J. DIEUDONNÉ

Algèbres de matrices

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 1 (1933-1934), exp. n° 4, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1933-1934__1__A4_0>

Exemplaire n° 6.
Institut Henri Poincaré
Ne peut quitter la
salle de Travail

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Première année 1933-1934

Théorie des Groupes et des Algèbres

D.- Algèbres de Matrices

Exposé fait par M. DIEUDONNE, le 15 Janvier 1934

A.- DEFINITIONS.- ANNEAUX DE MATRICES

1.- Matrices.-Soit $\mathcal{O}$ un anneau ayant un élément unité . Une matrice de cet anneau est un tableau de m n éléments de l'anneau :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots\ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots\ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots\ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})$$

Une matrice est nulle si tous ses éléments sont nuls.

Soit deux matrices A et B ayant chacune le même nombre de lignes et de colonnes. On pose :

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

Si λ est un nombre de $\mathcal{O}$, le produit λA est défini par

$$\lambda A = (\lambda \alpha_{ij}) \text{ et de même } A\lambda = (\alpha_{ij}\lambda)$$

Enfin, soit A et B deux matrices telles que le nombre des colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B . On appelle alors produit AB, la matrice :

$$C = (\gamma_{hk})$$

où $\quad \gamma_{hk} = \sum_i \alpha_{hi}\beta_{ik}$

Toutes ces définitions s'expliquent d'elles-mêmes quand on considère une matrice A comme définissant une substitution linéaire

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} v_j \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Une telle substitution peut d'ailleurs elle-même s'écrire :

$$U = AV$$

où $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

On déduit immédiatement des définitions les règles suivantes :

$$\begin{aligned}
A + 0 &= A \\
A + (B + C) &= (A + B) + C \\
\lambda (A + B) &= \lambda A + \lambda B \\
(A + B) \lambda &= A \lambda + B \lambda \\
A.BC &= AB.C \\
A (B + C) &= AB + AC \\
(B + C) A &= BA + CA
\end{aligned}$$

lorsque les opérations effectuées ont un sens

Dans la suite de cette conférence, nous ne considèrerons plus que des matrices <u>carrées</u> d'ordre n.

2.- <u>Toutes les matrices carrées d'ordre n dans un anneau σ forment un anneau, l'anneau de matrices complet (ou total) sur σ</u>

Cette anneau admet σ comme domaine d'operateurs à droite et à gauche.

Posons :

$$e_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut ecrire toute matrice sous la forme

$$A = (\alpha_{ij}) = \sum \alpha_{ij} e_{ij} = \sum e_{ij} \alpha_{ij}$$

et inversement. On n'a $A = 0$ que si $\alpha_{ij} = 0$ quelque soit i, j. Les e_{ij} sont dits <u>éléments de base</u> de l'anneau de matrices par rapport à σ.

D'après la règle de multiplication des matrices, on a

$$e_{ij}\, e_{hk} = 0 \quad \text{si} \quad j \neq h$$
$$e_{ij}\, e_{jk} = e_{ik}$$

L'anneau de matrices admet un <u>élément unité,</u> la matrice

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & \\ & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots 1 \end{pmatrix} = e_{11} + e_{22} + \ldots\ldots + e_{nn}$$

3.- Supposons maintenant que σ soit un <u>corps</u> K . On désigne alors l'anneau de matrices d'ordre n sur K par K_n .

<u>Theorème I</u>

<u>K_n est un anneau simple</u>, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'autres idéaux bilatères que (o) et K_n lui-même

En effet, si $\mathfrak{A}$ est un tel idéal, et a un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{A}$, soit :

$$a = \sum_{ij} \alpha_{ij}\, e_{ij}$$

soit $\alpha_{\lambda\mu} \neq 0$, $\mathfrak{A}$ contient aussi :

$$\alpha_{\lambda\mu}^{-1}\, e_{h\lambda}\, a\, e_{\mu k} = e_{hk}$$

quelsque soient h et k, donc $\mathfrak{A} = K$.

