou bien Δ se compose de multiples entiers d'un nombre $\varepsilon > 0$, $< +\infty$, commençant avec $0, \varepsilon, 2\varepsilon$, ..., et finissant avec un $n\varepsilon$, n étant un nombre fixe $= 1, 2, \ldots, \infty$.

<u>(II)</u>- ou bien Δ se compose de tous les nombres réels (1) d tels que $0 \leq d \leq A$, A étant un nombre fixe, avec $0 < A \leq +\infty$.

<u>(III)</u>- ou bien Δ ne comprend que les deux nombres $0, \infty$.

Ceci mène à la <u>classification suivante des facteurs</u>

Tout facteur $\mathcal{M}$ appartient à une et une seule des classes suivantes, Δ étant l'ensemble des valeurs numériques de $d_{\mathcal{M}}(E)$ pour tous les $E \in \mathcal{M}$.

---

(1)- Tous, et non seulement un ensemble partout dense. Pour celà, il a fallu généraliser (c) au cas d'un ensemble dénombrable de termes E, F ...., ce qui se fait sans difficulté essentielle.

Classes(I_n), n=1,2,...

Δ se compose des nombres $0, \mathcal{E}, 2\mathcal{E}, \ldots\ldots, n\mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est un nombre fixe positif et fini que par une normalisation convenable de $d_{\mathcal{M}}(E)$, on peut supposer égal à 1.

Classe (I_∞)

Δ se compose de tous les nombres $o, \mathcal{E}, 2\mathcal{E}, \ldots \infty$, ($\mathcal{E}$ ayant la même signification que ci-dessus.

Classe (II_1)

Δ se compose de tous les nombres réels d vérifiant $o \leq d \leq A$, et où A est un nombre fixe avec $0 < A < \infty$. Par une normalisation convenable de $d_{\mathcal{M}}(E)$ nous pouvons faire $A = 1$.

Classe (II_∞)

Δ se compose de tous les nombres réels avec $o \leq d \leq +\infty$.

Classe (III_∞)

Δ se compose des nombres $0, \infty$, seuls.

$d_{\mathcal{M}}(1) = d_{\mathcal{M}}(\mathcal{G})$ est fini dans les classes (I_n), (II_1) infini dans les classes (I_∞), (II_∞), (III_∞) ; aussi nous appellerons les premières classes, les classes finies, et les dernières, les classes infinies. Les classes (I_n), (I_∞) sont les classes discontinues, les classes (II_1), (II_∞), les classes continues, et (III_∞) la

<u>classe proprement infinie</u>.

Il résulte immédiatement des remarques du paragraphe <u>10</u>, que tout facteur direct appartient à une classe discontinue (la classe est (I_p) avec le $P = 1,2,\ldots,\infty$, de (T)), cependant la réciproque est vraie aussi, donc :

<u>Un facteur $\mathcal{M}$ est direct si, et seulement, si sa classe est discontinue</u>.

Donc l'existence de facteurs non-directs est équivalente à celle de l'existence de facteurs dans les classes continues ou dans la classe proprement infinie.

<u>13</u>.- On peut ~~construire~~ construire des facteurs des classes (II_1) et (II_∞) (continues). Ces exemples ont des propriétés remarquables, que nous ne pouvons pas indiquer ici. Quand à la classe (III_∞), nous ne savons pas à présent si elle est vide ou non.

En tous cas, nous voyons que les énoncés <u>α</u> et <u>β</u> du paragraphe <u>6</u>, ne sont pas vrais. γ ne l'est pas non plus. : il y a des exemples de factorisations $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ non simples, c'est à dire pour lesquelles $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}'$. (Dans ces exemples $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont tous les deux de classe (II_1)).

Nous voyons donc que dans l'espace de Hilbert, $(N=\infty)$ il y a des possibilités essentiellement différentes de celles qui se présentent dans les espaces euclidiens (N fini).

La théorie des systèmes hypercomplexes et des représentations unitaires (orthogonales) de groupes y prend une forme très différente. Pour une discussion plus détaillée de cette question, voir le mémoire à paraitre aux Ann.of Math. t.36.

