Jean-Luc Verley

Introduction à la théorie des hyperfonctions

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. nº 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A5_0>

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES HYPERFONCTIONS

par Jean-Luc VERLEY

(d'après HARVEY [2])

On se propose ici de donner quelques propriétés fondamentales des hyperfonctions de M. Sato, en suivant la présentation adoptée dans le chapitre 1 de [2]. Partant d'une définition fonctionnelle, on interprète ces hyperfonctions successivement comme classes de cohomologie relative, puis comme sommes localement finies de fonctionnelles analytiques réelles. Nous nous sommes limités à des indications assez rapides sur les démonstrations.

1. Rappels sur la cohomologie relative.

Rappelons rapidement, sans démonstration, quelques notations et résultats sur la cohomologie relative à valeurs dans un faisceau (cf. [1]).

Soient X un espace topologique, et $\mathfrak{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. Si u est une section de $\mathfrak{F}$ au-dessus d'un ouvert U de X, i. e. $u \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$, on appelle support de u l'ensemble des $x \in U$ tels que le germe de u en x ne soit pas nul ; cet ensemble est relativement fermé dans U. Si S est un sous-espace fermé de X, soit $\Gamma_S(U, \mathfrak{F})$ l'ensemble des sections de $\mathfrak{F}$ au-dessus de U dont le support est un fermé de S.

1.1. DÉFINITION. - On appelle p-ième groupe de cohomologie relative modulo $X - S$ et à valeurs dans $\mathfrak{F}$, noté $H_S^p(X, \mathfrak{F})$, le p-ième groupe de cohomologie du complexe

$$0 \to \Gamma_S(U, \mathfrak{F}) \to \Gamma_S(U, \mathcal{G}^0) \to \Gamma_S(U, \mathcal{G}^1) \to \dots ,$$

où

$$0 \to \mathfrak{F} \to \mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}^1 \to \dots$$

est une résolution flasque du faisceau $\mathfrak{F}$.

On a alors les résultats suivants :

1.2. PROPOSITION (Théorème d'excision). - Soient $\mathfrak{F}$ un faisceau sur X, et V et W deux ouverts de X. Si S est relativement fermé dans V et dans W, on a

$$H_S^p(W, \mathfrak{F}) = H_S^p(V, \mathfrak{F}) .$$

1.3. PROPOSITION (Suite exacte de cohomologie relative). - Soient M et S ($M \subset S$) deux sous-ensembles fermés de X. On a la suite exacte :

$$0 \to H^0_M(X, \mathfrak{F}) \to H^0_S(X, \mathfrak{F}) \to H^0_{S-M}(X - M, \mathfrak{F}) \to H^1_M(X, \mathfrak{F}) \to \dots .$$

Définissons maintenant les cochaines relatives et la cohomologie de Čech relative.

Soient S un fermé de X, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X et $I' \subset I$ tel que $\mathcal{U}' = \{U_i\}_{i \in I'}$ soit un recouvrement ouvert de $X - S$; une telle paire $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ est appelée un recouvrement relatif de $(X, X - S)$. On appelle groupe des p-cochaines relatives à coefficients dans $\mathfrak{F}$, noté $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F})$, le sous-groupe du groupe des cochaines $C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ formé des cochaines $c = (c_{i_0, \dots, i_p})$ telles que $c_{i_0, \dots, i_p} = 0$ si tous les indices i_k appartiennent à I'. L'opérateur cobord étant défini par

$$(dc)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum (-1)^k c_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}} ,$$

on appelle p-ième groupe de cohomologie de Čech relative, noté $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F})$, le p-ième groupe de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F}) \xrightarrow{d} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F}) \longrightarrow \dots .$$

Si le recouvrement $\mathcal{U}$ est acyclique par rapport à $\mathfrak{F}$, i. e. si

$$H^p(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r}, \mathfrak{F}) = 0$$

pour tout $p > 0$ et toutes les intersections finies d'ouverts de $\mathcal{U}$, on peut calculer la cohomologie relative avec des recouvrements relatifs, i. e. on a la proposition suivante :

1.4. PROPOSITION (Théorème de Leray). - Si le recouvrement $\mathcal{U}$ est acyclique par rapport au faisceau $\mathfrak{F}$, et si $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ est un recouvrement relatif de $(X, X - S)$, alors

$$H^p_S(X, \mathfrak{F}) = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F}) .$$

2. Définition des hyperfonctions.

V étant un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on désignera par $A(V)$ l'anneau des fonctions holomorphes dans V. $\mathcal{O}$ désignera, dans toute la suite, le faisceau des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^n$.

