SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ WEIL

Mesure de Haar

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. nº 8, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A10_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année 1934-1935

ESPACE DE HILBERT

H.- Mesure de Haar

Exposé fait par M. André WEIL, le lundi 11 Mars 1935

1.- La définition des groupes est connue . L'ensemble des éléments d'un groupe abstrait G sera considéré comme un espace, l'espace du groupe; y opèrent transitivement deux groupes de transformations : groupe des translations à gauche, qui font correspondre à tout point x le point $s^{-1}x$, s étant un élément fixe arbitraire; et groupe des translations à droite, faisant correspondre à x, le point xs : ces groupes, isomorphes à G, portent dans la théorie de Lie le nom de premier et second groupe des paramètres. Opèrent également dans l'espace de groupe le groupe des automorphismes dont nous n'aurons pas à faire usage, et le groupe Γ des automorphismes intérieurs ou groupe adjoint : c'est le groupe des transformations par un élément du groupe, faisant correspondre à tout élément x l'élément $s^{-1}xs$; il est homomorphe à G, et l'ensemble des éléments de G auxquels correspond dans Γ la transformation identique est (par définition) le centre de G . L'on désignera par sE , Es , E^{-1}, les ensembles transformés d'un sous-ensemble E de G par les transformations $(x \to sx)$, $(x \to xs)$, $(x \to x^{-1})$ respectivement, et par $E.F$ (E,F étant deux sous-ensembles quelconques) l'ensemble des produits d'un élément de E par un élément de F.

Si dans le groupe G, l'on se donne un sous-groupe g, les éléments de G se répartissent en <u>classes suivant g</u> (Nebengruppen), c'est à dire en ensembles xg (ce sont des classes à gauche; il y a aussi, suivant g, une répartition en classes à droite gx, mais pour unifier les notations nous n'en ferons jamais usage). Les classes xg sont transformées entre elles, transitivement, par le groupe des translations à gauche : si on les considère comme les points d'un espace H, H sera donc le champ d'un groupe de transformations transitif homomorphe à G ; on dira que c'est l'espace homogène défini par g dans G , et on écrira $H = G/g$. Si g est un sous-groupe invariant, H est l'espace du groupe quotient; en général, le groupe des transformations de H est le quotient de G par le plus grand sous-groupe invariant de G contenu dans g : si l'on n'a en vue que l'étude des espaces homogènes on pourra donc supposer que g ne contient aucun sous-groupe invariant . g, considéré comme point de H, sera noté O ; la classe xg, considérée de même, sera noté $P = xO$; les transformations de H qui laissent O invariant sont celles qui correspondent aux éléments de g, celles qui laissent invariant $P = x\,O$ sont celles du groupe transformé xgx^{-1}.

Une fonction f(x) définie pour tous les éléments x du groupe, et prenant, soit des valeurs réelles, soit des valeurs complexes, sera appelée une fonction du groupe . Une fonction f(P) des points d'un espace homogène $H = G/g$ n'est pas autre chose qu'une fonction du groupe G, constante sur chaque classe suivant g. Nous utiliserons, dans ce qui suivra, la théorie moderne de la mesure et de l'intégration donnée par

M. de Possel, dans l'exposé A.

2.- Soit un espace où opère un groupe de transformations G; supposons que ce soit un espace mesuré, et que la mesure y soit invariante par G . Alors, E étant un ensemble mesurable quelconque, s un élément de G, le transformé sE de E sera mesurable , et l'on aura, m désignant la mesure

$$m (sE) = m E$$

Il en résulte que l'intégrale sera aussi invariante; si on la note par $\int f(P)\, dP$, $f(sP)$ sera mesurable en même temps que $f(P)$, et l'on aura, f étant intégrable (ou bien non-négative et mesurable) :

$$\int f(P)\, dP = \int f(sP)\, dP.$$

Une différentielle étant un symbole de mesure, on peut exprimer l'égalité de deux mesures par l'égalité symbolique de deux différentielles, donc ici :

$$d(sP) = dP$$

Nous ne nous occuperons, dans cet exposé, que des espaces mesurés homogènes. S'il s'agit plus particulièrement de l'<u>espace de groupe</u> d'un groupe G, la mesure sera notée m et l'intégrale $\int f(x)\, dx$; m sera dite une <u>mesure invariante</u> (plus précisément, <u>invariante à gauche</u>), cette invariance s'exprimant par l'une des égalités :