Montrons que K_n peut être décomposé en une somme directe d'idéaux à gauche minima . Il est facile d'avoir ici une telle décomposition

$\ell_1 = (\, e_{11}\ \ e_{21}\ \ldots\ldots e_{n1}\,)$ est un tel idéal en effet, $e_{hk}\, e_{i1} = \begin{cases} o & \text{si } k \neq i \\ e_{h1} & \text{si } k = i \end{cases}$ donc $e_{hk}\, e_{i1} \in \mathcal{L}_1$

par suite aussi :

$$x\,\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_1 \quad \text{quelqque soit } x \in K_n$$

D'autre part, $\mathcal{L}_1$ est minimum, car si $a \subset \mathcal{L}_1$ et $a \neq o$

soit $a = \sum_i \alpha_i\, e_{i1}$

et si $\alpha_\lambda \neq o$ $\mathcal{L}_1$ contient aussi

$$\alpha_\lambda^{-1}\, e_{h\lambda}\, a = e_{h1} \text{ quel que soit } h$$

Donc tout élément a de $\mathcal{L}_1$ engendre tout l'idéal, ce qui montre que $\mathcal{L}_1$ est minimum. Même raisonnement pour

$$\mathcal{L}_k = (e_{1k}\ \ e_{2k}\ \ \ldots\ldots e_{nk})$$

d'où il suit que :

$$K_n = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$$

somme directe de n idéaux à gauche.

B.- Théorème fondamental de Macclagan-Wedderburn

4.- L'intérêt des anneaux de matrices réside dans le théorème fondamental de Macclagan-Wedderburn : Toute algèbre simple est isomorphe à un anneau de matrices sur un corps.

(Rappel de la définition d'une algèbre simple : anneau sans radical satisfaisant à la condition minimale pour les idéaux à gauche, et n'ayant pas d'autre idéal bilatère que o et l'anneau lui-même).

La démonstration que nous allons donner, dûe à Artin, et non publiée, se fait en deux étapes.

5.- Première partie de la démonstration

Définition : Un anneau σ avec élément unité est dit posséder un système d'unités matricielles e_{ij} ($i, j = 1, 2..n$) si les e_{ij} sont dans σ et satisfont aux conditions

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} e_{ij}e_{kl} = 0 \quad \text{si} \quad j \neq k \\ e_{ij}\, e_{jk} = e_{ik} \\ 1 = e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn} \end{cases}$$

Théorème.- Si un anneau possède un système d'unités matricielles e_{ij} il est isomorphe à l'anneau des matrices d'ordre n à coefficients dans le sous-anneau $\mathcal{K}$ de σ composé des éléments de σ permutables avec tous les e_{ij}.

Formons les éléments de $\mathcal{K}$. Soit $x \in \sigma$. Posons :

$$y\,(x) = \sum_i e_{i1}\, x\, e_{1i}$$

On a $\quad y\, e_{jk} = e_{j1}\, x\, e_{1k} = e_{jk}\, y$

Donc $\quad y \in \mathcal{K}$. Inversement si $y \in \mathcal{K}$ on a

$$\sum_i e_{i1}\, y\, e_{1i} = \sum_i e_{ii}\, y = y$$

Ceci posé, à $x \in \sigma$ faisons correspondre la matrice à coéfficients dans $\mathcal{K}$

$$\overline{x} = (\, a_{ij}\,)$$

où $\quad a_{ij} = y\,(\, e_{1i}\, x\, e_{j1})$

On a $\quad \overline{x + x'} = \overline{x} + \overline{x}'$

D'autre part,

$$y\,(\, e_{1i}\, x\, e_{j1}\,) = \sum_\lambda e_{\lambda i}\, x\, e_{j\lambda}$$

Donc $\quad y\,(\, e_{1i}\, x\, x'\, e_{j1}\,) = \sum_\lambda e_{\lambda i}\, x\, x'\, e_{j\lambda} = \sum_{\lambda\mu} e_{\lambda i}\, x\, e_{\mu\lambda}\, e_{\lambda\mu}\, x'\, e_{j\lambda}$

$$= \sum_\mu y\,(\, e_{1i}\, x\, e_{i1}\,)\; y\,(\, e_{1\mu}\, x'\, e_{j1}\,)$$

et par suite $\overline{\overline{x}\,\overline{x}'} = \overline{x}.\overline{x}'$