Une autre question qui se pose naturellement est la suivante : Si $\mathcal{M}$ est un facteur, il en est de même de $\mathcal{M}'$,donc $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, entrent tous deux dans la classification du paragraphe 12 . Quelles sont les <u>combinaisons de classes</u> possibles? La réponse est la suivante :

> Pour les deux facteurs $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, sont possibles les combinaisons suivantes (et des exemples en sont connus)
> (I_m) et (I_n) pour tous les $m,n=1,2\ldots\infty$.
> (II_α) et (II_β) ~~et (III_∞)~~ pour tous les $\alpha,\beta = 1,\infty$.
> Nous ne savons pas si la combinaison (III_∞) et (III_∞) est possible ou non .
> Toutes les autres combinaisons sont impossibles .

Si $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, ont les classes (I_m) et (I_n), c'est une factorisation directe, avec $P = m$ et $Q = n$, dans (T), (T'). Dans ce cas là, les classes de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, déterminent donc $\mathcal{M}$, et $\mathcal{M}'$ eux-mêmes , à un isomorphisme de $\mathcal{C}_y$ près . Pour les autres combinaisons de classes nous n'en savons rien .(1).

---

(1) Il est cependant établi, que la combinaison (II_1) et (II_1) possède encore un invariant d'isomorphisme: un nombre réel qui peut prendre toutes les valeurs finies et positives.

Une énumération complète des invariants d'isomorphisme dans ces cas serait importante dans plusieurs applications .

<u>I4</u>.- Dans ce qui suit, nous nous occupons des <u>classes finies</u> : (I_n) et (II_1). Nous voulons montrer que (II_1) est la généralisation raisonnable de (I_n), pour un nombre infini de dimensions. C'est toujours (I_∞), classe de l'anneau I de l'espace de Hilbert (car I,0 est une factorisation directe, avec $P = N = \infty$, $Q = 1$) qui a joué le rôle de cette généralisation (par exemple dans la mécanique des quanta), et il nous semble, au moins douteux, que ce soit à juste titre .

Il est vrai que dans la classification du paragraphe <u>I2</u>, le Δ de (I_n) , $n = 1,2....$, est l'ensemble 0, 1, 2, ...,n, et le Δ de (I_∞) est l'ensemble $1,2,....,\infty$, ce qui semble une analogie parfaite . Mais si nous changeons la normalisation du $d_{\mathcal{M}}(E)$ de (I_n) en la multipliant par $\frac{1}{n}$ (n est fini) , Δ devient l'ensemble $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ...,1$, et le Δ de (II_1) est l'ensemble $0 \leq x \leq 1$, qui semble aussi une bonne analogie . Nous allons montrer que cette dernière analogie est plus profonde que la première .

Considérons d'abord les opérateurs X <u>linéaires et fermés</u>, qui appartiennent à $\mathcal{M}$ au sens étendu (voir paragraphe <u>8</u>) , et dont le domaine de définition est partout dense dans $\mathcal{G}$ (voir les exposés C, p.2, et F p.6) .

Soit $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ leur ensemble. Les éléments de $\mathcal{E}$ (I) sont simplement tous les opérateurs linéaires et fermés à domaine partout dense .

Si la dimension N de $\mathfrak{H}$ est finie, on voit que tout élément de $\mathcal{E}$ (I) est automatiquement borné , ~~dans~~,(car il n'y a des opérateurs non-bornés que dans l'espace de Hilbert), donc $\mathcal{E}(I) = I$. Pour tout facteur $\mathcal{M}$ de classe (I_m) , m = 1,2,..., la correspondance entre $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$ définie par (T) (voir paragraphe <u>IO</u> : la dimension de $\mathfrak{H}'$ est P = m , donc finie), prouve , de même, que tous les éléments de $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ sont bornés, donc $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.

Ainsi, dans les classes (I_1), (I_2),... $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ ne contient que des éléments non-pathologiques .

Dans la classe (I_∞), $\mathcal{M}$ est isomorphe à l'anneau I de l'espace de Hilbert , donc $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ contient des opérateurs non bornés : $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \supset \mathcal{M}$. En ce cas, les éléments de $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ offrent plusieurs aspects non-désirables et pathologiques: il y a des opérateurs hermitiques , mais non hypermaximaux, donc sans forme spectrale (Voir F p.11 et G p.I7-I8) ;les opérations A+B , AB, ont alors un caractère très pathologique (voir mémoire cité au début du paragraphe 2).