$$mE = m(sE) \;, \quad \int f(x)dx = \int f(sx)\, dx, \qquad d(sx) = dx$$

Si de plus, m est invariante par la transformation $(x \to x^{-1})$ l'on aura:

$$mE = m(sE) = m(E^{-1}) = m(E^{-1}s^{-1}) = m(t^{-1}E^{-1}s^{-1}) = m(sEt)$$

d'où $$\int f(x)dx = \int f(sxt)dx = \int f(x^{-1})dx$$
$$dx = d(sxt) = d(x^{-1})$$
Nous dirons alors que la mesure est bi-invariante : elle est invariante à la fois à gauche et à droite .

La notion de produit de mesures permet de définir une mesure invariante dans le produit direct de deux ou plusieurs groupes (en nombre fini) si l'on connait une mesure invariante dans chacun des groupes facteurs . Si la mesure dans chacun des groupes facteurs est bi-invariante, le produit des mesures sera une mesure bi-invariante dans le groupe produit .

3:-Il arrive en général que dans les groupes que l'on peut avoir à étudier ce n'est pas une mesure qui est donnée a priori, mais une topologie. Tel est , par exemple, le cas des groupes de Lie : pour ceux-ci, Hurwitz avait montré en 1897, en utilisant un invariant intégral facile à construire, qu'il existe bien une mesure invariante. Mais l'existence d'une telle mesure dans une classe très étendue de groupes topologiques n'a été démontrée qu'en 1933 : c'est à Haar que l'on doit cette belle et importante découverte, que nous allons exposer maintenant.

Considérons d'abord, d'une manière générale, un espace satisfaisant aux conditions suivantes :
1°- une topologie y est définie par un système de voisinages

(au sens de Hausdorff);

2°- la famille de voisinages peut être remplacée par une famille dénombrable (II^ème axiome de dénombrabilité);

3°- l'espace est localement compact: tout point P possède au moins un voisinage compact (1). Il en résulte, comme on sait que l'espace est métrisable : supposant qu'on y introduit une métrique, nous désignerons par $\delta(E,E')$ la distance de deux ensembles E, E' (borne inférieure des distances d'un point de E à un point de E'), et par d(E) le diamètre de E (borne supérieure des distances de deux points de E). Si un espace satisfait à ces conditions, c'est à dire s'il est métrisable, séparable et localement compact, tout sous-ensemble fermé peut encore être considéré comme un espace de même nature.

La théorie de la mesure dans ces espaces repose sur le théorème suivant, de Carathéodory (2) :

---

(1) Nous ne suivons pas l'usage de beaucoup de mémoires modernes où la tendance apparait de réserver le mot "compact" aux ensembles fermés . Pour nous, comme pour Fréchet et Hausdorff un ensemble compact, dans un espace topologique, est un ensemble dont la fermeture est compacte.

(2) Carathéodory n'a développé sa théorie de la mesure que dans les espaces euclidiens: mais ses démonstrations s'appliquent sans changement au cas étudié ici.

Soit μE une fonction de Carathéodory dans un espace topologique métrisable. Pour que tous les ensembles ouverts possèdent la propriété de Carathéodory, il faut et il suffit que μ satisfasse à l'axiome suivant :

I.- Si deux ensembles E, E' ont une distance $\delta(E,E') > 0$, on a $\mu(E + E') = \mu E + \mu E'$.

Si nous nous plaçons maintenant dans un espace satisfaisant aux conditions I°, 2°, 3°, la condition nécessaire et suffisante pour que μE soit fini sur tous les ensembles compacts est que l'on ait l'axiome :

II.- Tout point P possède au moins un voisinage de mesure finie.

