WALTER THIMM

# Normalisation d'un sous-ensemble analytique complexe

*Séminaire Lelong. Analyse*, tome 4 (1962), exp. n° 7, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962__4__A4_0>

10 avril 1962

# NORMALISATION D'UN SOUS-ENSEMBLE ANALYTIQUE COMPLEXE

par Walter THIMM

1. - Introduction. Le but de cet exposé est de donner une démonstration d'un **théorème (cf. § 7)**, dit théorème de normalisation, énonçant que le normalisé A d'un ensemble analytique A porte une structure d'holomorphie qui en fait un espace analytique complexe. On revient donc sur un exposé de K. OKA. Remarquons que, pour obtenir une notion d'espace analytique, on est guidé par deux principes.

Premièrement, on désire la cohérence du faisceau de structure d'holomorphie, pour pouvoir appliquer la théorie des faisceaux cohérents analytiques avec toutes ses conséquences. Deuxièmement, on demande la normalité du faisceau de structure d'holomorphie pour avoir à sa disposition les deux théorèmes de Riemann sur le prolongement des fonctions holomorphes. Ce n'est que par ces théorèmes qu'on atteint à une théorie suffisante des applications analytiques. La première condition est remplie par les espaces complexes de Serre ; mais ces espaces, en général, ne sont pas normaux. Les premiers exemples d'espaces complexes normaux sans caractère de variété ont été les espaces étalés de Behnke-Stein [2], pour lesquels la cohérence du faisceau de structure a été démontrée postérieurement. La démonstration de Grauert-Remmert [4] utilise le théorème de normalisation dont je vais parler dans cet exposé.

2. - Soit $C^n$ l'espace de $n$ variables complexes. Par $\mathcal{O}$ nous désignons le faisceau d'holomorphie de $C^n$. Soit $A$ un ensemble analytique dans un domaine ouvert de $C^n$. Nous appelons $\alpha$ le faisceau des fonctions holomorphes dans la structure $\mathcal{O}$, s'annulant sur $A$. La structure $\mathcal{O}$ induit sur $A$ une holomorphie avec le faisceau de structure $\mathcal{O}_A$. Toutes ces fonctions sont holomorphes au sens de la structure $\mathcal{O}_A$, c'est-à-dire traces de fonctions holomorphes dans les ouverts de $C^n$. Sur $A$, le faisceau $\mathcal{O}_A$ est isomorphe au faisceau quotient $\mathcal{O}/\alpha$. Comme les faisceaux $\mathcal{O}$ et $\alpha$ sont cohérents, d'après un théorème connu de la théorie des faisceaux cohérents [5], le faisceau $\mathcal{O}_A$ est aussi cohérent. L'ensemble analytique $A$, muni de la structure d'holomorphie $\mathcal{O}_A$ est un espace complexe au sens de SERRE.

3. - Dans un espace complexe au sens de SERRE les deux théorèmes de Riemann sur le prolongement des fonctions holomorphes ne sont pas valables, en général.

Rappelons ces deux énoncés :

1° Soit $M$ un ensemble analytique de codimension $1$ dans une partie ouverte $U$ de $A$. Si la fonction $f$ est holomorphe dans $U - M$, $f \in \mathcal{O}_A(U - M)$, et localement bornée dans $U$, il existe une fonction $f'$, holomorphe dans $U$, $f' \in \mathcal{O}_A(U)$, qui coïncide avec $f$ sur $U - M$.

2° Soit $M$ un ensemble analytique de codimension $2$ dans une partie ouverte $U$ de $A$. Si la fonction $f$ est holomorphe dans $U - M$, il existe dans $U$ une fonction holomorphe $f'$, qui coïncide avec $f$ sur $U - M$.