D'autre part, pour les facteurs $\mathcal{M}$ de <u>classe (II_1)</u> on montre que :

$\mathcal{E}(\mathcal{M})$ contient des opérateurs non-bornés (comme dans

(I_∞)), c'est à dire $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \supset \mathcal{M}$. Cependant,:

(a) Tous les opérateurs hermitiques en $\mathcal{M}$ sont <u>hypermaximaux</u>, et possèdent donc des formes spectrales .

(b) Si X est un prolongement de Y, et si $X, Y \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$, on a $\quad X = Y$

(c) Si $X, Y \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$, on a $\quad \overline{X+Y} \quad$ et $\quad \overline{XY} \quad \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$

(Voir C. p.1 , et F. p.5) (1)

Pour les opérateurs aX , X^* , $\overline{X+Y}$, $\overline{XY}$, toutes les règles de l'algèbre des matrices sont vraies. (2)

<u>15.</u>- Retournons maintenant aux opérateurs bornés d'un $\mathcal{M}$ de classe finie.

Dans les espaces $\mathcal{C}_\gamma$ de dimension N finie, tout opérateur hermitique A a un spectre ponctuel formé de nombres réels, dont chacun a un"ordre de multiplicité" entier, la somme des ces ordres étant précisément N. Les points λ_0 de ce spectre sont caractérisés par

$$B_{\lambda_0} = F_{\lambda_0+0} - F_{\lambda_0-0} \neq 0 .$$

---

(1)-Autrement dit, les prolongements fermés minimums $\overline{X+Y}$, $\overline{XY}$ de X+Y, XY, sont univalents et ont leurs domaines partout denses. Il est même vrai que : si $X_1, X_2, \ldots$ forment un ensemble fini ou dénombrable d'opérateurs de $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, l'ensemble des f auquels tout produit <u>fini</u> ~~xxxx~~ d'opérateurs X_ν et X_ν^* peut être appliqué est partout dense .

(2)-Ce qui n'est pas vrai dans I (classe (I_∞)).Voir M.A.p. 229, des exemples de l'inégalité:

$$\overline{V_g\left[\left(\ldots\left(\overline{V_1+RU_1}\right)\right)\ldots U_g\right]} \neq R$$

(T.S.V.P.)

Nous choisissons la "normalisation" : $F_{\lambda_0+0} = F_{\lambda_0}$

où F_λ est la résolution spectrale de A (Voir D.p.17), et F. p.1) , et l'ordre de multiplicité de λ_0 et la dimension de B_{λ_0} : $d(B_{\lambda_0})$. Pareillement, tout intervalle à demi-ouvert,

$$\bar{\lambda} < \lambda_0 \leq \bar{\mu}$$

a un ordre de multiplicité : C'est la somme des ordres de tous les points λ_0 du spectre qu'il contient . On vérifie aisément que c'est $d(F_{\bar{\mu}} - F_{\bar{\lambda}})$.

Pour un facteur $\mathcal{M}$ de classe (I_n) , n= 1,2,...., on appliquera la correspondance de (T) (tout comme au paragraphe 10) . Alors l'ordre de multiplicité spectrale de l'intervalle $\bar{\lambda} < \lambda_0 \leq \bar{\mu}$ est $d_{\mathcal{M}}(F_{\bar{\mu}} - F_{\bar{\lambda}})$.