De I et II résulte que tous les ensembles ouverts (en particulier l'espace entier) et tous les ensembles de Borel sont mesurables. Une mesure μ satisfaisant à I et II sera appelée une mesure de Radon, deux mesures de Radon étant considérées comme identiques si elles coincident sur tous les ensembles ouverts (ou, ce qui revient au même, sur les ensembles fermés) : elles coincident alors sur tous les ensembles de Borel. Pour une mesure de Radon, toute fonction continue est mesurable; l'intégrale correspondance $\int f(P)\, d\mu$ sera appelée une intégrale de Radon-Stieltjes. Si d'ailleurs l'on se donne une fonction $\mu\Omega$ définie seulement sur les ensembles ouverts Ω, et satisfaisant sur ces ensembles aux axiomes I et II, on peut la prolonger, c'est à dire en déduire une mesure de Radon (dite "régulière") coincidant avec la fonction donnée sur les ensembles ouverts : il suffit pour cela de définir μE, quel que soit E comme la borne inférieure de $\sum_i \mu \Omega_i$ pour $E \subset \bigcup(\Omega_i)$. <u>Cet énoncé subsiste si l'on remplace la famille des ensembles ouverts par la famille dénombrable $\mathcal{F}_0$ formée par tous les voisinages compacts et par les réunions finies de tels voisinages</u>. On en déduit que les espaces L^p sont séparables : les combinaisons linéaires finies, à coefficients rationnels complexes, des fonctions caractéristiques des ensembles de $\mathcal{F}_0$ y sont partout denses ; en particulier, L^2 est un espace hilbertien s'il ne se réduit pas à un espace à un nombre fini de dimensions (ce qui ne pourrait arriver que si μ s'annulait en dehors d'un nombre fini de points).

Si μ est une mesure de Radon, et f(P) une fonction non négative, intégrable sur tout ensemble mesurable compact $\mu_1(E) = \int_E f(P)\, d\mu$, est une mesure de Radon, dite de <u>base μ</u>.

4.- Un groupe G est appelé, comme on sait, <u>groupe topologique</u>, si son espace de groupe est défini comme espace topologique au sens de Hausdorff par une famille de voisinage V, et si le produit $y^{-1}x$ est une fonction <u>continue</u> de l'ensemble des deux éléments x, y. Les transformations $(x \to sx)$, $(x \to xs)$, $(x \to x^{-1})$ sont alors continues; et si

Ω est un ensemble ouvert, E un ensemble quelconque dans G, ΩE et $E\Omega$ sont des ensembles ouverts. Un sous-groupe g, fermé dans G, est encore un groupe topologique; l'espace homogène $H = G/g$ est un espace topologique au sens de Hausdorff si on y prend pour voisinages les ensembles Vg [1], et les transformations de G y sont continues. Si g est un sous-groupe invariant fermé, le groupe quotient G/g est un groupe topologique. Si g est à la fois ouvert et fermé dans G (donc somme de composantes connexes de G), on voit facilement que $H = G/g$ est un espace discret, où tout point possède un voisinage réduit à ce point. Par exemple, V étant un voisinage de l'unité tel que $V = V^{-1}$, et V^n l'ensemble des produits de n éléments de V, soit V^{∞} la réunion de tous les V^n pour $n = 1,2,3 \ldots$: c'est un groupe, ensemble de tous les produits finis d'éléments de V, qui est ouvert comme réunion d'ensembles ouverts, mais aussi fermé, car si s est point d'accumulation de V^{∞}, il y aura un point de l'un des V^n dans sV, et s sera dans V^{n+1}. Si V est connexe, V^{∞} est alors la composante connexe de l'unité, donc un sous-groupe invariant, et le groupe quotient est discret. Si G lui-même est connexe, on voit qu'il est engendré par les éléments d'un voisinage quelconque.

---

(1) Il n'en serait pas ainsi si l'on supposait seulement que le produit $y^{-1}x$ est une fonction continue de chacune des variables x, y.

5.- Nous allons démontrer maintenant qu'<u>il existe dans un groupe de Haar une mesure de Radon et une seule, invariante à gauche</u>, non identiquement nulle, et définie à un facteur constant près : cette mesure sera appelée la <u>mesure de Haar</u>, et sa valeur sur les ensembles de Borel sera désignée par m.