Inversement, soit $M = (a_{ij})$ une matrice de l'anneau des matrices sur $\mathfrak{R}$. Il existe un seul élément x de σ tel que $\overline{x} = M$. En effet, si on écrit l'équation

$$\sum_{\lambda} e_{\lambda i} . x\, e_{j\lambda} = a_{ij}$$

on en tire

$$a_{ij}\, e_{ij} = e_{\lambda i}\, x\, e_{jj}$$

$$\sum_{ij} a_{ij}\, e_{ij} = \sum_{ij} e_{ii}\, x\, e_{jj} = x$$

Donc $x \to \overline{x}$ est une isomorphie.

6.- <u>Deuxième partie de la démonstration</u>

Soit maintenant γ une algèbre simple . Nous allons former un système d'unités matricielles dans γ. D'après le 1er thèorème de Macclagen-Wedderburn, elle se décompose en une somme directe de n idéaux à gauche minima

$$\gamma = \sum \gamma e_i$$

avec $e_i e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ e_i & \text{si } i = j \end{cases}$

$$1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

Nous poserons

$$\gamma_{ij} = e_i\, \gamma\, e_j$$

C'est un module de γ. (C'est même un sous-anneau, mais si $i \neq j$ le produit de deux nombres quelconques est o)

Nous aurons à envisager des <u>produits</u> de modules . Il est clair, de façon générale, que si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modules d'un anneau γ. Les sommes de produits $\Sigma\alpha\beta,\ \alpha\subset\mathfrak{M}\ \ \beta\subset\mathfrak{N}$ définissent un nouveau module qu'on désigne par $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Ce produit est associatif et distributif .

A) Etude de γ_{ii}. D'une façon plus générale, soit γ un anneau, e un idempotent de γ et considérons le module $e\gamma e$ qui est évidemment un sous-anneau de γ, et n'est pas nul puisqu'il contient $e^3 = e \neq o$. e est d'ailleurs unité de $e\gamma e$

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal à gauche de $e\gamma e$. On a

$$\mathfrak{m} = e\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\,e$$

d'où $$\gamma\mathfrak{m} = \gamma e\,\mathfrak{m}$$

et $$e.\gamma\mathfrak{m} = e\,\gamma\, e.\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

la correspondance $\mathfrak{m} \rightleftarrows \gamma\mathfrak{m}$ est donc biunivoque . Donc, si γ satisfait à la condition du minimum (ou du maximum) pour les idéaux à gauche, il en est de même de $e\gamma e$.

De plus $$\gamma\mathfrak{m}^2 = \gamma\mathfrak{m}.e\gamma\mathfrak{m} = \gamma\mathfrak{m}.\gamma\mathfrak{m} = (\gamma\mathfrak{m})^2$$

donc, si γ est ~~xx~~ semi-simple, $e\gamma e$ est aussi semi-simple.

Supposons maintenant que γe soit idéal à gauche minimum

On a $$\gamma\mathfrak{m} = \gamma\mathfrak{m}\,e \subset \gamma e$$

Donc $\gamma\mathfrak{m} = 0 \qquad \mathfrak{m} = e\gamma\mathfrak{m} = 0$, ou $\gamma\mathfrak{m} = \gamma e \qquad \mathfrak{m} = e\gamma e$

Donc les seuls idéaux à gauche de $e\gamma e$ sont o et $e\gamma e$

Par suite, $e\gamma e$ est un corps , car si on considère un élément a de $e\gamma e$, l'idéal à gauche engendré par a est $\neq$ o, donc est identique à $e\gamma e$. Par suite, il existe un b tel que

$$b\,a = e \qquad b \subset e\gamma e$$

Autrement dit, il existe un inverse à gauche et une unité donc $e\gamma e$ est bien un corps $\mathfrak{K}$.

b) Construction des e_{ij}

Supposons maintenant γ simple.