4. - Maintenant nous construisons un faisceau analytique $\mathfrak{N}$ sur $A$ qui contient $\mathcal{O}_A$ et qui est composé d'anneaux de fonctions, pour lesquelles les deux théorèmes de prolongement sont valables. Soit $U$ une partie ouverte de $A$. Nous disons qu'une fonction $f$ est presque holomorphe dans $U$, s'il y a un ensemble analytique $M$ de codimension $1$ dans $U$, tel que $f \in \mathcal{O}_A(U - M)$, $f$ étant localement bornée dans $U$. La fonction $f$ remplit ainsi les hypothèses du théorème 1 de prolongement. Mais comme ce théorème, en général, n'est pas juste pour un espace complexe de Serre, $f$ ne sera pas holomorphe dans la structure $\mathcal{O}_A$. Alors le faisceau $\mathfrak{N}$ sera défini comme le faisceau des fonctions presque holomorphes. De cette construction résulte sans peine que, pour les fonctions presque holomorphes, les théorèmes de prolongement de Riemann sont valables. D'ailleurs les fonctions presque holomorphes ne sont pas, en général, univalentes. Elles peuvent avoir plusieurs valeurs en des points où $A$ a plusieurs germes premiers.

5. - On peut aussi caractériser le faisceau $\mathfrak{N}$ par une autre méthode. Soit $x$ un point de $A$ et $\mathcal{O}_{A^x}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes de la structure $\mathcal{O}_A$ en $x$. Nous formons l'anneau de fractions $Q_x$ de $\mathcal{O}_{A^x}$ : $Q_x$ est l'ensemble des fractions $p_x/q_x$, où $p_x$ et $q_x$ appartiennent à $\mathcal{O}_{A^x}$, et $q_x$ est non-diviseur de zéro. Partant de $Q_x$, nous construisons la fermeture entière algébrique de $\mathcal{O}_{A^x}$ dans $Q_x$ : $\mathfrak{N}_x$ est l'ensemble des $\varphi_x$ de $Q_x$ qui satisfont à une équation algébrique :

$$\varphi_x^m + a_1\,\varphi_x^{m-1} + \dots + a_m = 0\,, \quad a_\lambda \in \mathcal{O}_{A^x}\,, \quad \lambda = 1\,, \dots, m\,.$$

En général $\mathfrak{N}_x$ aura plus d'éléments que $\mathcal{O}_{A^x}$. Si $\mathfrak{N}_x = \mathcal{O}_{A^x}$, l'ensemble analytique $A$ est appelé normal en $x$. Si $A$ est normal en tous ses points nous dirons : $A$ est normalement plongé.

Avec ces anneaux $\mathfrak{N}_x$ on peut former un faisceau analytique sur $A$. Ce faisceau n'est autre que le faisceau $\mathfrak{N}$ des fonctions presque holomorphes sur $A$. Donc on peut aussi obtenir le faiseeau $\mathfrak{N}$ à partir des anneaux $\mathfrak{N}_x$ qui sont les fermetures entières algébriques des $\mathcal{O}_{A^x}$ dans leurs anneaux de fractions.

6. - Il y a encore une troisième caractérisation du faisceau $\mathfrak{N}$, due à H. CARTAN. On peut construire un revêtement $A^*$ de $A$, tel que toutes les fonctions presque holomorphes sur $A$ deviennent sur $A^*$ des fonctions univalentes. $A^*$ est la normalisation de $A$. Les points de $A^*$ sont les couples $(x, \pi_x)$, où $x$ est un point de $A$ et $\pi_x$ est un germe premier du germe analytique de $A$ en $x$. La projection $\alpha$ de $A^*$ sur $A$ est définie par $\alpha[(x, \pi_x)] = x$. On peut munir $A^*$ d'une topologie telle que $\alpha$ soit une application continue. On peut définir alors sur $A^*$ une structure d'holomorphie, par exemple au moyen d'un préfaisceau $\mathfrak{N}^*$. Soit $U^*$ une partie ouverte de $A^*$ : la fonction $f^*$ sur $U^*$ sera nommée "holomorphe", $f^* \in \mathfrak{N}^*(U^*)$, si elle est continue dans $U^*$ et holomorphe dans la variété complexe des points ordinaires de $U^*$. La relation de ce faisceau $\mathfrak{N}^*$ avec le faisceau $\mathfrak{N}$, que nous venons d'introduire, est la suivante : $\mathfrak{N}$ est le faisceau image d'ordre zéro de $\mathfrak{N}^*$, c'est-à-dire : Soit $U$ une partie ouverte de $A$ et $S$ l'ensemble des points singuliers de $A$ dans $U$. Une fonction $f$ définie dans $U - S$ est presque holomorphe, si et seulement s'il y a sur $U^* = \overset{-1}{\alpha}(U)$ une fonction $f^* \in \mathfrak{N}^*(U^*)$, telle que l'on ait $f = f^* \circ \overset{-1}{\alpha}$ sur $U - S$.

