Séminaire Lelong.
Analyse

JEAN-PIERRE RAMIS

Factorialité des anneaux de polynômes de séries formelles et de séries convergentes. Théorème de préparation en géométrie différentiable banachique

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. n° 3, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A3_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
7e année, 1966/67, n° 3

8 mars 1967

FACTORIALITÉ DES ANNEAUX DE POLYNÔMES DE SÉRIES FORMELLES ET DE SÉRIES CONVERGENTES. THÉORÈME DE PRÉPARATION EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIABLE BANACHIQUE

par Jean-Pierre RAMIS

I. Factorialité des anneaux $\underset{\sim}{K}[E]$, $\underset{\sim}{K}[[E]]$ et $\underset{\sim}{K}\{E\}$.

Les hypothèses faites sur $\underset{\sim}{K}$ pour les trois cas sont celles de [9] (III, (a), (b), (c)).

Nous savons que tout anneau factoriel est intégralement clos ; ici, nous allons "remonter" de la propriété d'être intégralement clos à celle d'être factoriel.

1. Les anneaux $\underset{\sim}{K}[E]$, $\underset{\sim}{K}[[E]]$ et $\underset{\sim}{K}\{E\}$ sont intégralement clos.

En fait, nous allons démontrer une propriété plus forte qu'intégralement clos ; rappelons d'abord quelques résultats (cf. [2]) :

Définition. - Soit A un anneau intègre, soit k son corps des fractions. On dit que A est complètement intégralement clos, si la condition suivante est vérifiée :

Tout $x \in k$, tel qu'il existe $d \neq 0$, appartenant à A , et vérifiant $dx^n \in A$, $\forall\, n \geqslant 0$, appartient à A (on voit facilement que, complètement intégralement clos entraîne intégralement clos).

LEMME 1. - *Les anneaux $\underset{\sim}{K}[E]$, $\underset{\sim}{K}[[E]]$ et $\underset{\sim}{K}\{E\}$ sont complètement intégralement clos.*

Démonstration. - Soient $A = \underset{\sim}{K}[E]$, $\underset{\sim}{K}[[E]]$ ou $\underset{\sim}{K}\{E\}$, k son corps des fractions.

Soit $\frac{f}{g} \in k$ $(f\ , g \in A\ ,\ g \neq 0)$. On suppose qu'il existe $d \neq 0$, appartenant à A et vérifiant $d(\frac{f}{g})^n \in A$, $\forall\, n \geqslant 0$. On peut faire le choix de la décomposition de l'espace E de manière à pouvoir appliquer le théorème 1 et son corollaire à g et d (il suffit de le faire pour gd , on peut supposer $\omega(gd) \geqslant 1$, sinon le résultat est trivial) ; soient p et q les degrés respectifs de g et d dans le cas (a), leur ordre en t dans les cas (b) et (c). On a alors (théorème 1)

$$f = gq + R \qquad (\deg R(t) < p) \quad ,$$

et, d'après le corollaire, $g = hQ$ (h inversible, $\deg Q(t) = p$, Q distingué). Soit

$$\frac{f}{g} = q + h^{-1}\frac{R}{Q} \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{Q} = h\frac{f}{g} - q \quad .$$

On en déduit

$$d\left(\frac{R}{Q}\right)^n \in A \ , \qquad \forall\, n \geqslant 0 \quad ,$$

on applique alors à d le corollaire, $d = \ell D$ (ℓ inversible, $\deg D(t) = q$, D distingué). Finalement, $D\left(\frac{R}{Q}\right)^n \in A$, $\forall\, n \geqslant 0$.

Posons

$$DR^n = Q^n a_n \ , \qquad \text{avec} \quad a_n \in A \quad ,$$

ce qui s'écrit également

$$0 = Q^n a_n - DR^n \quad ,$$

$$\deg Q^n(t) = np \ , \qquad \deg D(t)\, R^n(t) \leqslant n(p-1) + q \quad ,$$

donc, pour n assez grand,

$$\deg D(t)\, R^n(t) < \deg Q^n(t) \quad ,$$

et l'égalité $0 = Q^n a_n - DR^n$ est une égalité de "division" de 0 par Q^n , d'après l'unicité dans le théorème 1, on a

$$a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad DR^n = 0 \quad ,$$

d'où, puisque $D \neq 0$, $R^n = 0$ et $R = 0$, finalement

$$\frac{f}{g} = q \in A \quad .$$

2. Les anneaux $\underset{\sim}{K}[E]$, $\underset{\sim}{K}[[E]]$ et $\underset{\sim}{K}\{E\}$ sont factoriels.

LEMME 2. - Pour un anneau d'intégrité A (de corps des fractions k), les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est intégralement clos ;

(ii) Quels que soient les polynômes unitaires P_1 et $P_2 \in k[T]$, si $P_1 P_2 \in A[T]$, alors $P_1 \in A[T]$ et $P_2 \in A[T]$.