On a $\gamma_{ij}\gamma_{jk} = e_i\gamma e_j\gamma e_k$

Mais $\gamma e_j \gamma$ est idéal bilatère dans γ, et différent de o puisqu'il contient $e_j^3 = e_j \neq o$ donc est $\underline{=} \gamma$

$$\gamma_{ij}\gamma_{jk} = \gamma_{ik} \qquad \gamma_{ij}\gamma_{kl} = e_i\gamma e_j e_k \gamma e_l = o$$
$$(j \neq k)$$

On a $\gamma_{ii} \neq o$

Donc, $\gamma_{ij}\gamma_{ji} = \gamma_{ii} \neq o$

et par suite $\gamma_{ij} \neq o$ quels que soient i et j.

Posons, $e_1 = e_{11}$, choisissons dans γ_{i1} (i=2,...n) un élément $e_{i1} \neq o$. On a

$$e_{i1} \in e_i \gamma e_1$$

ou $$e_{i1} = e_i \alpha e_1$$

Donc, $$e_i e_{i1} = e_i \alpha e_1 = e_{i1}$$

$$\gamma e_i e_{i1} = \gamma e_{i1} \neq o$$

De plus, $$\gamma e_{i1} = \gamma e_i \alpha e_1 \subset \gamma e_1$$

et γe_{i1} est <u>idéal à gauche</u> dans γe_1, donc

$$\gamma e_{i1} = \gamma e_1$$

ou $$\gamma e_i e_{i1} = \gamma e_1 \quad e_1\gamma e_i . e_{i1} = e_1 \gamma e_1 = \gamma_{11}$$

ou $$\gamma_{1i} e_{i1} = \gamma_{11}$$

Il existe donc dans γ_{1i} un e_{1i} tel que :

$$e_{1i} e_{i1} = e_{11}$$

Posons $\quad e_{ij} = e_{i1} e_{1j}$

On a $\quad e_{ij} \in \gamma_{i1} \gamma_{1j} = \gamma_{ij}$

Puis

$$(j \neq k) \qquad e_{ij} e_{kl} \in \gamma_{ij} \gamma_{kl} = 0$$

$$e_{ij} e_{jk} = e_{i1} e_{1j} e_{j1} e_{1k} = e_{i1} e_{11} e_{1k}$$

Mais $\quad e_{ij} e_{11} = e_{i}\alpha e_{11} = e_{i1}$

Donc $\quad e_{ij} e_{jk} = e_{ik}$

Par suite

$$e_{ii}^2 = e_{ii}$$

et comme $e_{ii} \in \gamma_{ii}$, le seul idempotent du corps γ_{ii} est e_i donc $e_{ii} = e_i$ et par suite

$$1 = e_{11} + e_{22} + \dots\dots + e_{nn}$$

Les conditions (I) sont toutes vérifiées. D'après le thèorème d'Artin, γ est isomorphe à l'anneau des matrices d'ordre n sur le sous-anneau $\mathfrak{K}$ des nombres de γ permutables avec les e_{ij}. Ici il est facile de voir que $\mathfrak{K}$ est isomorphe à γ_{11}, donc est un <u>corps</u>. En effet, si

$$y \in \mathfrak{K} \subset \gamma$$

$$\bar{y} = e_{11} y e_{11} \in \gamma_{11}$$

et à yy' correspond $\bar{y}\,\bar{y}'$, à y + y', $\bar{y} + \bar{y}'$

D'autre part, on a pour tout $\bar{y} \subset \gamma_{11}$, en résolvant

$$\bar{y} = e_{11} y e_{11}$$

On en tire $\quad \sum e_{i1} \bar{y} e_{1i} = \sum e_{i1} y e_{1i} = \sum e_{ii} y = y$

et la valeur obtenue de y est bien dans $\mathfrak{K}$. Donc il y a bien isomorphie entre $\mathfrak{K}$ et γ_n, ce qui démontre complètement le deuxième théorème de Wedderburn . Le centre $\mathfrak{Z}$ de γ est contenu dans $\mathfrak{K}$ d'après la définition de $\mathfrak{K}$.