7. - On peut alors établir le théorème principal par deux formulations équivalentes :

THÉORÈME principal.

<u>Première formulation</u>. - <u>La normalisation</u> $A^*$ <u>de</u> $A$, <u>munie de la structure d'holomorphie</u> $\mathfrak{N}^*$, <u>est un espace complexe de Serre</u>.

<u>Deuxième formulation</u>. - <u>Le faisceau analytique</u> $\mathfrak{N}$ <u>de presque holomorphie sur</u> $A$ <u>est un</u> $\mathcal{O}_A$<u>-faisceau cohérent</u>.

La première formulation explique le nom "théorème de plongement normal", car elle signifie : Chaque point $x^* \in A^*$ possède un voisinage $U^*_{x^*}$ avec la propriété suivante : Il y a un système d'éléments de $\mathfrak{N}^*(U^*_{x^*})$ : $\varphi_1^*$ , ... , $\varphi_r^*$ , tel que l'application $\varphi^*$ , donnée par les équations :

$$y_\lambda = \varphi_\lambda^* \qquad , \qquad \lambda = 1 , \dots , r \qquad ,$$

représente $U^*$ topologiquement sur un ensemble analytique $\tilde{A}$ , normalement plongé dans un domaine ouvert de $C^r$ . En outre $\varphi^*$ transporte la structure d'holomorphie induite de $\tilde{A}$ sur $U^*$ , c'est-à-dire : Une fonction $f^*$ sur $U^*$ est holomorphe dans la structure $\mathfrak{N}^*$ si et seulement si $\tilde{f} = f^* \circ \varphi^{-1*}$ est la trace sur $\tilde{A}$ d'une fonction holomorphe dans une partie ouverte de $C^n$ .

La deuxième formulation découle de la première à cause du théorème de Grauert-Remmert [5] sur la cohérence du faisceau image d'ordre zéro qui est valable pour l'application holomorphe non dégénérée $\alpha$ . Dans l'autre sens, on opère sur un voisinage de $x^* \in A^*$ , en choisissant comme système $\varphi_1^*$ , ... , $\varphi_r^*$ , une base de cohérence de $\mathfrak{N}$ au voisinage de $x = \alpha(x^*)$ .

8. – Nous démontrons le théorème de normalisation en démontrant la deuxième formulation.

Toute propriété de cohérence est locale, et se rapporte à un voisinage, convenablement choisi de chaque point de $A$ . Nous prenons un point $x$ de $A$ , quelconque, et prouvons la cohérence de $\mathfrak{N}$ pour un voisinage convenable de $x$ . Maintenant voici quelques simplifications de la situation du théorème.

9. – Premier pas. Sans restreindre la généralité du théorème, nous pouvons supposer que $A$ est irréductible en $x$ .

Soient $\pi_{\lambda x}$ , $\lambda = 1$ , ... , $r$ les germes premiers de $A$ dans $x$ , et soit $U_x$ un voisinage de $x$ , de sorte qu'il y a un représentant analytique $\pi_\lambda$ de chaque $\pi_{\lambda x}$ dans $U_x$ . Désignons par $\mathfrak{N}_\lambda$ le faisceau presque holomorphe sur $\pi_\lambda$ . Alors dans $U_x$ , $\mathfrak{N}$ est la somme directe des $\mathfrak{N}_\lambda$ . Ayant prouvé le théorème pour le cas d'irréductibilité nous avons la cohérence de chaque $\mathfrak{N}_\lambda$ . Il s'ensuit la cohérence de $\mathfrak{N}$ par un théorème sur les faisceaux cohérents ([5], p. 400). Dorénavant, nous supposerons que $A$ est irréductible dans $x$ ; soit $S$ la dimension du germe premier de $A$ dans $x$ .

