SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

F. MARTY

Les fonctions ζ dans les algèbres hypercomplexes

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 1 (1933-1934), exp. n° 11, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1933-1934__1__A11_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Première année 1933-1934

Théorie des Groupes et des Algèbres

K. LES FONCTIONS ζ DANS LES ALGEBRES HYPERCOMPLEXES

Exposé fait par M.F.MARTY, le 14 Mai 1934

Références bibliographiques

1.- KÄTE HEY , Analytische Zahlentheorie in Systeme hyperkomplexen Zahlen . abh. Math. Semin. Hamburg Univ. -1929-

2.- ZORN MAX, Note zür Analytischen hyperkomplexen Zahlentheorie . Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 9 (1933) p.197.

1.- Soit γ un système semi-simple de nombres hypercomplexes sur le corps des nombres rationnels, I un ordre maximum de γ et $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ une base minimum de I dont les coefficients de multiplication sont e_{ik}.

Rappelons que deux idéaux à gauche $(\mathfrak{a}|$ et $(\mathfrak{b}|$ sont dits équivalents quand il y a un élément α, non diviseur de 0 tel que :

$$(\mathfrak{a}|\,\alpha = (\mathfrak{b}|$$

les idéaux équivalents à un idéal donné forment une classe $\mathfrak{k}$.

Dans I nous appelons fonction ζ la série

$$\zeta(s) = \sum_{(\mathfrak{a}|} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

et dans chaque classe d'idéaux à gauche nous construisons :

$$\zeta(s, \mathfrak{k}) = \sum_{(\mathfrak{a}| \to \mathfrak{k}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

$(\mathfrak{a}|$ parcourant soit tous les idéaux de I, soit tous les idéaux de $\mathfrak{k}$.

Ces séries sont convergentes. Cela se démontre indirectement en les représentant formellement comme un produit des fonctions ζ du centre, dont la convergence est connue. Provisoirement, donc les séries ζ que nous construisons apparaissent comme purement formelles, et les identités entre elles de même.

Nous allons voir par quelle suite de transformations Mlle Hey parvient à cette expression.

a) Passage aux systèmes simples :

<u>Théorème 1</u> : Si $\gamma = \sum_1^r \gamma^{(i)}$ est une représentation de γ en somme directe de systèmes simples, on a

$$\zeta(s) = \prod_1^r \zeta^{(i)}(s) \qquad \zeta(s, \mathfrak{K}) = \prod_1^r \zeta^{(i)}(s, \mathfrak{K}^{(i)})$$

Cela est évident si l'on fait appel à la décomposition des idéaux et des ordres de γ dans les $\gamma^{(i)}$.

b) Passage d'un système simple à son centre :

Lemme 1 : $\zeta(s)$ est le produit infini $(s)=$ de facteurs :

$$\zeta_{\mathring{\gamma}} = \sum_{\mathfrak{m}_{\mathring{\gamma}} | \mathring{\gamma}^{\nu}} \frac{1}{N\, \mathfrak{m}_{\mathring{\gamma}}^{\ s}}$$

où $\mathring{\gamma}$ parcourt tous les idéaux premiers bilatères de I tandis que $(\mathfrak{m}_{\mathring{\gamma}})$ parcourt tous les idéaux à gauche diviseurs d'une puissance quelconque de $\mathring{\gamma}$.

Car d'après un théorème de Speiser tout $(\mathfrak{m})$ est représentable d'une seule manière comme p.p.c.m. de $(\mathfrak{m}_{\mathring{\gamma}})$; d'autre part, il y a multiplication des normes, d'après la définition comme nombre des classes de restes .

Un facteur ζ_p est une série de Dirichlet sur les n rationnels. soit $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$, qui sera connue si on connait le nombre des $\mathfrak{n}$ attachés à $\mathfrak{p}$ qui ont une même norme .

Soit n le nombre des éléments de $\mathfrak{r}$ indépendants linéairement sur R , g^2 le nombre d'indépendents sur son centre .

Prenons un $\mathfrak{p}$ déterminé . Pour évaluer les a_n on étudie les $\mathcal{R}(\mathfrak{p}^m)$, anneaux de classes de restes relatifs aux $\mathfrak{p}^m$, représentables comme produit direct d'un système d'unités matricielles e_{ik} et du système des eléments d'un anneau complètement primaire $\Xi^{(m)}$, lui-même extension finie du système des classes de restes du centre module $\mathfrak{p}^m$, dont le degré est $\chi_{\mathfrak{p}}$.