En résumé, la recherche de la structure des algèbres semi-simples est ramenée , grâce aux deux théorèmes de Wedderburn, à celle~~s~~ des <u>corps gauches</u>

C.- SYSTEMES HYPERCOMPLEXES

7.- <u>Définition</u>. - Soit P un corps commutatif . On appelle <u>système hypercomplexe sur P</u> un anneau σ qui est un P-module et dont les éléments sont permutables avec ceux de P ; autrement dit,

$$\sigma = b_1 P + b_2 P + \dots + b_n P$$

tout élément de σ ayant la forme

$$a = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \dots + b_n \alpha_n$$

avec $\alpha_i \in P$ et les b_i étant linéairement indépendants par rapport à P (Si $a = o$ ~~si~~ $\alpha_i = o$ quel que soit i)

n est le <u>degré</u> par rapport à P de σ, les b_i formant une <u>P-base</u> . Tout système de n formes indépendantes en b_i est une autre P-base de σ . La loi de multiplication des b_i ~~est une autre P-base de~~ donne celle de tous les nombres de σ. Elle doit seulement satisfaire à la condition d'associativité $(b_\lambda b_\mu) b_\nu = b_\lambda (b_\mu b_\nu)$

8.- <u>Produit de deux systèmes hypercomplexes</u>

Soient $\sigma_1 = b_1 P + b_2 P + \dots + b_m P$

$\sigma_2 = c_1 P + c_2 P + \dots + c_n P$

deux systèmes hypercomplexes sur P .

On appelle $\sigma_1 \times \sigma_2 = \sum_{\lambda\mu} b_\lambda c_\mu P$

leur produit . C' est un sytème hypercomplexe ayant pour base les $b_\lambda c_\mu$ et où les b_λ sont échangeables avec les c_μ

$$b_\lambda c_\mu b_\nu c_\rho = (b_\lambda b_\nu).(c_\mu c_\rho) = (c_\mu c_\rho).(b_\lambda b_\nu)$$

Tout élément du produit $\sigma_1 \times \sigma_2$ s'écrit

$$\sum \alpha_{\lambda\mu} b_\lambda c_\mu = \sum' b'_\mu c_\mu = \sum b_\lambda c'_\lambda$$

$b'_\mu \in \sigma_1$ $c'_\lambda \in \sigma_2$ et inversement . Donc, $\sigma_1 \times \sigma_2$ est indépendant des P-bases choisies . On a

$$\sigma_1 \times \sigma_2 = \sigma_2 \times \sigma_1 \qquad (\sigma_1 \oplus \sigma_2) \times \sigma_3 = \sigma_1 \times \sigma_3 \oplus \sigma_2 \times \sigma_3$$

$$\sigma_1 \times (\sigma_2 \times \sigma_3) = (\sigma_1 \times \sigma_2) \times \sigma_3$$

Comme cas particuliers de systèmes hypercomplexes, figurent les surcoprs finis (commutatif ou non) de P ?

Si Λ est un tel surcorps on a

(1) $\sigma_1 \times \Lambda = b_1 \Lambda + b_2 \Lambda + \ldots + b_m \Lambda = \Lambda b_1 + \Lambda b_2 + \ldots + \Lambda b_m$

au lieu de $\sigma \times \Lambda$ on écrit aussi σ_Λ . La définition (1) s'applique encore lorsque Λ est un corps infini. On désigne encore l'anneau obtenu par σ_Λ ou $\sigma \times \Lambda$ (ce qui n'est plus un système hypercomplexe sur P).

Un système hypercomplexe ou un produit de tels systèmes satisfait toujours aux conditions maximale et minimale

9.- Systèmes semblables

Soit γ un système simple $\mathfrak{K}$ le corps formé des éléments de γ permutables avec les e_{ij} et P le corps premier ~~contenu~~