10. – <u>Deuxième pas</u>. Il est permis de supposer que $A$ <u>est normal en</u> $x$, c'est-à-dire $\mathfrak{n}_x = \mathcal{O}_{A^x}$.

En effet, quand $A$ ne possède pas cette propriété nous utilisons une méthode qui sert en géométrie algébrique pour obtenir la normalisation d'une variété ([7], p. 149). La différence est la suivante : En géométrie algébrique, on obtient par cette méthode un plongement normal de toute la variété, alors qu'ici nous ne normalisons qu'en un point. Mais d'après la démonstration de cohérence, il sera évident qu'un voisinage de ce point aussi sera normalement plongé.

Cette méthode opère ainsi :

Parce que $\mathfrak{n}_x$ est la fermeture entière algébrique de $\mathcal{O}_{A^x}$ dans son corps de fractions, $\mathfrak{n}_x$ est un $\mathcal{O}_{A^x}$-module fini ([6], p. 133), c'est-à-dire : il y a $\eta_\lambda \in \mathfrak{n}_x$, $\lambda = 1, \dots, r$, tel que tout élément $\varphi_x$ de $\mathfrak{n}_x$ possède une représentation

$$\varphi = \alpha_1 \eta_1 + \dots + \alpha_r \eta_r , \qquad \alpha_\lambda \in \mathcal{O}_{A^x} , \qquad \lambda = 1, \dots, r .$$

Nous écrivons ce fait :

$$\mathfrak{n}_x = (\eta_1, \dots, \eta_r)\, \mathcal{O}_{A^x} . \tag{1}$$

Alors nous définissons l'application suivante :

Soient $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées de $C^n$. Posons :

$$\begin{aligned} y_\lambda &= x_\lambda , & \lambda &= 1, \dots, n , \\ y_{n+\mu} &= \eta_\mu , & \mu &= 1, \dots, r . \end{aligned} \tag{2}$$

Cette application transforme un voisinage $U_x$ de $x$, $U_x \subset A$, en un ensemble analytique $A'$ dans une partie ouverte de $C^{n+r}$. Parce que $A$ est irréductible dans $x$, les fonctions $\eta_\lambda$ sont univalentes dans $x$, et ainsi le point $x$ va en un point unique $x'$. Les $n$ premières équations de (2) déterminent une projection $\pi$ de $A'$ sur $U_x$ qui est une application holomorphe, propre et non dégénérée. Les normalisations de $A'$ et de $U_x$ sont identiques. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & A^* \cap \alpha^{-1}(U_x) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\
U_x & & A' \arrow[ll, "\pi"']
\end{tikzcd}
$$

Nous désignons le faisceau d'holomorphie induit sur $A'$ par $\mathcal{O}'_{A'}$ , et le faisceau de presque holomorphie sur $A'$ par $\mathcal{N}'$ . Alors :

$$\mathcal{N} = \alpha_0(\mathcal{N}^*) \ , \qquad \mathcal{N}' = \alpha'_0(\mathcal{N}^*) \ , \qquad \mathcal{N} = \pi_0(\mathcal{N}') \qquad ,$$

où $\alpha_0$ , $\alpha'_0$ , $\pi_0$ expriment le passage au faisceau image d'ordre zéro. $\mathcal{N}$ est cohérent si et seulement si $\mathcal{N}'$ est cohérent, car la cohérence de ces deux faisceaux est équivalente au théorème de normalisation pour $A^*$ (cf. § 7). Par conséquent, il suffit de démontrer la cohérence de $\mathcal{N}'$ dans un voisinage convenable de $x'$ .

Remarquons : $\mathcal{N}'_{x'} = \mathcal{N}_x$ , car ces anneaux sont isomorphes à $\mathcal{N}^*_{x^*}$ , où $x^* = \alpha^{-1}\ x = \alpha'^{-1}\ x'$ .