Démonstration : cf. [2].

LEMME 3.

(i) Si P_1 , ... , P_n sont des polynômes distingués de $A[T]$, $P = P_1 \dots P_n$ est distingué.

(ii) Si $P = P_1 \dots P_n$ est distingué dans $A[T]$, et si les P_1 , ... , P_n sont unitaires, les P_1 , ... , P_n sont distingués.

Démonstration.

(i) est évident.

(ii) est trivial dans le cas (a) ; dans les autres cas, soit p_i la plus petite puissance de t dans P_i , telle que le coefficient β_i de t^{p_i} soit inversible. Considérons le coefficient de t^s (avec $s = \sum_{i=1}^{n} p_i$) dans P , il est de la forme $\beta_1 \dots \beta_n + \gamma$, avec γ dans l'idéal maximal. Etant, soit 1 , soit dans l'idéal maximal, il ne peut être que 1 , soit, $\forall\, i$, $p_i = \deg P_i$.

THÉORÈME 2. - Les anneaux $\underset{\sim}{K}[E]$, $\underset{\sim}{K}[[E]]$ et $\underset{\sim}{K}\{E\}$ sont factoriels.

Démonstration. - Notations : $A = \underset{\sim}{K}[E]$, $\underset{\sim}{K}[[E]]$ ou $\underset{\sim}{K}\{E\}$.

Si $E = F \oplus E'$, $A' = \underset{\sim}{K}[E']$, $\underset{\sim}{K}[[E']]$ ou $\underset{\sim}{K}\{E'\}$, k' désigne le corps des fractions de A' .

Montrons d'abord qu'il suffit d'étudier la décomposition d'un polynôme distingué. Soit $f \in A$, d'après le corollaire du théorème 1, $f = HP$ (H inversible, P distingué de $A'[T]$), si P est décomposable en facteurs irréductibles dans A , f le sera (aux inversibles près). L'unicité est plus délicate : soit $f = f_1 \dots f_n$ une décomposition en facteurs irréductibles (que l'on peut supposer non inversibles), la partie (i) du théorème 1 montre que, si une décomposition est valable pour f , elle l'est pour les f_i (si $f \not\equiv 0$ sur F , les f_i le sont), en appliquant le corollaire,

$$f = HP , \qquad f_i = H_i P_i \quad (i = 1 , \dots , n) ,$$

et, d'après l'unicité et le lemme 3 (i),

$$P = P_1 \dots P_n ,$$

les P_i étant irréductibles dans A . Tout revient donc à montrer qu'un polynôme distingué P de $A'[T]$ est décomposable de manière unique en un produit de polynômes distingués de $A'[T]$, irréductibles dans A . Pour montrer que A est factoriel, il suffit, a fortiori, de démontrer que tout polynôme P de $A'[T]$ se décompose de manière unique en un produit $P_1 \dots P_n$ de polynômes distingués de $A'[T]$, irréductibles dans l'ensemble des polynômes distingués de $A'[T]$. L'existence d'une décomposition est évidente, l'unicité résulte du fait qu'un polynôme irréductible dans l'ensemble des polynômes distingués est, en fait, irréductible dans $k'[T]$ (ce qui résulte des lemmes 2 et 3) qui est factoriel (k' est un corps).

3. Remarques "géométriques".

Soit $E \in \mathfrak{N}_{\underset{\sim}{K}}$, $a \in E$, soient U un voisinage ouvert de a, f une fonction analytique sur U, on définit $V(f) = f^{-1}(0_{\underset{\sim}{K}})$. On dit que $V(f)$ est un sous-ensemble analytique principal de U. On définit (de manière classique) les germes d'ensembles analytiques principaux en a.

Supposons $\underset{\sim}{K}$ complet, non discret et algébriquement clos, on a la proposition suivante.

PROPOSITION (NULLSTELLENSATZ pour les idéaux principaux). - *Soit* $\mathfrak{f}$ *un germe de fonction analytique en* $0 \in E$, *il définit un germe d'ensemble analytique principal* $\mathfrak{X}$. *Soit* $(\mathfrak{f})$ *l'idéal engendré dans* $\underset{\sim}{K}\{E\}$ *par* $\mathfrak{f}$ (*on identifie l'anneau des germes de fonctions analytiques en* 0 *à* $\underset{\sim}{K}\{E\}$), *si* $\mathfrak{g}$ *est un germe s'annulant sur* $\mathfrak{X}$, *alors* $\mathfrak{g} \in \mathrm{rad}(\mathfrak{f})$.