Les mêmes expressions peuvent être employées pour I dans l'espace de Hilbert ($N=\infty$) , ou pour les facteurs $\mathcal{M}$ de classe (I_∞), mais ces expressions ($d(F_{\bar{\mu}} - F_{\bar{\lambda}})$ ou $d_{\mathcal{M}}(F_{\bar{\mu}} - F_{\bar{\lambda}})$) peuvent devenir infinies . Dès que cela arrive, elles ne permettent plus la comparaison des "densités" du spectre dans des intervalles différents . Et cela arrive précisément dans les cas les plus intéressants et les plus caractéristiques: l'ordre de multiplicité de l'in-

---

(2) (suite).
avec

$$\overline{\left(..(U_1U_2)..\right)U_g} = 1 \qquad \overline{V_g\left(...(V_2V_1)...\right)} = 1$$

$\rho = 1,...,g$, les U_ρ étant unitaires , et $V_\rho = U_\rho^*$.
La loi d'associativité n'est pas vérifiée .

tervalle total $-\infty < \lambda_0 < +\infty$ est ∞ ; et l'ordre de multiplicité de tout intervalle qui contient à son intérieur des points du spectre continu est ∞ .

La généralisation à tout facteur $\mathcal{M}$ est évidente : Soit $A \in \mathcal{M}$, un opérateur hermitique et $F_\lambda \in \mathcal{M}$ les projections de sa forme spectrale ; nous pouvons attribuer l'ordre de multiplicité mod. $\mathcal{M}$: $d_{\mathcal{M}}(F_{\overline{\mu}} - F_{\overline{\lambda}})$, à l'intervalle $\overline{\lambda} < \lambda \leq \overline{\mu}$. Ce sont les classes finies dans lesquelles cette multiplicité mod. $\mathcal{M}$ est toujours finie, et nous aurons ainsi une mesure de la "densité" du spectre dans l'intervalle $\overline{\lambda} < \lambda \leq \overline{\mu}$.(Elle ne serait nulle que si $F_{\overline{\mu}} - F_{\overline{\lambda}} = 0$, $F_{\overline{\mu}} = F_{\overline{\lambda}}$, ce qui signifierait qu'il n'y a pas de spectre dans $\overline{\lambda} < \lambda \leq \overline{\mu}$).

Les classes intéressantes à ce point de vue sont donc (I_n) (n fini) et (II_1) . Dans (II_1) nous normalisons $d_{\mathcal{M}}(E)$ par $d_{\mathcal{M}}(1) = 1$, et nous ferons de même pour les (I_n) (où la normalisation originale était $d_{\mathcal{M}}(1) = n$) Avec cette normalisation, dans tous les cas, l'ordre de multiplicité mod. $\mathcal{M}$ de l'intervalle $-\infty < \lambda < +\infty$ est 1, et l'ordre de multiplicité mod. $\mathcal{M}$ de tout intervalle contenant des points du spectre est un nombre positif inférieur à 1 .

La seule différence entre les (I_n), n fini, et (II_1) est que pour les premiers, les valeurs admissibles pour l' ordre de multiplicité sont $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$, tandis que pour le dernier, ce sont tous les nombres réels d, vérifiant $0 \leq d \leq 1$.

Nous pouvons maintenant "numéroter" les points du spectre de A : le numéro $\nu(\lambda_0)$ de λ_0 étant l'ordre de multiplicité mod. $\mathcal{M}$ de tout l'intervalle $-\infty < \lambda \leq \lambda_0$ c'est à dire que nous poserons :

$$\nu(\lambda_0) = d_{\mathcal{M}}(F_{\lambda_0}) .$$

Dans (I_n) $\quad \nu(\lambda_0) = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$

Dans (II_1) $\quad 0 \leq \nu(\lambda_0) \leq 1$.

Cette analogie va si loin, que l'on prouve sans difficulté le "Minimax Prinzip" de R. Courant :

Soit $\mathcal{M}$ un facteur appartenant à une classe finie, A un opérateur hermitique, $A \in \mathcal{M}$; et ν un nombre réel : $0 < \nu \leq 1$. Soit $M_{\mathfrak{M}}$ la borne supérieure de (Af,f) pour tous les $f \in \mathfrak{M}$, $\|f\| = 1$. Soit $\lambda_0(\nu)$ la borne inférieure de $M_{\mathfrak{M}}$ pour toutes les multiplicités linéaires et closes $\mathfrak{M}$ avec $P_{\mathfrak{M}} \in \mathcal{M}$, $d_{\mathcal{M}}(\mathfrak{M}) = \nu$. $\lambda_0(\nu)$ appartient alors au spectre de A, et en est le plus petit élément avec un numéro $\geq \nu$.