D'autre part, à cause de (1) nous avons :

$$\mathcal{N}'_{x'} = \mathcal{N}_x = (\eta_1 \ , \ \dots \ , \ \eta_r) \ \mathcal{O}_{\Lambda x} \subset (\eta_1 \ , \ \dots \ , \ \eta_r) \ \mathcal{O}_{\Lambda' x'} \qquad .$$

Cependant les germes de fonctions $\eta\mu$ appartiennent à $\mathcal{O}'_{\Lambda' x'}$ , car ils sont les traces de $y_{n+\mu}$ sur $\Lambda'$ , [cf. (2)]. Ainsi, on a :

$$\mathcal{N}'_{x'} \subset \mathcal{O}'_{\Lambda' x'} \qquad .$$

L'inclusion dans l'autre sens est évidente ; on a : $\mathcal{N}'_{x'} = \mathcal{O}'_{\Lambda' x'}$ , c'est-à-dire : $\Lambda'$ est normal au point $x'$ .

Pour le reste de la démonstration, nous supposons que $\Lambda$ est normal au point $x$ .

11. - Troisième pas. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points singuliers de $\Lambda$ ; $\mathcal{S}$ est un ensemble analytique. Si $\Lambda$ est normal au point $x$ , la dimension du germe d'ensemble $\mathcal{S}_x$ est $\leq S - 2$ . Il s'agit ici d'un résultat purement algébrique, et l'on peut appliquer la démonstration usuelle en géométrie algébrique ([7], p. 143). Une autre démonstration a été donnée par ABHYANKAR dans un travail récent [1].

12. - Quatrième pas. Le point $x$ possède un voisinage $U_x \subset \Lambda$ , pour lequel est défini un dénominateur universel $\delta \in \mathcal{O}_\Lambda(U_x)$ .

La signification d'un dénominateur universel est la suivante : Si $y \in U_x$ et $\varphi_y \in \mathfrak{N}_y$ , il y a une représentation :

$$\varphi_y = \Phi_y/\delta \quad , \qquad \Phi_y \in \mathcal{O}_{\Lambda y} \quad . \tag{3}$$

Cette proposition est le lemme de Osgood. Nous avons besoin de ce lemme seulement au cas d'irréductibilité de $\Lambda$ dans $x$ ; on trouve déjà une démonstration de ce cas spécial dans le livre de OSGOOD ([8], p. 114). Remarquons en outre que le numérateur $\Phi_y$ est déterminé uniquement par $\varphi_y$ .

Nous introduisons alors le $\mathcal{O}_\Lambda$-faisceau de toutes les fonctions qui se présentent dans les quotients (3) comme numérateurs : Pour tout point $y \in U_x$ , soit $q_y$ l'ensemble de toutes les $\Phi_y \in \mathcal{O}_{\Lambda y}$ de sorte que $\Phi_y/\delta \in \mathfrak{N}_y$ ; les anneaux $q_y$ déterminent un $\mathcal{O}_\Lambda$-faisceau $q$ .

13. - Cinquième pas. Les $\mathcal{O}_\Lambda$-faisceaux $\mathfrak{N}/_U$ et $q$ sont isomorphes.

C'est une conséquence immédiate de la relation univoque parmi $\mathfrak{N}/_U$ et $q$ . De cette isomorphie s'ensuit : Le faisceau $\mathfrak{N}/_U$ est cohérent si et seulement si $q$ est cohérent. C'est pourquoi il suffit de démontrer la cohérence de $q$ .

Comme fonction de $\mathcal{O}_\Lambda(U_x)$ le dénominateur universel $\delta$ est la trace d'une fonction holomorphe dans un voisinage convenable de $x$ dans l'espace ambiant $C^n$ ; il est permis de supposer que $V$ est un tel voisinage de sorte que $\delta$ est la trace de la fonction $D$ , holomorphe dans $V$ , sur $\Lambda$ , et que $V \cap \Lambda = U_x$ . Maintenant nous introduisons le faisceau $m = (\alpha , D)$ , engendré par $\alpha$ (cf. § 2) et par $D$ . (En un point $y \in V$ l'anneau $m_y$ est l'ensemble des combinaisons : $a_y + Db_y$ où $a_y \in \alpha_y$ et $b_y \in \mathcal{O}_y$ .) Ce faisceau $m$ est cohérent parce que $\alpha$ est cohérent.