Démonstration. - La démonstration s'appuie sur le lemme suivant.

LEMME. - *Soient* $f , g \in \underset{\sim}{K}\{E\}$, *premiers entre eux, on peut trouver une décomposition de l'espace*, $E = F \oplus E'$, *telle qu'il existe* $\lambda , \mu \in \underset{\sim}{K}\{E\}$ *vérifiant*

$$\lambda f + \mu g = p , \qquad \text{avec } p \in \underset{\sim}{K}\{E'\} \text{ et } p \neq 0 .$$

Démonstration. - $f = HP$, $g = H_1 Q$, d'après le corollaire du théorème 1, P et Q étant distingués,

$$P , Q \in [\underset{\sim}{K}\{E'\}][T] \subset k'[T] ,$$

P et Q sont premiers entre eux dans $k'[T]$. Par l'algorithme d'Euclide,

$$\exists\, k , h \in k'[T] , \qquad hP + kQ = 1 ,$$

ce qui donne le résultat.

Passons à la démonstration de la proposition. On suppose d'abord $\mathfrak{f}$ irréductible, et on remplace $\mathfrak{f}$ par P tel que $\mathfrak{f} = HP$, P est également irréductible, si P ne divise pas g , P et g sont premiers entre eux et, d'après le lemme,

$$\lambda P + \mu g = \nu , \qquad \nu \in \underset{\sim}{K}\{E'\} .$$

Un raisonnement élémentaire (en choisissant un voisinage convenable de 0) montre alors que $P = 0$, et qu'il y a contradiction. Finalement, $g \in (\mathfrak{f})$.

On étend au cas général sans difficulté (cf. [5], page 91), en décomposant $\mathfrak{f}$ en facteurs irréductibles.

II. Théorèmes de Weierstrass en géométrie différentiable banachique.

Rappelons d'abord quelques résultats sur les anneaux locaux (tous les anneaux sont supposés commutatifs unitaires, les homomorphismes sont unitaires).

A. Anneaux locaux.

1.

Soient A et B deux anneaux locaux, d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{M}(A)$ et $\mathfrak{M}(B)$. Soit $u : A \to B$ un morphisme local $(u(\mathfrak{M}(A)) \subset \mathfrak{M}(B))$, u étant un homomorphisme, il permet de munir B d'une structure de A-module. Soit enfin $\underset{\sim}{K}$ le corps résiduel de A : $A \to A/\mathfrak{M}(A) \approx \underset{\sim}{K}$, $\underset{\sim}{K}$ est canoniquement muni d'une structure de A-module.

Définition. - Nous dirons que $\mathfrak{M}(A)$ est un idéal de définition de B , s'il existe un entier r tel que

$$\mathfrak{M}^r(B) \subset \mathfrak{M}(A).B .$$

Définition. - Nous dirons que B est quasi-fini sur A , si

$$B \bigotimes_A \underset{\sim}{K} = B/\mathfrak{M}(A).B$$

est un $\underset{\sim}{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

PROPOSITION 1. - *Si* B *est quasi-fini sur* A , $\mathfrak{M}(A)$ *est un idéal de définition de* B .

Démonstration. - $B \bigotimes_A \underset{\sim}{K}$ est une $\underset{\sim}{K}$-algèbre de dimension finie, c'est un anneau local artinien, donc son idéal maximal $\mathfrak{M}(B)/\mathfrak{M}(A).B$ est nilpotent.

Remarque. - La réciproque est en général fausse (contrairement à ce qui se passe pour les algèbres formelles ou analytiques de dimension finie, cf. [6]).

2. Un théorème de finitude.

Soient A et B deux $\underset{\approx}{K}$-algèbres locales, de corps résiduel $\underset{\approx}{K}$. Soit u un morphisme local (unitaire) de $\underset{\approx}{K}$-algèbres, $u : A \to B$.

THÉORÈME 1. - Si B est quasi-fini sur A , si A est complet (pour la structure uniforme $\mathfrak{M}(A)$-adique sur A), si B est séparé (pour la topologie $\mathfrak{M}(B)$-adique sur B), alors B est un A-module de type fini. De plus, si $e_1, \ldots, e_n \in B$ sont tels que leurs images par $B \to B/\mathfrak{M}(A).B$ engendrent $B \bigotimes_A \underset{\approx}{K}$ comme $\underset{\approx}{K}$-espace vectoriel, B est engendré comme A-module par les $e_1, \ldots, e_n$.

J'admettrai ce théorème.