(ou plus généralement un sous-corps commutatif de $\mathfrak{K}$) contenu dans $\mathfrak{K}$, on peut écrire

$$\gamma = \mathfrak{K} \times P_n$$

Tous les systèmes simples pour lesquels les corps $\mathfrak{K}$ correspondants sont isomorphes, sont dits <u>semblables</u> ; si γ et γ' sont deux tels systèmes, on écrit

$$\gamma \sim \gamma'$$

En particulier on a $\gamma \sim \mathfrak{K}$

La notion de produit de systèmes hypercomplexes permet d'établir dans quelle mesure la structure d'un système simple γ dépend de celle du corps cprrespondant $\mathfrak{K}$, en étudiant la manière dont se modifie γ quand on remplace $\mathfrak{K}$ par un surcorps Σ de $\mathfrak{K}$, autrement dit, quand on fait le produit $\gamma \times \Sigma$

On est donc amené à étudier les <u>produits de systèmes simples</u>. On obtient les résultats suivants :

IO.- <u>a) Produit de deux corps commutatifs γ et Σ sur P</u> (γ fini)

Si γ est de plus <u>séparable</u> (ses éléments racines d'équations irréductibles dans P et sans racines multiples) soit Θ un ~~polynome~~ élément primitif de γ $[\gamma = P + P\Theta + \dots\dots + P\Theta^{n-1}]$ $\varphi(z)$ le polynome irréductible de $P[z]$ dont Θ est une racine . Si $\varphi(z)$ se décompose dans $\Sigma[z]$ en r polynomes irréductibles $\varphi_1 \dots \varphi_r$, $\gamma \times \Sigma$ est <u>la somme directe des r surcorps de Σ engendrés par les racines de ces polynomes</u>

Si γ n'était pas séparable, $\gamma \times \Sigma$ pourrait avoir un radical .

II.- b) <u>Produit d'un corps non commutatif γ de degré fini par rapport à P, par un corps commutatif Σ.</u>

On suppose que le centre Z de γ est un surcorps <u>séparable</u> de P.

<u>Le centre de $\gamma \times \Sigma$ n'est autre que $Z \times \Sigma$</u>. En effet, supposons d'abord Σ fini par rapport à P. Alors :

$$\Sigma = \sigma_1 P + \ldots\ldots + \sigma_n P \qquad \sigma_i \text{ P-base de } \Sigma$$

et $$\gamma \times \Sigma = \sigma_1 \gamma + \ldots\ldots + \sigma_n \gamma$$

Soit a un élément du centre de $\gamma \times \Sigma$

$$a = \sigma_1 u_1 + \ldots\ldots + \sigma_n u_n \qquad u_i \subset \gamma$$

a doit être commutatif avec tous les éléments de $\gamma \times \Sigma$ en particulier avec tous les éléments de γ. Si $v \in \gamma$ est quelconque, on doit avoir

$$\sigma_1 u_1 v + \ldots\ldots + \sigma_n u_n v = \sigma_1 v u_1 + \ldots\ldots + \sigma_n v u_n$$

d'où $\quad u_i v = v u_i$ quels que soient i et v

donc $\quad u_i \in Z, \quad a \in Z \times \Sigma$. Inversement, si a est un nombre quelconque de $Z \times \Sigma$, soit

$$\Sigma \times Z = z_1 \Sigma + \ldots\ldots + z_p \Sigma \qquad z_i \text{ P-base de } Z$$

$$a = z_1 \sigma_1 + \ldots\ldots + z_p \sigma_p$$

alors si $\quad v = \sigma'_1 u_1 + \ldots\ldots + \sigma'_q u_q \qquad u_q$ P-base de γ

est un nombre quelconque de $\gamma \times \Sigma$, on a évidemment

$$a v = \Sigma \sigma_i \sigma'_j z_i u_j = \Sigma \sigma'_j \sigma_i u_j z_i = v a$$

Si maintenant, Σ est <u>infini algébrique</u> par rapport à P soit a un élément du centre de $\gamma \times \Sigma$. On peut écrire

$$a = u_1 \sigma_1 + \ldots\ldots + u_p \sigma_p \qquad u_i \text{ P-base de } \gamma$$

Mais $\sigma_1 \ldots \sigma_p$ engendrent un corps fini algébrique sur P, soit

($P \subseteq \Sigma'_1 \subseteq \Sigma$) . Soit $\lambda_1 \dots \lambda_n$ une P-base de Σ_1 . On peut écrire

$$a = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \qquad v_i \subset \gamma$$

et on montre comme ci-dessus que

$$a \subset Z \times \Sigma_1 \subset Z \times \Sigma$$

et inversement, la démonstration ci-dessus établit que tout nombre de $Z \times \Sigma$ fait partie du centre .

