Séminaire de Mathématiques

R. de Possel

Grandeurs idempotentes

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 1 (1933-1934), exp. n° 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1933-1934__1__A3_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Année 1933-1934

Théorie des Groupes et des Algèbres

C.- GRANDEURS IDEMPOTENTES

Exposé fait par M. de POSSEL, le 11 décembre 1933

I.- DEFINITIONS

1.- ANNEAUX .- Nous allons étudier la structure des anneaux ou systèmes d'éléments dans lesquels il existe une addition toujours commutative , et une multiplication, en général non commutative, et distributive par rapport à l'addition . L'anneau formera un groupe abélien, ou module vis à vis de l'addition; il y aura donc un zéro , mais pas nécessairement une unité .

Plus précisément, nous nous bornerons à certains anneaux, satisfaisant à des conditions générales et toujours vérifiées en particulier par les "systèmes hypercomplexes" qui seront définis plus tard .

2.- OPERATEURS .- Nous supposerons toujours qu'à l'anneau σ est attaché un certain ensemble d'opérateurs dont les uns, λ ..... opèrent à gauche, et les autres, μ ..... opèrent à droite . Ainsi, si $a \in \sigma$, les symboles λa, $a\mu$ seront des éléments de σ . Le cas où il n'y a pas d'opérateurs se confond avec celui où il n'y a que l'opérateur unité . Nous supposons que les opérateurs λ ...., μ .... vérifient les conditions

$$(1)\quad \begin{array}{ll} \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b & (a+b)\mu = a\mu + b\mu \\ \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) & (ab)\mu = a(b\mu) = (a\mu)b \end{array}$$

mais nous ne supposons rien entre les opérateurs.

3.- IDEAUX.- Un idéal à gauche $\mathfrak{r}$ dans σ est un sous-anneau de σ qui admet comme opérateurs :

tous les éléments de σ à gauche

λ .... à gauche

μ ..... à droite

Autrement dit, si $a \in \mathfrak{a}$, $r \in \sigma$, ~~on a~~ ra, λa ...., $a\mu$..... sont des éléments de $\mathfrak{a}$.

<u>Un idéal à droite</u> a même définition en prenant les éléments de σ comme opérateurs à droite .

Un système d'éléments qui est idéal à gauche et à droite est appelé <u>idéal bilatère</u> .

Pour que $\mathfrak{a}$ soit idéal à gauche, il faut et il suffit

I°) que $\mathfrak{a}$ forme un groupe abélien pour l'addition, autrement dit que $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{a}$ entraine $a-b \in \mathfrak{a}$;

2°) que ra, $(r \in \mathfrak{a})$, λa,...., $a\mu$ .... appartiennent à $\mathfrak{a}$

La somme , le produit de deux idéaux à gauche sont encore des idéaux à gauche d'après les relations (1). A noter l'inégalité $\sigma\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ (si σ possède une unité à gauche, c'est l'égalité qui a lieu).

Nous considérerons souvent des anneaux vérifiant l'une des conditions suivantes :

Il n'existe pas de suite infinie croissante d'idéaux à gauche (à droite)

Il n'existe pas de suite infinie décroissante d'idéaux à gauche (à droite)

Ce sont les conditions appelées souvent "Teilerkettensatz" et "Vielvachenkettensatz".

Nous ~~appellerons~~ dirons dans cet exposé <u>condition maximale</u>

à gauche (ou à droite) pour la première , et condition minimale à gauche (ou à droite) pour la deuxième.

II.- RADICAL D'UN ANNEAU

4.- L'idéal $\mathfrak{a}$ est dit nilpotent si une puissance de $\mathfrak{a}$ est l'idéal (o).

Le théorème que nous avons en vue est le suivant : L'ensemble réunion des éléments de tous les idéaux nilpotent à gauche et à droite, ensemble nommé radical, est un idéal bilatère . Si σ satisfait à la condition maximale à gauche (ou à droite) , ce radical est lui-même nilpotent.