Passons à la démonstration proprement dite, elle est essentiellement basée sur le début de la démonstration de B. MALGRANGE, sur un résultat de J. MATHER (cf. [6] et [7]), et sur le théorème de Weierstrass pour $\underset{\approx}{R}[[E]]$ (cf. [9]).

B. Les théorèmes de Weierstrass.

1. Anneaux de séries formelles (hypothèses sur $\underset{\approx}{K}$, cf. [9]).

Soient E et $F \in Ob(\text{e. v. t. } \underset{\approx}{K})$, soit $\varphi \in F[[E]]$, $\omega(\varphi) \geqslant 1$. Rappelons que nous avons défini un morphisme :

$$\begin{cases} \varphi^* : \underset{\approx}{K}[[F]] \to \underset{\approx}{K}[[E]] \ , \\ \varphi^* : f \longmapsto f \circ \varphi \ . \end{cases}$$

Remarquons que φ^* est local, et que le corps résiduel de $\underset{\approx}{K}[[E]]$ est $\underset{\approx}{K}$.

Exemple :

$$\begin{cases} E = F \oplus E' \quad \text{(somme de (e. v. t. } \underset{\approx}{K}\text{) avec } \dim F = 1 \text{)} \ , \\ x = at + x' \ . \end{cases}$$

Soit $g \in \underset{\approx}{K}[[E]]$, $\omega(g) \geqslant 1$, dont la restriction à F est une série d'ordre $p \geqslant 1$.

Soit $\psi \in (E' \oplus \underset{\approx}{K})[[E]]$, défini par $\psi = (x' , g)$, où x' désigne l'application (de $\mathfrak{L}^1(E , E') \subset E'[[E]]$) de projection $E \to E'$, $x \longmapsto x'$. On a $\omega(\psi) \geqslant 1$, et ψ définit un morphisme

$$\psi^* : \underset{\approx}{K}[[E' \oplus \underset{\approx}{K}]] \to \underset{\approx}{K}[[E]] \ .$$

Remarque. - $E' \oplus \underset{\approx}{K} \to E'$ et $E \to E'$ définissent les morphismes

$$\underset{\approx}{K}[[E']] \xrightarrow{\subset} \underset{\approx}{K}[[E' \oplus \underset{\approx}{K}]] \quad \text{et} \quad \underset{\approx}{K}[[E']] \xrightarrow{\subset} \underset{\approx}{K}[[E]] \ ,$$

on a

$$\begin{tikzcd}
\underset{\approx}{K}[[E']] \arrow[r, "\subset"] \arrow[dr, "\mathrm{id.}"'] & \underset{\approx}{K}[[E' \oplus \underset{\approx}{K}]] \arrow[r, "\psi^*"] & \underset{\approx}{K}[[E]] \\
& \underset{\approx}{K}[[E']] \arrow[ur, "\subset"'] &
\end{tikzcd} \ ,$$

qui est commutatif.

PROPOSITION 2. - Le morphisme ψ^* fait de $\underset{\approx}{K}[[E]]$ un $\underset{\approx}{K}[[E' \oplus \underset{\approx}{K}]]$-module de type fini engendré par $1, \ldots, t^{p-1}$.

Démonstration. - Considérons

$$\underset{\approx}{K}[[E]] \bigotimes_{\underset{\approx}{K}[[E' \oplus \underset{\approx}{K}]]} \underset{\approx}{K} = \underset{\approx}{K}[[E]] / \mathfrak{M}(\underset{\approx}{K}[[E' \oplus \underset{\approx}{K}]]) . \underset{\approx}{K}[[E]] \ ,$$

qui, d'après le théorème de division de Weierstrass, est un $\underset{\approx}{K}$-e. v. de dimension finie engendré par $\bar{1}, \bar{t}, \ldots, \bar{t}^{p-1}$ (images dans le quotient de $1, t, \ldots, t^{p-1}$), le résultat se déduit alors du théorème de finitude (A, théorème 1).

2. Anneaux de germes de fonctions différentiables.

Soit $\mathcal{H}$ la classe des espaces de Banach réels vérifiant la condition suivante :

(H) Il existe une fonction de classe C^∞ , $u : E \to \underset{\approx}{R}$, telle que :

(i) $\forall x \in E , \ 0 \leqslant u(x) \leqslant 1$;

(ii) $u(x) = 1 , \ \forall x$ d'un voisinage de 0 ;

(iii) $\operatorname{Supp} u \subset \{x \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

Rappelons que, si E est lissable, $E \in \mathcal{H}$.

THÉORÈME 2 (Emile BOREL). - Si $E \in \mathcal{H}$, il existe toujours une fonction de classe C^∞ , $f : E \to F$, qui admette à l'origine un développement de Taylor arbitrairement donné.