Quand $\mathfrak{p}$ n'est pas un diviseur du discriminant, la méthode marche très bien car $\mathfrak{p}$ est identique à l'idéal premier du centre dans lequel il figure, et $\Xi^m = Z$ (mod. $\mathfrak{p}^m$) ; alors chaque idéal à gauche est idéal principal puissance d'idéal premier dans Ξ^m . Une étude de Mlle Hey que nous ne développerons pas conduit alors aux résultats suivants :

Soit $\lambda_{\mathfrak{p}}$ le maximum de i et k dans le système des éléments . Soit $\mathfrak{p}_Z$ l'idéal premier associé à $\mathfrak{p}$ dans le centre . Si $\mathfrak{p}$ ne divise pas le discriminant, on n'a pas $\mathfrak{p}^2 | \mathfrak{p}_z$, et on a $\lambda_{\mathfrak{p}} = g$ $\varkappa = 1$; on aboutit alors à l'expression :

$$\zeta(s) = \prod_{i=1}^{g} \zeta_z(gs - (i+1)) \cdot \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{p}_z} \frac{\prod_1^{g} \left[1 - N_z \mathfrak{p}_z^{-(gs-(i-1))}\right]}{\prod_1^{\lambda_{\mathfrak{p}}} \left[1 - N_z \mathfrak{p}_z^{-m_{\mathfrak{p}}(\lambda_{\mathfrak{p}} s - i + 1)}\right]}$$

Son intérêt est d'abord d'établir la convergence de $\zeta(s)$ pour le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 1$.

Ensuite elle permet d'établir assez facilement que $\zeta(s)$ ne dépend pas de $\mathcal{I}$, et est la même aussi pour les idéaux à droite et pour les idéaux à gauche .

2.- Nous nous proposons maintenant d'établir pour la fonction ζ une relation fonctionnelle entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$.

Pour cela, je vais d'abord indiquer quelques éléments du calcul des fonctions Θ à plusieurs variables ; et leur transformation fondamentale, qui permettra le passage de $\zeta(s)$ à $\zeta(1-s)$.

Soit $Y = (y_1 \dots y_n)$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$ $\quad A = (\alpha_{ik})$

Supposons la forme quadratique $f = YAY^*$ définie positivement et posons :

$$\Theta = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi Y A Y^*}$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes d'entiers pour les y .

Soient z_k des variables continues . la fonction

$\Theta\,(\,y_k + z_k\,)$

étant périodique est développable en série de Fourier :

$$\Theta = \sum a\,(\,m_1 \ldots m_n)\; e^{-2i\pi(m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n)}$$

$$a(m_1 \ldots m_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi f(u_1 \ldots u_n) + 2\pi i(m_1 u_1 + \ldots + m_n u_n)}\, du_1 \ldots du_n$$

Pour calculer $a(m_1 \ldots m_n)$ on va mettre f sous forme canonique ayant

$$f = U A U^*$$

on fait le changement $U = V L$ qui transforme f en somme de carrés ; c'est à dire que

$$L A L^* = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Soit $M = (m_1 \ldots m_n)$ $\quad N = M L^*$. Alors

$$\sum u_i m_i = U M^* = V N^*$$

comme

$$e^{-\pi f\,(u_1 \ldots u_n) + 2\pi i\,(m_1 u_1 + \ldots + m_n u_n)} = e^{-\pi(v_1^2 + \ldots + v_n^2) + 2\; i(u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n)}$$

et $du_1 \ldots du_n = |L|\, dv_1 \ldots dv_n$

on a, les variables se séparent :

$$a\,(m_1 \ldots m_n) = |L|\; e^{-\pi M L^* L M^*}$$

Or $\quad L A L^* = 1 \quad$ donne $\quad A^{-1} = L^* L$

$$a\,(\,m_1 \ldots M_n) = |L|\; e^{-\pi M A^{-1} M^*}$$

d'où la formule de transformation :

$$\sum_{\substack{y_1 \cdots y_n \\ -\infty}}^{+\infty} e^{-\pi Y A Y^*} = \Theta = \frac{1}{\sqrt{(A)}} \sum_{\substack{m_1 \cdots m_n \\ -\infty}}^{\infty} e^{-\pi M A^{-1} M^*}$$

3.- Nous allons maintenant adapter ce calcul au cas qui nous occupe .