Pour cela, on démontre d'abord que la somme de deux idéaux à gauche nilpotents l_1 et l_2 ($l_1^n = l_2^m = (o)$) est nilpotent . Il suffit de développer $(l_1 + l_2)^{n+m-1}$

Puis on montre que tout idéal à gauche (ou à droite) nilpotent est contenu dans un idéal bilatère nilpotent . En effet, l est contenu dans l'idéal bilatère $l + l\sigma$ qui est nilpotent comme somme de deux idéaux nilpotents.

$$(l\sigma)^p = l(\sigma l)^{p-1}\sigma \subseteq l^p\sigma = (o)$$

Soient maintenant w_1 et w_2 deux éléments du radical c'est-à-dire contenus respectivement dans des idéaux nilpotents. Ils sont aussi contenus dans des idéaux bilatères nilpotents $\mathfrak{w}_1$ et $\mathfrak{w}_2$; donc $w_1 - w_2$ est contenu dans $\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2$ qui est un idéal nilpotent . Les autres conditions sont évidemment réalisées : rw_1 , $w_1 r$ ($r \in \sigma$), λw_1

w, μ sont contenus dans $\mathfrak{W}_1$; donc le radical est idéal bilatère

Si σ vérifie la condition maximale, il existe un idéal bilatère nilpotent $\mathfrak{r}$ qui n'est contenu dans aucun autre plus grand . Si l'idéal bilatère nilpotent $\mathfrak{a}$ n'était pas contenu dans $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{r}$ serait plus grand que $\mathfrak{r}$ et nilpotent, impossible . Donc $\mathfrak{r}$ est le radical .

Signalons que le quotient d'un anneau par son radical ~~est lui-même~~ ou anneau des classes de restes par rapport au radical, est lui-même un anneau sans radical (Cf. Van der Werden BdII, p. I55)

~~On sait peu de chose~~ sur les anneaux avec radicaux, peu (~~Voir~~ Artin : Zur Theorie der Hyperkomplexen Zahlen. Abhandl , Hamburg Sem. Bd 5, I927).

Nous allons étudier la structure de l'anneau sans radical dûe à Maclagan Wedderburn.

III.- DECOMPOSITION D'UN ANNEAU SANS RADICAL

5.- Définition .- Un idéal à gauche dans σ est dit simple s'il ne contient aucun autre idéal que lui-même et l'idéal (o).

Nous dirons qu'un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ est la somme directe des idéaux à gauche $\mathfrak{a}_1 \ldots\ldots \mathfrak{a}_n$

$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ (notation dûe à Dickson)

si en considérant $\mathfrak{a}$ et les $\mathfrak{a}_i$ comme des groupes abéliens vis à vis de l'addition, $\mathfrak{a}$ est le produit direct des $\mathfrak{a}_i$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$0 = a_1 + \dots\dots + a_n \quad (a_i \in \mathfrak{a}_i) \text{ entraine } a_1 = 0; \dots . a_n = 0$$

Dans le cas de deux termes, il suffit que $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ n'aient pas d'autre élément commun que 0, car $0 = a_1 + a_2$ entraine que a_1 et a_2 appartiennent au même idéal .

Soit une correspondance qui à tout élément a de l'idéal à gauche (à droite) $\mathfrak{a}$ fait correspondre un élément $\bar{a}$ de l'anneau $\mathfrak{o}$ .Nous dirons que c'est une homomorphie d'opérateurs à gauche (à droite) si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\overline{(a+b)} = \bar{a} + \bar{b}$$

(2) $\overline{ra} = r\bar{a} \quad (\overline{ar} = \bar{a}r)$

$$\overline{\lambda a} = \lambda \bar{a}; \dots, \quad \overline{a\mu} = \bar{a}\mu \dots$$

-A ~~On~~ remarquera qu'une telle correspondance n'est pas en général une homomorphie d'anneaux qui exigerait $\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}$

On voit que l'ensemble des éléments $\bar{a}$ décrit un idéal à gauche (à droite) $\mathfrak{a}$. En d'autres termes , il s'agit d'une homomorphie de groupes, avec comme opérateurs, à gauche, tous les éléments de $\mathfrak{o}$ et les λ, à droite les μ .

On vérifie aisément que l'ensemble des éléments de qui sont représentés sur le zéro constitue lui-même un idéal dans $\mathfrak{o}$. Si le zéro est seul représenté sur le zéro, l'homomorphie est une isomorphie .

6.- ~~ENONCE du~~ Ceci posé démontrons le théorème fondamental

Un anneau $\mathfrak{o}$ sans radical avec condition minimale pour les idéaux à gauche (à droite) possède une unité et est somme directe d'idéaux à gauche (à droite) simples

Réciproquement : un anneau avec unité qui est somme directe d'idéaux à gauche (à droite) simples, est un anneau sans radical et vérifie la condition minimale pour les idéaux à gauche (à droite)

Pour le démontrer, nous donnerons d'abord plusieurs lemmes .

7.- Lemme I : Soit ℓ un idéal à gauche, a $\in \sigma$ .Si à tout x $\in \ell$ on fait correspondre xa , la correspondance est une homomorphie d'opérateurs à gauche . Les éléments xa forment un idéal .