On montre ensuite (voir Van der Waerden, Bd II p.I75) que <u>tout idéal bilatère de $\gamma \times \Sigma$ est engendré par un idéal bilatère de $Z \times \Sigma$,</u> c'est à dire que si $\mathfrak{a}$ est idéal bilatère de $\gamma \times \Sigma$ il existe q nombres $l_1\, l_2 \dots l_q$ de $Z \times \Sigma$ tels que $\mathfrak{a} = (l_1\, l_2 \dots l_q)$

(Tout nombre de $\mathfrak{a}$ est de la forme $l_1 \delta_1 + \dots + l_q \delta_q \quad \delta_q \subset \gamma$)

Si un idéal bilatère est simple dans $\gamma \times \Sigma$ l'idéal correspondant de $Z \times \Sigma$ est aussi simple et inversement .

Celà étant, $Z \times \Sigma$ n'a pas de radical , sans quoi le radical, idéal bilatère, serait engendré par un idéal bilatère nilpotent de $\Sigma \times Z$ ce qui est impossible d'après a)

Donc, $\gamma \times \Sigma$ est semi-simple . D'après a) son centre $Z \times \Sigma$ se décompose en une somme directe de r ($r \leq n$ = degré de Z sur P) corps commutatifs sur Σ . <u>Donc $\gamma \times \Sigma$ se décompose en une somme directe de r algèbres simples</u>. En particulier <u>si $Z = P$, $r = 1$, $\gamma \times \Sigma$ est une algèbre simple isomorphe à un anneau complet de matrices dans un corps $\mathfrak{K} \supset \Sigma$ de degré fini sur Σ</u> .

Si on prend , en particulier, pour Σ le corps Ω algébriquement fermé sur P, $\mathfrak{K}$ est un corps(gauche) de degré fini sur Ω : mais un tel corps est nécessairement $\equiv \Omega$. Car si x est un de ses éléments, on a

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p \qquad \lambda_i \subset \Omega$$

x satisfait à une équation de degré p + 1 à coefficients dans Ω .

$$f(x) \equiv \alpha_0 x^{p+1} + \alpha_1 x^p + \dots + \alpha_p x = 0 \quad \alpha_i \text{ non tous nuls}$$

Mais f (x) se décompose en facteurs linéaires dans $\Omega[x]$ et comme $\mathfrak{K}$ n'a pas de diviseurs de o, x s'annule un de ces facteurs, donc est dans Ω .

Donc $\Gamma \times \Omega$ est une algèbre de matrices d'ordre m à coefficients dans Ω . Son degré sur Ω est donc un carré m^2 . Comme c'est aussi le degré de Γ sur Z on voit qu'un corps gauche a toujours un degré carré parfait par rapport à son centre . m est l'indice du corps .

I2.- c) Produit de deux corps gauches finis Γ et Σ de centres Z et Z' (Z, Z' séparables)

On voit comme ci-dessus que $Z \times Z'$ est le centre de $\Gamma \times \Sigma$ D'autre part, on montre aussi que tout idéal bilatère de $\Gamma \times \Sigma$ est engendré par un idéal bilatère de $Z \times Z'$. Donc $\Gamma \times \Sigma$ est somme directe d'algèbres simples en nombre égal au nombre de corps dont la somme directe forme $Z \times Z'$

I3.- <u>d) Produit de deux algèbres simples</u>

On a $\Gamma = \mathfrak{K} \times P_r$ $\quad \Sigma = \mathfrak{K}' \times P_s$

d'où $\Gamma \times \Sigma = \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}' \times P_r \times P_s$