Démonstration : cf. [1].

Définition. - Soient $E \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{B}_{\underset{\sim}{R}}$, 0_E son zéro, on définit l'anneau des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (à valeurs dans $\underset{\sim}{R}$) au voisinage de 0_E , on le note $\mathcal{E}(E)$.

$\mathcal{E}(E)$ est local, d'idéal maximal : $\mathfrak{M}(\mathcal{E}(E)) = \{\varphi \mid \varphi(0) = 0\}$.

Définition. - Un germe est dit plat, si sa série de Taylor en 0_E est identiquement nulle ; on note $\mathfrak{M}^\infty(E)$, l'idéal des germes plats.

PROPOSITION 3. - On a un isomorphisme $\underset{\sim}{R}[[E]] \approx \mathcal{E}(E)/\mathfrak{M}^\infty(E)$, si $E \in \mathcal{K}$.

Démonstration. - L'application $\mathcal{E}(E) \to \underset{\sim}{R}[[E]]$, germe $\longmapsto$ série de Taylor en 0_E , passe au quotient et donne

$$\mathcal{E}(E)/\mathfrak{M}^\infty(E) \to \underset{\sim}{R}[[E]] \quad ,$$

qui est injective, si $E \in \mathcal{K}$, elle est surjective (théorème 2).

Définition. - Soit φ un germe de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0_E , à valeurs dans F , et tel que $\varphi(0_E) = 0_F$, on définit un morphisme par

$$\begin{cases} \varphi^* : \mathcal{E}(F) \to \mathcal{E}(E) \quad , \\ \varphi^* : f \longmapsto f \circ \varphi \quad . \end{cases}$$

Soit $\hat{\varphi}$ la série de Taylor de φ en 0_E , $\hat{\varphi} \in F[[E]]$ et $\omega(\hat{\varphi}) \geqslant 1$, $\hat{\varphi}$ définit un morphisme $\hat{\varphi}^*$: $\underset{\sim}{R}[[F]] \to \underset{\sim}{R}[[E]]$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(F) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{E}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underset{\sim}{R}[[F]] & \xrightarrow{\hat{\varphi}^*} & \underset{\sim}{R}[[E]] \quad . \end{array}$$

On a une surjection $\mathcal{E}(E) \underset{\mathcal{E}(F)}{\otimes} \underset{\sim}{R} \to \underset{\sim}{R}[[E]] \underset{\underset{\sim}{R}[[F]]}{\otimes} \underset{\sim}{R}$, en effet soit

$$\underbrace{\mathcal{E}(E) \to \underset{\sim}{R}[[E]] \to \underset{\sim}{R}[[E]]}_{\gamma} / \mathfrak{M}(\underset{\sim}{R}[[F]]).\underset{\sim}{R}[[E]] \quad ,$$

γ ne dépend visiblement que de la classe modulo $\mathfrak{M}(\mathcal{E}(F))\ \mathcal{E}(E)$, la surjectivité provient du théorème 2.

Exemple : Soit

$$\begin{cases} E = F \oplus E' \quad , \\ x = at + x' \quad , \end{cases}$$

soit $g \in \mathcal{E}(E)$, $g(0) = 0$, supposons que la restriction de g à F est d'ordre $p \geqslant 1$.

On considère $\varphi : E \to E' \oplus \underset{\sim}{R}$, défini par $\varphi(x) = (x', g(x))$. On a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R}) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{E}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underset{\sim}{R}[[E' \oplus \underset{\sim}{R}]] & \xrightarrow{\hat{\varphi}^*} & \underset{\sim}{R}[[E]] \end{array} ,$$

$\hat{\varphi}^*$ coïncide avec le morphisme défini dans l'exemple précédent à partir de $\hat{g}$, série de Taylor de g .

THÉORÈME 3. - <u>Le morphisme</u> φ^* <u>fait de</u> $\mathcal{E}(E)$ <u>un</u> $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R})$<u>-module de type fini</u>.

Admettons provisoirement ce théorème, et démontrons le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - $\mathcal{E}(E)$ <u>est engendré sur</u> $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R})$ <u>par</u> $1 , t , \ldots , t^{p-1}$.

<u>Démonstration</u>. - Soient M le sous-module de $\mathcal{E}(E)$ engendré par $1, t, \ldots, t^{p-1}$, $\hat{M}$ le sous-module de $\underset{\sim}{R}[[E]]$ engendré par $1 , t , \ldots , t^{p-1}$.