En effet, les conditions (3) se vérifient immédiatement en tenant compte de (1)

$$(x + y)\, a = xa + ya$$
$$(rx)\, a = r\, (xa)$$
$$(\lambda x)\, a = \lambda\, (xa)\ .\ (x\mu)a = x\,(a\mu)$$

8.- Lemme II : Par une homomorphie d'opérateurs, un idéal à gauche simple ℓ , est représenté sur le σ ou bien l'homomorphie est une isomorphie

En effet, l'ensemble des éléments de ℓ qui sont représentés sur le zéro forment un idéal contenu dans ℓ , donc qui est (o) ou ℓ . Dans le premier cas , on a une isomorphie .

<u>9.- Définition.</u>- Un élément e est dit <u>idempotent</u> si

$$e^2 = e$$

<u>IO.- Lemme III.</u> : <u>Un idéal à gauche simple ℓ étant donné, ou bien il est nilpotent, et alors $\ell^2 = 0$, ou bien il contient un élément idempotent e, et l'on a</u>

$$\underline{\ell = \sigma e}$$

Supposons $\ell^2 \neq 0$. Il existe alors a dans ℓ tel que $\ell a \neq (0)$. Mais ℓa étant un idéal non nul contenu dans ℓ est identique à ℓ. a correspondance entre ℓ et ℓa est une isomorphie (lemme II) . Il existe donc e dans ℓ tel que

$$a = ea$$

On en déduit

$$ea = e^2 a$$

Donc , dans l'isomorphie précédente, les éléments e et e^2 sont menés sur le même élément, d'où $e = e^2$

L'idéal σe n'est pas nul puisqu'il contient $e^2 = e$ et il est contenu dans ℓ, donc égal à ℓ .

<u>11.- Lemme IV.-</u> <u>Si e est idempotent et si $\ell = \sigma e$ (pas nécessairement simple) σ est somme directe de ℓ et d'un autre idéal à gauche</u> .

$$\underline{\sigma = \ell \oplus \ell'}$$

<u>De plus</u> $\quad \underline{xe = x \text{ si } x \in \ell}$

$$\underline{x'e = 0 \text{ si } x' \in \ell'}$$

Ecrivons :

$$x = xe + (x - xe)$$

Les éléments xe forment l'idéal σe .

On vérifie immédiatement que les $\mathfrak{o} - \mathfrak{o}e$ forment un idéal à gauche $\mathfrak{o}e$. Enfin :

$$\cancel{\mathfrak{o}.e}\ \mathfrak{o}e\cdot e = \mathfrak{o}e \quad \text{et} \quad (\mathfrak{o} - \mathfrak{o}e) = 0$$

Le seul élément commun à l et l' ne peut être que le o ; la somme est directe .

<u>I2.- Démonstration du théorème fondamental</u>

$\mathfrak{o}$ vérifiant la condition minimale, contient un idéal à gauche simple , non nul l_1

$\mathfrak{o}$ étant sans radical, l_1 contient un idempotent e_1 tel que $l_1 = \mathfrak{o}e_1$

et $\mathfrak{o} = l_1 \oplus l'$

De même l' contient un idéal à gauche simple l_2 avec

$$l_2 = \mathfrak{o}e_2$$

$$\mathfrak{o} = l_2 \oplus l \quad \text{et} \quad l' = l_2 \oplus l'' \quad \text{d'où } \mathfrak{o} = l_1 \oplus l_2 \oplus l''$$

la suite $\mathfrak{o}\, l'\, l''$ est décroissante, donc contient un idéal simple l_n

$$\begin{cases} \mathfrak{o} = l_1 \oplus l_2 \oplus \quad \ldots \oplus l_n \\ l_i = \mathfrak{o}e_i \\ e_i^2 = e_i \in l_i \end{cases}$$

<u>Existence d'une unité</u>

Posons $e_{12} = e_1 + e_2 - e_1 e_2$ d'où $e_{12}^2 = e_{12}$

e_{12} est un idempotent de $l_1 \oplus l_2$. Parmi ses multiples à gauche on trouve e_1 et e_2 donc tout élément de $l_1 \oplus l_2$ et l'on a :

$$l_1 \oplus l_2 = \mathfrak{o}e_{12} \qquad e_k\, e_{12} = 0 \quad \text{pour } k > 2$$