S'il s'agit d'un groupe de Lie, l'on sait définir localement au voisinage de l'unité un élément de volume que l'on peut transporter en tout autre point par le groupe des translations à gauche . De même , dans le cas général, nous commencerons par définir localement une mesure approximative L'on s'appuyera sur le lemme suivant (ici comme par la suite φ_E désignera la fonction caractéristique de l'ensemble E, égale à 1 sur E et à 0 sur $\mathscr{C}$ E) :

<u>Lemme</u> . <u>Supposons qu'il existe une mesure de Haar m soit V un voisinage compact de l'unité , tel que $V = V^{-1}$; E un ensemble mesurable compact . Pour tout $\varepsilon > 0$ l'on peut choisir des constantes</u> $c_\nu \geq 0$ <u>et des éléments</u> x_ν <u>dans EV de façon que l'on ait</u> :

$$\varphi_E(s) \leq \sum c_\nu \varphi_{x_\nu V}(s) \quad \underline{\text{quel que soit } s}$$

<u>et</u>
$$\sum c_\nu \leq (1+\varepsilon)\,\frac{m(EV)}{mV}$$

Posons en effet E' = EV : E' sera ouvert, et tendra vers la fermeture $\overline{E}$ de E (donc vers E si E est fermé) quand d(V) tend vers zéro; et choisissons (c'est toujours possible) une fonction continue $\psi(x)$ telle que $0 \leq \psi(x) \leq \varphi_V(x) =$

$\varphi_V(x^{-1})$, et que

$$\mu = \int \psi(x)\, dx \geq (1-\varepsilon)\, m\, V.$$

L'on aura :

$$\varphi_E(s) \leq \frac{1}{\mu} \int_{E'} \psi\, (s^{-1}x)\, dx$$

car $\psi\ (s^{-1}x)$ s'annule en dehors de E' quand s est dans E. Evaluons le second membre par l'intégrale de Riemann : ψ étant uniformément continue, si l'on considère E' comme une somme finie d'ensembles mesurables W_ν de diamètre suffisamment petit, et qu'on choisisse dans chaque W_ν un point x_ν on aura :

$$\varphi_E(s) \leq \sum \frac{mW_\nu}{\mu} \psi\, (s^{-1}x_\nu) + \varepsilon$$

ce qui peut s'écrire :

$$(1-\varepsilon)\, \varphi_E\, (s) \leq \sum \frac{mW_\nu}{\mu}\, \psi\, (s^{-1}x_\nu)$$

ou en posant $c_\nu = \dfrac{m\ W_\nu}{\mu(1-\varepsilon)}$

$$\varphi_E(s) \leq \sum c_\nu \psi(s^{-1}x_\nu)$$

$$\leq \sum c_\nu \varphi_V(s^{-1}x_\nu) = \sum c_\nu\, \varphi_V(x_\nu^{-1}s) = \sum c_\nu \varphi_{x_\nu V}(s)$$

et l'on a bien

$$\sum c_\nu = \frac{m\ E'}{\mu(1-\varepsilon)} \geq \frac{m(EV)}{(1-\varepsilon)^2 m\ V}$$

E, F étant deux ensembles quelconques, désignons par (E;F) la borne inférieure de $\sum c_\nu$ pour tous les systèmes d'éléments x_ν et de constantes $c_\nu \geq 0$ tels que l'on ait

$$\varphi_E \leq \sum c_\nu \varphi_{x_\nu F}$$

Si E, F sont mesurables , on en déduit en intégrant :
$m E \leq \sum c_\nu . mF$, d'où $(E:F) \geq \frac{mE}{mF}$. D'autre part, si E est compact et si F a des points intérieurs, E peut être recouvert par des ensembles $x_\nu F$ en nombre fini, donc $(E:F)$ est fini. L'on a de plus, dans les conditions du lemme :

$$\frac{mE}{mV} \leq (E:V) \leq \frac{m(EV)}{mV}$$

Soit V'_ν une suite de voisinages de l'unité, de diamètres tendant vers zéro; soit $V_\nu = V'_\nu + V'^{-1}_\nu$. L'on aura, si E et E_0 sont fermés compacts :

$$\frac{mE}{mE_0} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{(E:V_\nu)}{(E_0:V_\nu)}$$

La mesure de Haar, étant bien définie par cette égalité sur les ensembles fermés compacts, est donc unique (à un facteur près) si elle existe . Pour la construire par la méthode de Haar sans supposer a priori son existence, désignons par E_0 un ensemble fermé compact, ayant des points intérieurs (ce sera l'unité de mesure), et par Ω un ensemble quelconque pris dans la famille Φ_0 : les Ω étant en infinité dénombrable, on pourra, par le procédé diagonal, extraire de la suite V_ν définie plus haut une suite partielle (qui sera encore notée V_ν) de façon que la limite

$$\lambda \Omega = \lim_{\nu \to \infty} \frac{(\overline{\Omega}:V_\nu)}{(E_0:V_\nu)}$$

existe pour tout Ω.