Rappelons tout d'abord que tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ a un système fondamental de voisinages dans $\mathbb{C}^n$ formé de domaines d'holomorphie qui coupent $\mathbb{R}^n$ suivant Ω (lemme de Grauert). Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et V étant un ouvert d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$ tel que $V \cap \mathbb{R}^n = \Omega$, on pose

$$V \# \Omega = (\mathbb{C} - \mathbb{R})^n \cap V \quad ,$$

$$\hat{V}_j = [(\mathbb{C} - \mathbb{R})^{j-1} \times \mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \mathbb{R})^{n-j}] \cap V \quad ;$$

ainsi $V \# \Omega = \bigcap_{j=1}^{n} \hat{V}_j$.

2.1. THÉORÈME et DÉFINITION. - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors, si V est un ouvert d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$ coupant $\mathbb{R}^n$ suivant Ω, le quotient

$$B(\Omega) = A(V \# \Omega) \Big/ \sum_{j=1}^{n} A(\hat{V}_j)$$

est isomorphe au groupe de cohomologie relative

(1) $$H^n(V , \mathcal{O}) \quad ,$$

et $B(\Omega)$ est indépendant de V. Les éléments de $B(\Omega)$ s'appellent des hyperfonctions sur Ω.

Le fait que $B(\Omega)$ est indépendant de V résulte de l'isomorphisme avec (1) et du théorème d'excision. Démontrons l'isomorphisme annoncé.

Posons $V_0 = V$, $V_i = (\mathbb{C}^{i-1} \times (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^{n-i}) \cap (V - \Omega)$, et considérons les recouvrements $\mathcal{U} = \{V_i\}_{i=0,\dots,n}$ et $\mathcal{U}' = \{V_i\}_{i=1,\dots,n}$. Puisque tous les ouverts V_i sont d'holomorphie, il résulte du théorème B de Cartan que le recouvrement $\mathcal{U}$ est acyclique par rapport au faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes. D'après le théorème de Leray, il suffit donc de montrer que

$$B(\Omega) = H^n(\mathcal{U} , \mathcal{U}' , \mathcal{O}) \quad .$$

Or, puisque le recouvrement $\mathcal{U}$ contient seulement $n + 1$ éléments, on a

$$C^k(\mathcal{U} , \mathcal{U}' , \mathcal{O}) = 0 \qquad \text{pour } k \geqslant n + 1 \quad ,$$

et, en particulier, les n-cochaines relatives sont des n-cocycles ; par ailleurs, $C^n(\mathcal{U} , \mathcal{U}' , \mathcal{O})$ s'identifie à $A(V \# \Omega)$, puisqu'il n'y a que $n + 1$ ouverts dans le recouvrement $\mathcal{U}$ et que $V_0 \cap \dots \cap V_n = V \# \Omega$. Remarquons maintenant pour terminer que $dC^{n-1}(\mathcal{U} , \mathcal{U}' , \mathcal{O})$ est isomorphe à $\sum A(V_j)$, puisque l'on a, par définition, $c_{1,\dots,n} = 0$, si $c \in C^{n-1}(\mathcal{U} , \mathcal{U}' , \mathcal{O})$, d'où

$$(dc)_{0,\dots,n} = \Sigma(-1)^j \, c_{0,\dots,\hat{j},\dots,n} \quad ,$$

avec $c_{0,\dots,\hat{j},\dots,n} \in A(\hat{V}_j)$, puisque $\bigcap_{i\neq j} V_i = \hat{V}_j$.

3. Lemme de Martineau et applications.

Rappelons tout d'abord quelques résultats sur la cohomologie de Dolbeault. Désignons par $\mathcal{E}_{(p,q)}$ le faisceau des (p , q)-formes différentielles sur $\mathbb{C}^n$ à coefficients indéfiniment différentiables ; les groupes de cohomologie de Dolbeault d'un ouvert U , notés $\mathcal{K}^n(U)$, sont les groupes de cohomologie du complexe

$$\dots \longrightarrow \mathcal{E}_{(0,n-1)} \xrightarrow{\bar{d}} \mathcal{E}_{(0,n)} \longrightarrow \dots \quad .$$

Remarquons que, si K est un compact de $\mathbb{C}^n$, alors on a, pour $n > 1$, un isomorphisme, que nous désignerons par δ , entre le groupe de cohomologie relative $H^n_K(\mathbb{C}^n , \mathcal{O})$ et le $(n-1)$-ième groupe de Dolbeault $\mathcal{K}^{n-1}(\mathbb{C}^n - K)$. En effet, la suite exacte de cohomologie relative s'écrit ici

$$H^{n-1}(\mathbb{C}^n , \mathcal{O}) \to H^{n-1}_{\mathbb{C}^n - K}(\mathbb{C}^n - K , \mathcal{O}) \to H^n_K(\mathbb{C}^n , \mathcal{O}) \to H^n(\mathbb{C}^n , \mathcal{O}) \quad ;$$

les deux groupes extrêmes sont nuls d'après le théorème B, d'où la conclusion, en utilisant le fait que la cohomologie à valeurs dans le faisceau des fonctions holomorphes peut se calculer à partir du complexe ci-dessus (isomorphisme de Dolbeault).