Montrons que l'on a un isomorphisme

$$\mathcal{E}(E) \underset{\mathcal{E}(E'\oplus \underset{\sim}{R})}{\otimes} \underset{\sim}{R} \approx \underset{\sim}{R}[[E]] \underset{\underset{\sim}{R}[[E'\oplus \underset{\sim}{R}]]}{\otimes} \underset{\sim}{R} \quad ,$$

l'application est surjective ; considérons son noyau N ; pour montrer que $N = 0$, il suffit de montrer que

$$\mathfrak{M}^\infty(E) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R})\, \mathcal{E}(E) \quad ,$$

N est en effet composé de classes de fonctions plates. Soit $f \in \mathfrak{M}^\infty(E)$, écrivons la formule de Taylor :

$$f(x) = f(x' + at) = f(x') + f'(x').ta + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x').t^2\, a^{(2)} + \ldots + \frac{1}{q!} \alpha(ta , x').t^q \quad ,$$

$\alpha(ta , x')$ étant $\mathcal{C}^\infty$.

$\mathcal{E}(E)$ étant quasi-fini sur $\mathcal{E}(E \oplus \underset{\sim}{R})$, $\mathfrak{M}(\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R}))$ est idéal de définition pour $\mathcal{E}(E)$, ce qui veut dire qu'il existe r entier tel que

$$\mathfrak{M}^r(\mathcal{E}(E)) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R}))\, \mathcal{E}(E) \quad .$$

En particulier,

$$t \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}(E)) \qquad \text{et} \qquad t^r \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R}))\, \mathcal{E}(E) \quad .$$

Soit, pour q assez grand,

$$f(x) = f(x' + at) = f(x') + t\, f'(x').a + \frac{1}{2!}\, t^2\, f^{(2)}(x').a^{(2)} + \dots$$
$$+ \frac{1}{(r-1)!}\, t^{r-1}\, f^{(r-1)}(x').a^{(r-1)} + h(x) \quad ,$$

avec $h(x) \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R}))\, \mathcal{E}(E)$.

$$f(0) = f'(0).a = f^{(2)}(0).a^{(2)} = \dots = f^{(r-1)}(0).a^{(r-1)} = 0 \quad ,$$

puisque f est plate, ce qui veut dire que $f^{(k)}(x').a^{(k)}$ $(k = 0 , \dots , r-1)$, qui est un germe de fonction $\mathcal{C}^\infty$ de x' , est dans $\mathfrak{M}(\mathcal{E}(E'))$, donc dans $\mathfrak{M}(\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R}))$, d'où le résultat : $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{K}))\, \mathcal{E}(E)$.

De l'isomorphisme précédent, on déduit un isomorphisme

$$(\mathcal{E}(E)/M) \underset{\mathcal{E}(E'\oplus \underset{\approx}{R})}{\bigotimes} \underset{\approx}{R} \approx (\underset{\approx}{R}[[E]]/\hat{M}) \underset{\underset{\approx}{R}[[E'\oplus \underset{\approx}{R}]]}{\bigotimes} \underset{\approx}{R} \quad ,$$

mais

$$(\underset{\approx}{R}[[E]]/\hat{M}) \underset{\underset{\approx}{R}[[E'\oplus \underset{\approx}{R}]]}{\bigotimes} \underset{\approx}{R} = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{E}(E)/M) \underset{\mathcal{E}(E'\oplus \underset{\approx}{R})}{\bigotimes} \underset{\approx}{R} = 0 \quad ,$$

puisque $\mathcal{E}(E)/M$ est de type fini, $\mathcal{E}(E)/M = 0$, d'après le lemme de Nakayama, d'où le résultat.

COROLLAIRE (<u>Théorème de division de Weierstrass pour les fonctions différentiables</u>). - $\mathcal{E}(E)$ <u>est un</u> $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R})$-<u>module engendré par</u> $1 , \dots , t^{p-1}$. <u>Soit</u> $z : E' \oplus \underset{\approx}{R} \to \underset{\approx}{R}$, <u>la projection canonique</u>, $z \in \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R})$, <u>on passe au quotient dans</u> $\mathcal{E}(E)$ <u>et</u> $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R})$, <u>suivant les idéaux engendrés respectivement par</u> g <u>et</u> z , $(\varphi^*(z) = g)$,

$$\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R})/(z) \approx \mathcal{E}(E') \qquad \text{(par Taylor)} \quad .$$

<u>On en déduit que</u> $\mathcal{E}(E)/(g)$ <u>est un</u> $\mathcal{E}(E')$-<u>module de type fini engendré par</u> $\bar{1} , \dots , \bar{t}^{p-1}$, <u>ce qui est exactement le théorème de division par</u> g .

Il reste évidemment à démontrer le théorème 3, pour cela on admet préalablement le résultat suivant.