On opère de même avec e_{12} et e_3, d'où e_{123} tel que

$$l_1 \oplus l_2 \oplus l_3 = \sigma e_{123}$$

jusqu'à $e_{12\cdots n}$ avec $\sigma e = l_1 \oplus \cdots \oplus l_n = \sigma$ et $e^2 = e$

On en conclut d'après le lemme IV que e est unité à droite

Supposons que e ne soit pas unité à gauche. On aurait (lemme IV) avec changement de droite en gauche)

$$\sigma = e\sigma \oplus r \qquad re = o$$

Mais $r = re$ puisque e est unité à droite . Donc $r^2 = rer = (o)$

L'anneau étant sans radical, on en conclut $r = 0$ et $\sigma = e\sigma$

D'après le lemme IV avec changement de droite en gauche, e est unité à gauche .

<u>I3.- Démonstration de la réciproque</u>

<u>Lemme V</u> : Si σ a une unité 1, si $\sigma = l_1 \oplus \cdots \oplus l_n$ et si $1 = e_1 + \dots + e_n$, avec $e_i \in l_i$, on a

$$l_i = \sigma e_i, \quad e_i^2 = e_i \quad . \quad e_i e_n = 0 \text{ pour } i \neq k$$

Pour la démonstration cf. Van der Waerden, t.II p.I60

Supposons que σ soit somme directe de n idéaux à gauche simples comme on l'a vu en théorie des groupes avec opérateurs σ admet alors une <u>série de composition</u> de longueur n . Tout idéal à gauche (ou sous-groupe permis) possède une série de composition de longueur au plus n, ce qui oblige toute suite croissante ou décroissante d'idéaux à gauche, à n'avoir qu'un nombre fini de termes . Par conséquent, σ vérifie les conditions maximales et minimale à gauche .

Supposons de plus que σ possède une unité, et supposons qu'il existe un idéal nilpotent ℓ : $\ell^{\rho} = (o)$. On a alors

$$\sigma = \ell \oplus \ell'$$

D'après le lemme V il y a dans ℓ un élément idempotent e_1
Comme $\ell^{\rho} = 0$ on en conclut $e_1 = 0$ et $\ell = (o)$ - Impossible -
~~Nous arrivons à une contradiction~~.

IV.- DECOMPOSITION EN IDEAUX BILATERES

I4.- Supposons que l'on ait

$$\sigma = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$$

les $\mathfrak{a}_i$ étant des idéaux bilatères . Le produit $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k$ ($i \neq k$) est contenu dans $\mathfrak{a}_i$ et dans $\mathfrak{a}_k$, donc est nul puisque la somme est directe .

Si l'on considère les $\mathfrak{a}_i$ non plus comme idéaux dans σ mais comme anneaux avec les λ, μ .... comme opérateurs, mais non les éléments de σ , on vérifie aisément que tout idéal bilatère dans l'anneau $\mathfrak{a}_i$ est aussi un idéal bilatère dans σ. Par conséquent, si les $\mathfrak{a}_i$ sont des idéaux bilatères simples dans σ ce sont des anneaux indécomposables en idéaux bilatères . On dit que ce sont des anneaux simples

D'autre part, s'il y a une unité dans σ , la décomposition (3) en anneaux simples , est unique, contrairement à ce qui se passe pour la décomposition en idéaux unilatères. Pour le voir, il suffit d'écrire deux décompositions différentes, et l'on montre que chaque terme de l'une est contenu dans un terme de l'autre .

Si nous appliquons les théorèmes de décomposition à un anneau commutatif sans radical, vérifiant la condition minimale, nous obtenons une décomposition en anneaux simples dont chacun possède une unité . Mais tout anneau commutatif simple est un corps car les multiples ax de l'élément $a \neq 0$ forment un idéal non nul, donc qui est l'anneau lui-même .

L'anneau est donc une somme directe de corps (Théorème de Dedekind) dont les produits deux à deux sont nuls

15.- CENTRE

On appelle centre d'un anneau $\mathfrak{I}$ l'ensemble des éléments qui sont permutables avec tous les éléments de
c'est-à-dire $ax = xa$

On vérifie immédiatement que le centre est un sous-anneau admettant les opérateurs $\lambda \ldots$ $\mu \ldots$ commutatif et auquel appartient l'unité s'il y en a une .

On montre aisément que l'existence d'un radical non nul dans le centre entraine celle d'un radical non nul dans $\mathfrak{I}$.

Enfin, si $\mathfrak{I}$ est somme directe d'idéaux bilatères

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$$

le centre de $\mathfrak{I}$ est somme directe des centres des $\mathfrak{a}_i$.