Nous admettrons le théorème fondamental suivant :

3.1. THÉORÈME (Lemme de Martineau [4]). - *Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$ tel que $H^p(K , \mathcal{O}) = 0$ pour $p > 0$. Alors $H^p_K(\mathbb{C}^n , \mathcal{O}) = 0$ pour $p \neq n$ et, pour $n > 1$,*

$$H^n_K(\mathbb{C}^n , \mathcal{O}) \overset{\delta}{\cong} \mathcal{K}^{n-1}(\mathbb{C}^n - K) \overset{\delta_1^*}{\cong} A'(K) \quad ,$$

l'isomorphisme δ_1^* étant induit par la forme bilinéaire suivante :

Soit $f \in A(K)$, et soit $\psi \in \mathcal{E}_{(0,n-1)}$ telle que $\bar{d}\psi = 0$. Alors $f \in A(U)$ pour un certain ouvert U contenant K ; choisissant une fonction α de classe C^∞ à support compact, nulle en dehors de U et égale à 1 dans un voisinage de K , on pose

(2) $$\langle f , \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f\psi \wedge \bar{d}\alpha \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \quad .$$

Remarquons que, d'après le lemme de Grauert et le théorème B de Cartan, le lemme de Martineau s'applique en particulier aux compacts $K \subset \underset{\sim}{R}^n$.

3.2. COROLLAIRE. - <u>Si</u> Ω <u>est un ouvert borné de</u> $\underset{\sim}{R}^n$, <u>alors on a</u>

$$H^p_\Omega(\underset{\sim}{C}^n - \partial\Omega \, , \, \mathcal{O}) = 0 \qquad \underline{\text{pour}} \ p \neq n \ .$$

Pour $p \neq n$, la nullité du groupe de cohomologie résulte de la suite exacte de cohomologie pour les sous-ensembles fermés $\partial\Omega$ et $\overline{\Omega}$ de $\underset{\sim}{C}^n$, en appliquant le lemme de Martineau (pour $p \neq n - 1$), et en utilisant le fait que l'application de $A'(\partial\Omega)$ dans $A'(\overline{\Omega})$ est injective (pour $p = n - 1$).

3.3. THÉORÈME. - <u>Le préfaisceau</u> $\mathcal{B}$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{R}^n$ <u>défini par</u> $\mathcal{B}(\Omega) = B(\Omega)$ <u>est un faisceau sur</u> $\underset{\sim}{R}^n$.

Ce théorème résulte de 3.2 et du lemme d'algèbre pure suivant :

LEMME. - <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>un faisceau sur un espace</u> X , <u>et soit</u> M <u>un fermé de</u> X . <u>Soit</u> $\mathcal{G}^p_M$ <u>le faisceau déterminé par le préfaisceau</u> $\{H^p_{U\cap M}(U \, , \, \mathcal{F})\}$. <u>Alors, si</u>

$$\mathcal{G}^p_M = 0 \qquad \underline{\text{pour}} \ p \neq n \ ,$$

<u>on a</u>

$$H^p_{U\cap M}(U \, , \, \mathcal{F}) = 0 \qquad \underline{\text{pour}} \ p < n \ ,$$

$$H^p_{U\cap M}(U \, , \, \mathcal{F}) \cong H^{p-n}(U \, , \, \mathcal{G}^p_M) \qquad \underline{\text{pour}} \ p \geqslant n \ .$$

<u>En particulier, pour</u> $p = n$, <u>le préfaisceau</u> $\{H^n_{U\cap M}(U \, , \, \mathcal{F})\}$ <u>est un faisceau.</u>

On applique ici ce lemme avec $X = \underset{\sim}{C}^n - \partial\Omega$, $M = \Omega$, et $\mathcal{F} = \mathcal{O}$, d'où le théorème pour $p = n$, puisque $\mathcal{G}^n_M$ a pour fibre 0 en tout point $x \notin M$. Le lemme entraîne aussi que, pour un ouvert quelconque Ω' de $\underset{\sim}{R}^n$, on a

$$(3) \qquad H^p_{\Omega'}(C^n - \partial\Omega' \, , \, \mathcal{O}) = 0 \qquad \text{pour} \ p < n \ .$$