Uneautre application est la suivante : Pour une matrice dans un $\mathfrak{G}$ à dimension N finie, la notion de la trace peut être définie comme il suit : La trace de A est la somme de toutes les valeurs caractéristiques de A, c'est à dire de tous les éléments différents de son spectre (ponctuel), chacun étant compté avec son ordre . On peut donc écrire :

$$\mathrm{Trace}\ A = \int \lambda \ d \left[d(F_\lambda) \right]$$

(intégrale de Stieljes).

Remarquons cependant que cette formule correspond à la normalisation usuelle de $d(E)$ $\left(\text{dans laquelle } d(1) = \overset{N}{\cancel{K}}\right)$; si nous nous servons de notre nouvelle normalisation (dans laquelle $d(1) = I$), le second membre de la formule précédente est $\frac{1}{N}$ Trace A.

En tout cas, il est clair que cette formule peut être généralisée pour tous les facteurs $\mathcal{M}$ de classe finie, définissant ainsi une <u>trace mod. $\mathcal{M}$</u> : Si A est un opérateur hermitique , $A \in \mathcal{M}$, F_λ sa résolution spectrale , on a:

$$\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}\ A = \int \lambda \ d \left[d_{\mathcal{M}}(F_\lambda) \right] .$$

On prouve aisément que :

$\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}\ A$ est définie pour tous les opérateurs hermitiques $A \in \mathcal{M}$ et a des valeurs réelles et finies . Elle a les propriétés suivantes :

(a) $\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(1) = I$

(b) $\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(A) \geq 0$ si A est "définie" (c'est à dire : $(Af,f) \geq 0$ pour tous les $f \in \mathfrak{H}$.(1)

(1)- On prouve de même que l'égalité entrainerait $A = 0$.

(c) $\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(aA) = a\,\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(A)$, pour tout nombre réel a .

(d) $\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(A+B) = \mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(A) + \mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(B)$, si A et B sont commutatifs .

(e) $\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(UAU^{*}) = \mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(A)$, pour tout $U \in \mathcal{M}$ unitaire .

Réciproquement : Cherchons un nombre réel $T(A)$ défini pour tous les opérateurs hermitiques A de $\mathcal{M}$ et vérifiant les 5 conditions précédentes :

I°) Si le facteur $\mathcal{M}$ appartient à une classe infinie, ce problème n'a pas de solution .(1).

2°) si $\mathcal{M}$ appartient à une classe finie, (I_n), (n fini) ou (II_1), le problème a une solution unique : $\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(A)$.

Observons que nous n'avons prouvé que (d) , et non (d') :

(d') $\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(A+B) = \mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(A) + \mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(B)$ pour A et B quelconques .

Cependant (d') est vrai dans les classes (I_n) (n fini) ainsi que dans tous les exemples connus de (II_1) ; mais la démonstration générale de ce fait nous manque . En tous cas, (b) suffit pour établir l'unicité de $\mathrm{Trace}_{\mathcal{M}}(A)$.

---

(1)- La trace, au sens ordinaire , n'est , dans l'espace de Hilbert, pas définie pour tous les opérateurs bornés; en outre , elle est souvent infinie, ainsi $\mathrm{Trace}\,(1) = \infty$.

Avec l'aide du "Minimax Prinzip", on prouve encore
(b') : Trace$_{\mathcal{M}}$(A) $\geq$ Trace$_{\mathcal{M}}$ (B) si A - B est définie.
(b') est plus fort que (b), mais en serait une conséquence
si (iν)' était prouvé.

Il est évident que cette trace mod.$\mathcal{M}$ aurait un rôle essentiel dans l'interprétation statistique si les facteurs de classe (II_1) pouvaient être appliqués à la mécanique des quanta .

D'autre part, on peut s'en servir pour une caractérisation "intérieure" (comme systèmes hypercomplexes abstraits sans emploi de $\mathcal{G}$) des facteurs de classe finie .

ERRATUM de l'exposé II-K

Von Neumann

Théorie des opérateurs d'anneaux

<u>P.1 -ligne 7</u> Note oubliée . Lire :

(7) ..ou analytique) avec un opérateur de ces classes (2), le futur ....