On a $\quad P_r \times P_s = P_{rs}$

En effet, P_r est engendré par les r^2 quantités c_{ij}, P_s par les s^2 quantités c'_{kl} donc P_{rs} par les $r^2 s^2$ quantités

$$c_{ij,kl} = c_{ik}\, c'_{jl}$$

avec
$$\begin{aligned} c_{ij,kl}\, c_{mn,pq} &= c_{ik}\, c'_{jl}\, c_{mp}\, c'_{nq} \\ &= c_{ik}\, c_{mp}\, c'_{jl}\, c'_{nq} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq m \text{ ou } l \neq n \\ c_{ip}\, c'_{jq} = c_{ij,pq} \quad \text{si } k = m,\ l = n \end{cases} \end{aligned}$$

Soit α le numéro d'une paire ij, allant de 1 à rs, β celui de la paire kl et posons $c_{ij,kl} = c_{\alpha\beta}$

On a
$$c_{\alpha\beta}\, c_{\gamma\delta} = \begin{cases} 0 \text{ si } \beta \neq \gamma \\ c_{\alpha\delta} \text{ si } \beta = \gamma \end{cases}$$

<u>Donc les $c_{\alpha\beta}$ sont un système d'unités matricielles</u>.

$P_r \times P_s$ est donc isomorphe à P_{rs}

Si $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}'$ sont finis sur P, on a, d'après c)

$$\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}' = K'_{r'} \oplus K''_{r''} \oplus \dots$$

d'où
$$\begin{aligned} \Gamma \times \Sigma &= (K'_{r'} \oplus K''_{r''} \oplus \dots) \times P_{rs} \\ &= K'_{r'rs} \oplus K''_{r''rs} \oplus \dots \end{aligned}$$

En particulier supposons que $P = \mathcal{Z}$ centre de $\mathfrak{K}$, et de plus que ($s = 1$) $\Sigma = \mathfrak{K}'$ soit un corps algébrique commutatif (fini ou infini) sur $\mathcal{Z}$. Alors, d'après b)

$$\mathfrak{K} \times \Sigma = K'_{r'} \qquad K' \supset \Sigma$$

$$\gamma \times \Sigma = K'_{r'r}$$

donc une algèbre simple γ reste simple par extension algébrique Σ du centre Z . Le corps associé $\mathfrak{K}$ devient une algèbre simple, anneau complet de matrices d'ordre r' dans un corps $\mathfrak{K}' \supset \Sigma$ et γ devient un anneau complet de matrices d'ordre r r' dans le même corps .

On voit en particulier que toutes les algèbres semblables se comportent de la même manière lorsqu'on fait le produit par un corps Σ .

On peut continuer en prenant une extension T de Σ (qui est le nouveau centre) $\mathfrak{K}'$ devient un anneau de matrices d'ordre r'' dans $\mathfrak{K}'' \supset T$, $\gamma \times T$ devient un anneau de matrices d'ordre rr'r" dans le même corps .

Lorsqu'en continuant ainsi, on arrive à Ω , corps algébriquement fermé, $\gamma \times \Omega$ devient un anneau de matrices d'ordre mr dans Ω (m indice de $\mathfrak{K}$ sur Z)

En général, il existe un corps $T \subset \Omega$ pour lequel $\mathfrak{K} \times T$ est un anneau de matrices dans T lui-même

$$\mathfrak{K} \times T = \cancel{T \times P_n}\ T_n$$ (T pris comme corps de base)

alors si U est un surcorps de T , on a

$$\mathfrak{K} \times U = \mathfrak{K} \times T \times U = T_n \times U \cancel{\times P_n} = U_n \cancel{\times P_n}$$

C'est encore un anneau de matrices de même ordre dans U , en particulier si U = Ω on voit que n = m . T est dit corps de décomposition de $\mathfrak{K}$ (et de γ et en général de toutes les algèbres semblables à $\mathfrak{K}$) . Ils jouent un grand rôle dans l'étude des corps gauches .

RECTIFICATIONS

1.- La démonstration donnée au paragraphe 4, indiquée comme inédite, se trouve à quelques détails près, dans un mémoire d'Artin publié dans les "Abhandlungen" du séminaire de Hambourg (I926) .

2.- Pour se conformer à la terminologie adoptée dans les conférences suivantes, remplacer partout le mot degré par rang lorsqu'il s'agit d'un système hypercomplexe ou d'un corps non commutatif .