Soit $\omega = \sum u_i \varepsilon_i = U \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$

le nombre général du système hypercomplexe .

Soit $(\mathfrak{r}|$ un idéal à gauche de base $(\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n)$

on aura : $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{Q}$ une matrice (q_{ik}) symétrique positive définie . Nous associerons à $\mathcal{Q}$, ω , la forme quadratique aux variables u_i :

$$f_{\mathcal{Q}}(\omega) = U \, \mathcal{Q} \, U^*$$

et nous poserons :

$$\Theta(\mathfrak{r}, \omega, \mathcal{Q}) = \sum_{\alpha \subset (\mathfrak{r}|} e^{-\pi c f_{\mathcal{Q}}(\alpha\omega)}$$

avec $c = \dfrac{1}{\sqrt[n]{|\mathcal{Q}| N \mathfrak{r}^2}}$

On a $\alpha = \sum y_i \alpha_i = Y \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = Y B \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$

avec $Y = (y_1 \ldots y_n)$ parcourant le système général quand α parcourt $\mathfrak{r}$, et si on pose :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \ \omega \\ \cdots\cdots \\ \varepsilon_n \ \omega \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$ on voit que

$$\alpha \omega = Y B \Omega \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$f_\varphi (\alpha \omega) = Y B \Omega . \varphi . \Omega^* B^* Y^*$$

Si on pose

$$e\, B \Omega \varphi \Omega^* B^* = A_1$$

on voit que le θ que nous venons d'introduire est bien identique à celui que nous avions plus haut . En appliquant la transformation on voit que :

$$\Theta (\mathfrak{a}, \omega , \varphi) = \sum^{\infty} e^{- \pi Y A_1 Y^*} = \frac{1}{\sqrt{|A_1|}} \sum^{\infty} e^{- \pi M A_1^{-1} M^*}$$

Mais on s'aperçoit alors que A_1^{-1} peut s'obtenir comme A à partir d'un idéal $|\mathfrak{a})$ qui sera cette fois à droite et qu'on appelle le complémentaire de $(\mathfrak{a}|$. Désignons par s la trace dans le système hypercomplexe, on posera α'_1 étant base de $\mathfrak{a}'$

$$s (\alpha_i \alpha'_i) = \delta_{ik}$$

avec $$\| \delta_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

si $$(\alpha'_1 \ldots \alpha'_n) = \overline{B} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$ on constate que

$$\overline{B} = B^{*-1} R^{-1} \quad \text{avec} \quad R = \| s (\varepsilon_i \varepsilon_k) \|$$

alors $$B^{*-1} = \overline{B}\, R$$

D'autre part si on forme

$$\begin{pmatrix} \omega \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \omega \varepsilon_n \end{pmatrix} = \overline{\Omega} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

on constate que $$\overline{\Omega} = R\, \Omega^* R^{-1}$$

Posons de même $\bar{\mathcal{Q}} = R^{-1} \mathcal{Q}^{-1} R$

il vient $M_1 A_1^{-1} M^{*} = f_{\bar{\mathcal{Q}}}^{-1}(\omega, \alpha')$

et si on pose :

$$c' = \frac{1}{\sqrt[n]{|\mathcal{Q}| \, N\alpha'^2}}$$

on constate que la formule de transformation des θ s'écrit

$$\theta(\mathfrak{a}, \omega, \mathcal{Q}) = \frac{1}{|N\omega|} \, \theta(\omega^{-1}, \mathfrak{a}', \bar{\mathcal{Q}}) \; .$$

4.- Nous allons maintenant faire intervenir la fonction ζ. Pour cela nous utilisons un procédé analogue à celui qui sert pour la fonction ζ élémentaire. Nous partons de l'intégrale

$$\int_{\infty} \cdots \int e^{-\pi c f_{\mathcal{Q}}(\alpha\omega)} |N\omega|^{s-1} du_i$$

si on fait $\omega' = \alpha\omega$ elle devient

$$\frac{1}{|N\alpha|^s} \int \cdots \int e^{-\pi c f_{\mathcal{Q}}(\omega)} |N\omega|^s \frac{du_i}{N\omega}$$