Or on a $(E:F) \geq 1$, car si $\varphi_E \leq \sum c_\nu \varphi_{x_\nu F}$ on aura en tout point, et en particulier sur E, $\varphi_E \leq \sum c_\nu$. On a évidemment $[\gamma(E_\rho):F] \leq \sum_\rho (E_\rho : F)$. Et l'on a, quels que soient E, E', E" :

$$(E:E').(E':E'') \geq (E:E'')$$

car les inégalités

$$\varphi_E \leq \sum c_\nu \varphi_{x_\nu E'} \quad , \quad \varphi_{E'} \leq \sum d_\rho \varphi_{y_\rho E''}$$

entrainent $\varphi_E \leq \sum c_\nu d_\rho \varphi_{x_\nu y_\rho E''}$

On a donc, en particulier, quel que soit E :

$$\frac{1}{(E_0:E)} \leq \frac{(E:V_\nu)}{(E_0:V_\nu)} \leq (E:E_0)$$

Par suite $\lambda\Omega$ est compris entre $\frac{1}{(E_0:\bar{\Omega})}$ et $(\bar{\Omega}:E_0)$, et est fini et positif. Si $\delta(\Omega, \Omega') > 0$, $\lambda(\Omega+\Omega') = \lambda\Omega + \lambda\Omega'$ Si $\bar{\Omega}_0 \subset \gamma(s_i \Omega_i)$, les s_i étant dans G, on pourra, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, ne garder qu'un nombre fini de termes dans le second membre, et on aura alors $\lambda\Omega_0 \leq \sum \lambda\Omega_i$. Soit maintenant E un ensemble quelconque : considérons tous les systèmes d'ensembles Ω_i et d'éléments s_i tels que $E \subset \gamma(s_i \Omega_i)$, et soit xE la borne inférieure de $\sum \lambda\Omega_i$ pour tous ces recouvrements . xE satisfait à l'axiome I; de plus $x\Omega = \lambda\Omega$, donc l'axiome II est satisfait, et $x\bar{\Omega} \geq \lambda\Omega$, donc x n'est pas identiquement nulle: c'est bien la mesure de Haar.

6.- Soit m une mesure de Haar: tout automorphisme continu de G la transforme en une mesure de Haar, c'est à dire la multiplie par un facteur constant. On aura en particulier $m(s^{-1}E\,s) = m(Es) = \Delta(s).mE$; et $\Delta(s)$ satisfait à l'équation $\Delta(st) = \Delta(s)\,\Delta(t)$: on dit que Δ constitue une <u>représentation</u> de G . Si G est un groupe de Lie, $\Delta(s)$ est la valeur absolue du déterminant de la substitution linéaire qui correspond à s dans le groupe adjoint. En tout cas c'est une fonction continue de s, car si s est dans un voisinage V suffisamment petit de l'unité, on a $E_c s \subset E_o V$, donc $\Delta(s) < 1 + \varepsilon$ et par suite aussi $\Delta(s) > \frac{1}{1+\varepsilon}$

Si $\Delta(s) = 1$ quel que soit s, m est invariante à droite : $m(E^{-1})$, considérée comme fonction de E, est donc une mesure de Haar, on a $m(E^{-1}) = \lambda.mE$, d'où $mE = \lambda^2.mE$, et $\lambda = 1$: la mesure est bi-invariante . Le groupe G est alors dit <u>uni-modulaire</u>. Si au contraire Δ n'est pas constant, l'équation $\Delta(s) = 1$ détermine un sous-groupe invariant U, fermé dans G, et le groupe quotient G/U est isomorphe au groupe des translations de la droite . Il ne peut en être ainsi quand G est compact, ni quand c'est un groupe de Lie semi-simple : dans ces deux cas on est certain que la mesure est bi-invariante. En tout cas, on a les règles de calcul :