THÉORÈME 5 (<u>Division par un polynôme distingué</u>). - <u>Soient</u> $f \in \mathcal{E}(E)$,

$$\Pi(t , x') \in \mathcal{E}(E')[T] \quad ,$$

<u>distingué (unitaire et à coefficients non dominants dans</u> $\mathfrak{M}(\mathcal{E}(E'))$),

$$\Pi(t , x') = t^p + \sum_{i=1}^{p} t^{p-i}\, a_{p-i}(x') \quad .$$

<u>On peut trouver</u> $q \in \mathcal{E}(E)$ <u>et des</u> $\rho_i \in \mathcal{E}(E')$ $(i = 1 , \dots , p)$ <u>tels que</u>

$$f = \Pi q + \sum_{i=1}^{p} t^{p-i} \rho_i \ .$$

<u>De plus, si</u> f <u>est plate, on peut choisir</u> q <u>et les</u> ρ_i <u>plates</u>.

<u>Démonstration du théorème</u> 3 (il suffit de reprendre la méthode de [6]). – $E = E' \oplus F$,

$$\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R}) \xrightarrow{\varpi^*} \mathcal{E}(E')$$

se factorise en

$$\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R}) \xrightarrow{\subset} \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F) \xrightarrow{\theta^*} \mathcal{E}(E) \ ,$$

le premier morphisme étant l'injection canonique, le second étant défini par

$$\begin{cases} \theta : & E \to E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F \ , \\ \theta : & x \longmapsto (x' \ , \ g(x) \ , \ at) \ . \end{cases}$$

Remarquons que θ^* est surjectif.

On définira plus loin un idéal (P) de $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F)$ contenu dans $\operatorname{Ker} \theta^*$, ϖ^* admettra alors la factorisation

$$\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R}) \xrightarrow{i} \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F)/(P) \xrightarrow{\Pi} \mathcal{E}(E) \ ,$$

Π étant surjectif, il suffira de montrer que i fait de $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F)/(P)$ un $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R})$-module de type fini.

$\underset{\approx}{R}[[E]]$ est un $\underset{\approx}{R}[[E' \oplus \underset{\approx}{R}]]$-module de type fini engendré par $1 , t , \dots , t^{p-1}$. Soit $\hat{N} = \operatorname{Ker} \hat{\theta}^*$, $\hat{\theta}^* : \underset{\approx}{R}[[E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F]] \to \underset{\approx}{R}[[E]]$. Soit $Q \in \hat{N}$,

$$Q = t^p - \sum_{j=0}^{p-1} \hat{c}_j \, t^j \ , \qquad \text{avec } \hat{c}_j \in \underset{\approx}{R}[[E' \oplus \underset{\approx}{R}]] \ ,$$

on peut évidemment s'arranger pour que $\hat{c}_j \in \mathfrak{M}(\underset{\approx}{R}[[E' \oplus \underset{\approx}{K}]])$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F) \arrow[r, "\theta^*"] \arrow[d] & \mathcal{E}(E) \arrow[d] \\ \underset{\approx}{R}[[E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F]] \arrow[r, "\hat{\theta}^*"] & \underset{\approx}{R}[[E]] \end{tikzcd} \ .$$

Soit $N = \operatorname{Ker} \theta$, montrons qu'il existe $P \in N$ qui relève Q : on relève Q en $A \in \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F)$, $\theta^*(A)$ est évidemment plate, on peut la considérer comme une fonction de $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\approx}{R} \oplus F)$ par l'injection

$$\mathcal{E}(E) = \mathcal{E}(E' \oplus F) \xrightarrow{\subset} \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F) \ ,$$

mais $\theta^*(A)$ est plate dans $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F)$, on pose $P = A - \theta^*(A)$, P répond à la question.

Soit (P) l'idéal de $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F)$ engendré par P ; on introduit les nouvelles variables y_j, $j = 0, \ldots, p-1$, soit G l'espace des y_j, de dimension p sur $\underset{\sim}{R}$.

Soit $\pi \in \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F \oplus G)$ défini par

$$\pi = t^r - \sum_{j=0}^{p-1} y_j \, t^j \ .$$

Soit (π) l'idéal de $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F \oplus G)$ engendré par π.

LEMME. - <u>Le morphisme</u> $\gamma : \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus G) \to \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F \oplus G)/(\pi)$, <u>fait de</u> $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F \oplus G)/(\pi)$ <u>un</u> $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus G)$-<u>module de type fini</u>.

$$f = \pi g + \sum_{j=0}^{p-1} h_j \, t^j \ ,$$

avec $h_j \in \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus G)$, d'après le théorème 5 (si f est plate, on peut prendre g et les h_j plates), ce qui démontre le lemme.