3.4. THÉORÈME. - <u>Le faisceau</u> $\mathcal{B}$ <u>est un faisceau flasque.</u>

Si $V \cap \underset{\sim}{R}^n = \Omega$, on veut montrer que, pour toute fonction $F \in A(V \not\supset \Omega)$, il existe une fonction équivalente définie globalement, i. e. des fonctions $F_j \in A(\hat{V}_j)$ telles que $F - \sum F_j$ se prolonge à $\underset{\sim}{C}^n \not\supset \underset{\sim}{R}^n$; cela signifie exactement que

$$\frac{A(V \neq \Omega)}{A(\hat{V}_j) + A(\underset{\sim}{C}^n \neq \underset{\sim}{R}^n)} = 0 \quad .$$

Pour cela, en posant $U_0 = V$, $U_j = \underset{\sim}{C}^{j-1} \times (\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{R}) \times \underset{\sim}{C}^{n-j}$ et $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=0}^n$, on vérifie que ce groupe est égal à $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Puisque le recouvrement $\mathcal{U}$ est acyclique par rapport au faisceau $\mathcal{O}$ (théorème B de Cartan), ce groupe est égal, d'après le théorème de Leray classique, à $H^n(U, \mathcal{O})$ pour $U = \bigcup_{j=0}^{n} U_j$, et ce groupe est nul d'après un théorème de Malgrange [3].

4. Hyperfonctions et distributions.

Soit Ω un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$; une hyperfonction sur Ω est une section du faisceau $\mathcal{B}$ au-dessus de Ω , et par suite on peut parler de son support (cf. § 1). Si K est un compact de Ω , on désignera par $B_K(\Omega)$ l'espace des hyperfonctions sur Ω dont le support est contenu dans K (i. e. le noyau de l'application de restriction $B(\Omega) \to B(\Omega - K)$), et par $B_*(\Omega)$ l'espace des hyperfonctions sur Ω à support compact ; V désignera un ouvert d'holomorphie coupant $\underset{\sim}{R}^n$ suivant Ω .

4.1. THÉORÈME. - <u>Avec les notations ci-dessus, on a</u>

$$B_K(\Omega) \cong H_K^n(V, \mathcal{O}) \qquad \underline{\text{et}} \qquad B_K(\underset{\sim}{R}^n) \cong A'(K) \quad .$$

D'après 1.3, on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} H^{n-1}_{\Omega-K}(V - K, \mathcal{O}) & \to & H^n_K(V, \mathcal{O}) & \to & H^n_\Omega(V, \mathcal{O}) & \to & H^n_{\Omega-K}(V - K, \mathcal{O}) \\ & & & & \wr\| & & \wr\| \\ & & & & B(\Omega) & & B(\Omega - K) \end{array} \quad .$$

D'après (3), le premier de ces groupes est nul, d'où le premier isomorphisme. Le second résulte de 3.1, qui précise de plus l'isomorphisme.

Puisque $A'(\underset{\sim}{R}^n) = \bigcup_{K \subset R^n} A'(K)$, le théorème 4.1 entraîne, en particulier, que <u>l'isomorphisme</u> δ_1^* <u>défini dans</u> 3.1 <u>induit un isomorphisme de</u> $B_*(\underset{\sim}{R}^n)$ <u>sur</u> $A'(\underset{\sim}{R}^n)$. Par ailleurs, puisque le faisceau $\mathcal{B}$ est flasque, <u>toute hyperfonction apparaît comme une somme localement finie d'hyperfonctions à support compact</u> qui s'interprètent comme des fonctionnelles analytiques d'après ce qui précède. Ces deux résultats permettent d'injecter les distributions sur Ω dans les hyperfonctions sur Ω , avec conservation des supports.

4.2. THÉORÈME. - L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω s'identifie à un sous-espace de l'espace $B(\Omega)$ des hyperfonctions, le support de u considéré comme une distribution étant égal au support de u considéré comme une hyperfonction.

On utilise le lemme suivant :

L'application naturelle de l'espace des distributions à support compact sur R^n dans l'espace $A'(R^n)$ des fonctionnelles analytiques réelles est une injection qui préserve les supports.

En utilisant une partition de l'unité, on écrit la distribution u comme une somme localement finie $\sum u_i$ de distributions à supports compacts. D'après les remarques ci-dessus et le lemme, on peut considérer chaque u_i comme une hyperfonction sans changer son support, de telle sorte que $\sum u_i$ reste une somme localement finie d'hyperfonctions ; par suite, cette somme définit une hyperfonction sur Ω dont le support est égal au support de u considéré comme une distribution.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[2] HARVEY (R.). - Hyperfunctions and partial differential equations. - Stanford, Stanford University.

[3] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955/56, p. 271-355 (Thèse Sc. Math. Paris, 1955).

[4] MARTINEAU (André). - Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 214, 13 p.