$$m(Es) = \Delta(s).mE\ , \qquad d(xs) = \Delta(s).dx\ ;$$

et $m(E^{-1})$ considérée comme fonction de E possède l'invariance <u>relative</u> à gauche . Soit plus généralement μ E une mesure de Radon non nulle, telle que l'on ait $\mu(sE) = \chi(s).\mu E$: on dira qu'elle est <u>relativement invariante</u> à gauche ; $\chi(s)$ est alors une représentation de G, et l'on voit comme pour $\Delta(s)$ que c'est une fonction continue . On peut, au moyen de la mesure μ , former des intégrales de Radon-Stieljes qui seront notées $\int f(x)\, d\mu(x)$; et l'invariance de μ s'exprimera symboliquement par l'égalité $d\mu(sx)=\chi(s).d\mu(x)$ Considérons en particulier la fonction d'ensembles de base μ

$$m_1(E) = \int_E \chi(x^{-1})\, d\mu(x)$$

C'est une mesure de Radon; et l'on aura :

$$m_1(sE) = \int_{sE} \chi(x^{-1})\, d\mu(x) = \int_E \chi(x^{-1}s^{-1})\, d\mu(sx)$$

$$= m_1(E)$$

m_1 est donc (à un facteur près) la mesure de Haar m ; et si l'ensemble E est contenu dans un voisinage de s dont le diamètre tende vers zéro, $\frac{mE}{\mu E}$ tendra vers $\chi(s^{-1})$, donc $\frac{\mu E}{m E}$ tendra vers $\chi(s)$, d'où, par définition de l'intégrale

$$\mu E = \int_E \chi(x)\, dx$$

Réciproquement, cette formule définit évidemment une mesure de Radon satisfaisant à l'équation $\mu(sE) = \chi(s).\mu E$. Cette mesure est donc unique (à un facteur près): et elle est relativement invariante à droite, car de son expression on déduit que $\mu(Es) = \Delta(s)\chi(s)\mu E$. On a en particulier à un facteur constant λ près :

$$m(E^{-1}) = \int_E \Delta(x^{-1})\,dx\,;$$

d'où il suit que si E est contenu dans un voisinage de l'unité tendant vers zéro $\dfrac{m(E^{-1})}{mE}$ tend vers λ, $\dfrac{mE}{m(E^{-1})}$ également, donc $\lambda = 1$. On peut écrire symboliquement :

$$d(x^{-1}) = \Delta(x^{-1})\,dx$$

7.- La théorie des espaces homogènes se déduit de ces résultats (Voir Weil, Mémorial à paraitre prochainement). Les résultats complets de la théorie sont les suivants :

Dans tout groupe de Haar G (au sens du paragr. 4) il existe un élément de volume dx et un seul tel que $mE = \int_E dx$ soit une mesure de Radon invariante à gauche (au sens des paragr. 2 et 3) ; et l'on a :

$$d(sx) = dx, \quad d(xs) = \Delta(s)dx, \quad d(x^{-1}) = \Delta(x^{-1})\,dx$$

Soit $\chi(s)$ une solution continue de $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$: il existe une mesure de Radon μE et une seule telle que $\mu(sE) = \chi(s)\mu E$; elle est donnée par la formule

$$\mu E = \int_E \chi(x)\,dx$$

et l'on a en même temps $\mu(Es) = \Delta(s)\chi(s)\mu E$.

Soit g un sous-groupe fermé dans G, $d\xi$ son élément de volume invariant, tel que l'on ait $d(\sigma\xi) = d\xi$,

$d(\xi\sigma) = \delta(\sigma)\,d\xi$. Pour qu'il existe dans l'espace homogène $H = G/g$ un élément de volume dP relativement invariant tel que $d(sP) = \chi(s)\,dP$, il faut et il suffit que l'on ait, sur g : $\delta(\sigma) = \Delta(\sigma)\,\chi(\sigma)$; et dP est alors déterminé d'une manière unique par l'équation :

$$\int \chi(x)\,f(x)\,dx = \int dP \int f(x\xi)\,d\xi \,.$$

En particulier, pour qu'il existe dans H un élément de volume invariant dP, il faut et il suffit que $\delta(\sigma) = \Delta(\sigma)$; il en est ainsi nécessairement quand g est un sous-groupe invariant, H étant alors le groupe quotient et dP la mesure de Haar dans H.

S'il s'agit de groupes de Lie, ces résultats sont faciles à vérifier .