Considérons la relation

$$Q = \pi + \sum_{j=0}^{p-1} (y_j - \hat{c}_j) \, t^j \qquad (\text{dans } \underset{\sim}{R}[[E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F \oplus G]]) \ .$$

Si on relève les $\hat{c}_j$ en $c_j \in \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R})$, la différence

$$P - \pi - \sum_{j=0}^{p-1} (y_j - c_j) \, t^j$$

est plate, elle peut donc s'écrire comme ci-dessus :

$$P = \pi + \pi g + \sum_{j=0}^{p-1} k_j \, t^j \ ,$$

avec $k_j \in \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus G)$ et $\hat{k}_j = y_j - \hat{c}_j$ $(j = 0, \ldots, p-1)$.

Le système d'équations $k_j = 0$, $j = 0, \ldots, p-1$, est, d'après le théorème des fonctions implicites, équivalent à

$$y_j = \theta_j(x', z) \ , \qquad \theta_j \in \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R}) \quad (j = 0, \ldots, p-1) \ .$$

On fait la substitution $y_j \to \theta_j$, notons $\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_{p-1})$,

$P(x', z, t)$

$$= \pi(x', z, t, \theta(x', z)) + \pi(x', z, t, \theta(x', z))\, g(x', z, \theta(x', z)) ,$$

$g(x', z, \theta(x', z))$ étant plate, $g(x', z, \theta(x', z)) \in \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R})$. Finalement,

$$\pi(x', z, t, \theta(x', z)) \in (P) .$$

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus G) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F \oplus G)/(\pi) \arrow[d, "\mu"] \\ \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R}) \arrow[r, "i"] & \mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F)/(P) \end{tikzcd} ,$$

λ et μ étant les surjections définies par substitution : $y_j \to \theta_j$, i fait alors de $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R} \oplus F)/(P)$ un module de type fini sur $\mathcal{E}(E' \oplus \underset{\sim}{R})$, ce qui achève la démonstration.

Il reste à démontrer le théorème 5.

Démonstration du théorème 5. - Le théorème résulte du résultat suivant (cf. [7]): Soit

$$\Gamma(t , u) = t^p + \sum_{i=1}^{p} u_i\, t^{p-i} , \quad \text{défini sur } \underset{\sim}{R} \times \underset{\sim}{R}^p .$$

Soit M une variété banachique réelle de classe C^∞ , soient $u_1 , \ldots , u_p \in C^\infty(M)$, alors, pour toute $f \in C^\infty(\underset{\sim}{R} \times M)$, il existe $q \in C^\infty(\underset{\sim}{R} \times M)$ et des

$$h_1 , \ldots , h_p \in C^\infty(M)$$

tels que

$$f = \Gamma q + \sum_{i=1}^{p} h_i\, t^{p-i} .$$

Si f est plate en 0 , le fait de pouvoir choisir q et les h_i plates résulte de la technique de démonstration (par "noyau intégral") ou du Weierstrass formel.

Remarques finales. - On peut démontrer des résultats plus généraux de manière à avoir comme cas particulier le théorème de Malgrange en dimension finie, mais la méthode de Malgrange [6] pour la démonstration du théorème 5 semble assez difficile à étendre ici.

Il me reste à signaler que les démonstrations employées sont en grande partie dues à Henri CARTAN.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNAUDIÈS (Jean-Marie). - Partitions de l'unité dans certains espaces de Banach, Séminaire Lelong : Analyse, 7e année, 1966/67, n° 1.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 5 et 6. - Paris, Hermann, 1964 (Act. scient. et ind., 1308 ; Bourbaki, 30).

[3] CARTAN (Henri). - Polynômes, dans le cours de Mathématiques 2, professé en 1965/66 à la Faculté des Sciences de Paris.

[4] DOUADY (Adrien). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques complets d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, p. 1-98 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).

[5] GUNNING (R. C.) and ROSSI (H.). - Analytic functions of several complex variables. - Englewood Cliff, Prentice-Hall, 1965 (Prentice-Hall Series in modern Analysis).

[6] MALGRANGE (Bernard). - Le théorème de préparation en géométrie différentiable, 1 : Position du problème, Séminaire Cartan : Topologie différentielle, 15e année, 1962/63, n° 11, 14 p.

[7] MATHER (J.). - The division theorems for infinitely differentiable functions and holomorphic functions. - Princeton University (non publié).

[8] RAMIS (Jean-Pierre). - Factorialité des anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur les espaces vectoriels normés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, Série A, p. 904-906.

[9] RAMIS (Jean-Pierre). - Théorèmes de Weierstrass pour les anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur un espace vectoriel normé, Séminaire Lelong : Analyse, 7e année, 1966/67, n° 2.