Nous allons sommer séparément ces deux formes en faisant parcourir à α un système de nombres non diviseurs de O et non associés à droite de l'idéal $(\mathfrak{a})$. La deuxième forme donnera, ϕ étant la fonction ainsi engendrée :

$$\phi(s, \mathfrak{K}, \mathcal{Q}) = \sum_{\alpha \text{ dans } (\mathfrak{a})} \frac{1}{|N\alpha|^s} \iint e^{-\pi c f(\omega)} |N\omega|^{s-1} du_i$$

qui s'écrit alors, $\mathfrak{K}$ étant la classe qui contient l'idéal $\mathfrak{a}$:

$$\phi = \zeta(s, \mathfrak{K}) \, N\mathfrak{a}^{-s} \iint e^{-\pi c f(\omega)} |N\omega|^{s-1} du_i$$

Il reste encore c et $N\mathfrak{a}$ qui paraissent dépendre de $(\mathfrak{a})$

et non de la classe ; mais grâce au choix de c, il vient

$$\Phi(s, \mathfrak{K}, \mathcal{Q}) = \zeta(s, \mathfrak{K}) . \pi^{-\frac{ns}{2}} |\mathcal{Q}|^{\frac{s}{2}} F(s, \mathcal{Q})$$

avec $F(s, \mathcal{Q}) = \int \dots \int e^{-f_{\mathcal{Q}}(\omega)} |N\omega|^{s-1} du_i$

En refaisant à l'envers ce calcul purement formel, on justifie les convergences nécessaires .

La première forme va faire apparaître une fonction Θ. mais pas directement . Car il faut étendre le Σ à tous les α non associés et non diviseurs de 0 ~~ax~~ de $\mathfrak{r}$. Et remplacer α par un associé, c'est opérer sur les u la substitution linéaire biunivoquement définie par une unité du corps hypercomplexe .

Ces substitutions forment un groupe proprement discontinu . Car soit u_i un point , et soit e une unité qui transforme $\alpha\omega$ en $\alpha e_i \omega$ donc ω en $e\omega$. Si $e\omega$ est dans un petit domaine donné de centre ω, ses coefficients sont bornés donc ceux de $e\, \omega\omega^{-1}$ aussi , donc ceux de e, et il n'y a pas une infinité de e possibles .

Soit alors F un domaine fondamental du groupe . On voit que la substitution $\omega' = e\,\omega$ n'altère pas la forme de l'intégrale, de sorte qu'au lieu d'intégrer à l'infini et de sommer sur les non associés, il suffit de sommer sur tous les non diviseurs de 0 , et d'intégrer sur F .

Comme il n'y a d'autre diviseur de 0 que 0, en compensant le terme 1 qui lui correspond dans Θ , il vient :

$$\boxed{\phi(s, \mathfrak{k}, \mathcal{Q}) = \int_F \cdots \int \left\{ \theta(\mathfrak{a}, \omega, \mathcal{Q}) - 1 \right\} |N\omega|^{s-1} \, du_i}$$

Cette formule permet, à elle seule, d'effectuer la transformation ; en effet, on sait associer à chaque transformation par unité à droite des ω une transformation par unité à gauche des ω^{-1}, ce qui permet d'obtenir une transformation de l'intégrale dans F en une intégrale dans $\overline{F}$ domaine fondamental pour les unités opérant à gauche. Par le passage de $|\mathfrak{a}|$ à son complémentaire, $\mathfrak{k}$ devient la classe complémentaire $\tilde{\mathfrak{k}}$, et un calcul que nous ne développerons pas conduit alors à :

$$\phi(s, \mathfrak{k}, \mathcal{Q}) = \phi(1-s, \tilde{\mathfrak{k}}, \overline{\mathcal{Q}}) .$$

Or en échangeant la droite et la gauche, on voit aussi que le nouveau ϕ s'exprime au moyen de $\zeta(1-s, \tilde{\mathfrak{k}})$

$$\phi(1-s, \mathfrak{k}, \overline{\mathcal{Q}}) = \zeta(1-s, \tilde{\mathfrak{k}}) \, \pi^{\frac{-n(1-s)}{2}} |\overline{\mathcal{Q}}|^{\frac{1-s}{2}} \, \Gamma(1-s, \overline{\mathcal{Q}})$$