<u>P.3 -lignes I3 et I4</u> On doit distinguer le I désignant l'anneau maximum et le <u>I</u> désignant une condition (p.2) en soulignant le second. Lire :

(13) ...peu plus que <u>I</u> ; nous exigerons que l'opérateur unité 1 appartienne à . Et nous rem-

(14) placerons <u>I</u> par <u>I*</u>

<u>P.5 -ligne 9</u> C'est un signe d'inégalité qui doit être mis . Lire :

$\mathfrak{X} \lneq I$ est nécessairement point limite faible d'une .....

<u>P.6 -lignes I5 et I6</u> Ligne oubliée entre elles . Lire :

(15) $\mathfrak{X}'' = A(\mathfrak{X})$

(15 bis) En outre :

(16) $\mathfrak{X}' = \left(A(\mathfrak{X})\right)'$

<u>P.12- lignes 14 et 15</u> Le symbole $\wedge$ a été mis au lieu de $\cdot$. <u>Lire</u> :

(14) Le cas opposé est que $\mathcal{M} . \mathcal{M}'$ est aussi petit

(15) que possible, c'est -à-dire $\mathcal{M} . \mathcal{M}' = 0$, ce qui est l'équation (S) de <u>3</u> (b) .

<u>P.20-lignes 1,2 et 3</u> Disposition mal reproduite . Lire :

(1) (α) et :

(2) (γ) (P) et (P') ont pour conséquence $\mathcal{N} = \mathcal{M}'$

(3) Mais γ est une conséquence de α :

si $\mathcal{M}$ est .....

P.24 dernière ligne Une lettre oubliée . **Lire** :

X, Y, ... $\notin$ I .

P.25 ligne I8 Accent oublié . **Lire** :

c'est à dire $\mathcal{M}_1 \subsetneqq \mathcal{M}'_j$

P.26 ligne 7 La remplacer par :

(S) est équivalent à :

P.33 ligne 20 Signe = mal reproduit. **Lire** :

(a) $0 \leqq d_{\mathcal{M}}(E) \leqq \infty$; $d_{\mathcal{M}}(E) = 0$ est équivalent à $E = 0$;

P.36 ligne 19 Accent oublié. **Lire** :

simples, c'est à dire pour lesquelles $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_i$

P.37 lignes 12 à 16 Parenthèse mal faite . Texte à rectifier. **Lire** :

(12) (I_m) et (I_n) pour tous les m,n = 1, 2, ...

(13) (II_α) et (II_β) pour tous les α, β

(14) = 1, ∞ .

(15) Nous ne savons pas si la combinaison (III_∞) et

(I6) (III_∞) est possible ou non .

P.40 et 41 (note) Dans la note (2) c'èst 9 qu'il faut lire et non g . **Lire** :

(2) Ce qui n'est pas vrai dans. I (classe (I_∞) . Voir M.A. p.229 des exemples de l'iné-

galité :

$$\overline{V_9\left[\overline{(\ldots\ldots V_1(\overline{RU_1})\ \ldots)U_9}\right]} \neq R$$

avec :

$$\overline{\left[\ldots\ldots(\overline{U_1U_2})\ldots\ldots\right]U_9} = 1; \quad \overline{V_9\left[\ldots(\overline{V_2V_1})\ldots\right]} = 1$$

les U_ρ étant unitaires et $V_\rho = U_\rho^*$, $\rho = 1,2..9$

La loi d'associativité n'est pas vérifiée .

<u>P.43 ligne 10</u> Signe d'égalité oublié . <u>Lire</u> :

Dans (II_1) $\quad 0 \leq \nu(\lambda_0) \leq 1$

<u>P.43 ligne I5</u> Facteur en indice oublié . <u>Lire</u> :

$0 < \nu = 1$ .Soit $M_{\mathfrak{M}}$ la borne supérieure de(Af, f)

<u>P.43 ligne I8</u> Signe d'inégalité oublié .<u>Lire</u> :

..res et closes $\mathfrak{M}$ avec $P_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$, $a_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}) \geq \nu$.

<u>P.46 ligne 4</u> Lettre mal reproduite .<u>Lire</u> :

si (d)' était prouvé .