Si on remarque que

$$\zeta(s) = \sum_{\mathfrak{k}} \zeta(s, \mathfrak{k})$$

on aboutit à l'identité fondamentale :

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \pi^{\frac{n(1-2s)}{2}} \; |\mathcal{Q}|^{\frac{1}{2}} \; |\Delta|^{s-1} \; \frac{\Gamma(s, \mathcal{Q})}{\Gamma(1-s, \overline{\mathcal{Q}})}$$

Cette forme n'est pas encore parfaitement satisfaisante, parce que les expressions Γ paraissent encore dépendre de $\mathcal{Q}$ et de la base choisie pour l'ordre I . Mais on peut achever le calcul en faisant intervenir les constantes des systèmes simples en lesquels le système $\gamma_{\mathcal{R}}$ (extension de sur le corps des réels) se décompose . On aboutit à une expression que nous écrirons seulement :

$$\varphi(s) = \zeta(s)\ \pi^{\frac{-ns}{2}}\ \frac{|\Delta|^{\frac{s-1}{2}}}{|\bar{\Delta}|^{\frac{s-1}{2}}} \prod_{j=1}^{\bar{r}} \left\{ \pi^{\frac{\sigma_j}{2} f_j^2} \prod_{i=1}^{f_j} \frac{\Gamma\left[\frac{\sigma_j}{2}(f_j s - i + 1)\right]}{\Gamma\left[\frac{\sigma_j}{2}(f_j - i + 1)\right]} \right\}$$

ou les Γ sont des fonctions Γ ordinaires ; $\gamma_{\mathcal{R}}$ est semi-simple , somme directe de $\bar{r}$ systèmes simples $\mathcal{J}_i$; $\mathcal{J}_i$ est système complet de matrices de degré f_1 sur un corps gauche d'ordre σ_i sur $\mathcal{R}$. (σ_i ne peut être que 1,2 ou 4 : nombres réels, complexes , quaternions réels) .

5.- Mais alors $\zeta(s)$ apparait comme régulier entre 0 et 1 . Si nous nous reportons à la toute première expression par les ζ du centre, on voit que les pôles des facteurs ζ qui apparaissent dans le cas où $g > 1$, doivent être compensés . Mais on ne peut en déduire immédiatement la nécessité d'éléments de ramification, car les ζ d'un corps algébrique ont un 0 à l'origine quand ce corps n'est pas réel ou imaginaire quadratique .

La difficulté a été tournée par Max Zorn en utilisant l'expression de $\varphi(s)$ au moyen des fonctions φ du centre .

Les éléments simples de $\gamma_{\mathcal{R}}$ (les $\mathcal{J}_i$) interviennent comme fermetures $\mathring{\gamma}$ -adiques relativement à un idéal premier à l'infini du centre .Les nombres f_i sont les degrés du système de matrices correspondants et valent $\frac{g}{2}$ ou g suivant qu'il apparait ou non des corps de quaternions, c'est à dire que Γ est ou non ramifié sur des idéaux à l'infini.

Le fait que γ n'est pas ramifié à l'infini s'exprime donc par $v_i \leq 2$. Dans cette hypothèse, on aurait :

$$\varphi(s) = E(s)\ \delta(s) \prod_{i=1}^{g} \varphi_z(gs - i + 1)$$

où $E(s)$ est une fonction régulière et sans 0 et où φ_z est la fonction φ du centre :

$$\varphi(s) = A^s\ \zeta(s)\ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}$$

$A = 2^{-r_2}\ \pi^{-\frac{n}{2}}\ \sqrt{|d|}$ $\left\{\begin{array}{l} r_1\ r_2 \text{ indices de réalité du centre. } d \text{ discriminant du centre.}\end{array}\right.$

La fonction φ_z est elle-même munie d'un pôle du premier ordre en 0 et 1. Et cette fois le pôle $\frac{i}{g}$ doit être compensé par le terme δ relatif aux idéaux premiers finis de ramification. Donc :

<u>Si le degré g d'un corps gauche sur son centre est supérieur à 1, ce corps a des ramifications, soit à distance finie, soit à l'infini</u>.

Ce résultat a d'ailleurs été obtenu indirectement par des procédés de la théorie du corps de classe. La méthode que nous avons employée étant non commutative, présente surtout jusqu'à présent un intérêt de principe.