Partant de $\mathfrak{m}$ nous construisons un faisceau $\mathfrak{m}_{S-2}$ ( $S$ = dimension de $A$ dans $x$ ) par un préfaisceau de la manière suivante : Soit $U$ une partie ouverte de $V$. A $\mathfrak{m}_{S-2}(U)$ doivent appartenir toutes les fonctions $f$, holomorphes dans $U$, avec la propriété suivante : Il y a un ensemble analytique $M_f$ dans $U$ de dimension $\leq S-2$, tel que le germe $f_y$ de $f$ au voisinage des points $y \in U - M_f$ appartient à l'anneau $\mathfrak{m}_y$ ; en outre l'ensemble $M_f$ peut dépendre de $f$. Si $W$ est une partie ouverte de $U$, l'application $r_W^U$ de $\mathfrak{m}_{S-2}(U)$ dans $\mathfrak{m}_{S-2}(W)$ est définie comme restriction. Le préfaisceau $[\mathfrak{m}_{S-2}(U), r_W^U]$ détermine un faisceau analytique (dans la structure $\mathcal{O}$ ) $\mathfrak{m}_{S-2}$ sur $V$.

14. - Sixième pas. Soit $q'$ le prolongement trivial [1] de $q$ (d'abord seulement défini sur $U_x$ ) sur $V$. Alors on a :

$$q' = \mathfrak{m}_{S-2}/\alpha \qquad (4)$$

Démonstration.

a. Si $y \in V - A$ nous avons $q'_y = (0)$ ; d'autre part, $(\mathfrak{m}_{S-2}/\alpha)_y = (0)_y$ car $\alpha_y = \mathcal{O}_y$.

b. Supposons : $y \in A \cap V$.

Montrons d'abord :

$$q'_y = q_y \subset (\mathfrak{m}_{S-2}/\alpha)_y \qquad (4a)$$

En effet, soit $p_y \in q_y$. Parce que $q_y \subset \mathcal{O}_{A^y}$ il existe un germe de fonction $P_y \in \mathcal{O}_y$ dont la trace sur $A$ est $p_y$. A cause de la définition de $q_y$ (cf. § 12), la trace de $\varphi_y = p_y/D$ sur $A$, et par conséquent aussi la trace de $P_y/D$ sur $A$, est une fonction presque holomorphe sur un voisinage $U_y$ de $y$ sur $A$. Alors prenons un point ordinaire $z \in U_y$. Un point ordinaire étant aussi un point normal, nous avons $\mathfrak{n}_z = \mathcal{O}_{A^z}$, c'est-à-dire : $\varphi_y$ est la trace

---

[1] C'est-à-dire : $q'_y = (0)$ si $y \in V - A$ et $q'_y = q_y$ si $y \in A \cap V$.

d'une fonction $h_z \in \mathcal{O}_z$ sur $\Lambda$ dans un voisinage de $z$. Il en découle :

$$P_y/D - h_z \equiv 0 \quad \text{sur } \Lambda \qquad ,$$

ou

$$P_y - Dh_z \in \alpha_z \qquad ,$$

et enfin

$$P_y \in m_z \qquad .$$

Cette formule est valable en tous les points ordinaires de $U_y$. Parce que la dimension de l'ensemble analytique des points singuliers $\mathcal{S}$ de $\Lambda$ est $\leq S - 2$ (cf. § 11) à cause de la définition de $m_{S-2}$, nous obtenons : $P_y \in (m_{S-2})_y$. Ainsi $p_y$ représente une classe d'équivalence de $(m_{S-2})_y$ mod $\alpha_y$, c'est-à-dire $p_y \in (m_{S-2}/\alpha)_y$. d'après (4a).

Pour prouver l'inverse, soit

$$(m_{S-2}/\alpha)_y \subset q'_y = q_y \qquad , \tag{4b}$$

nous prenons un élément $\varphi_y \in (m_{S-2}/\alpha)_y$ pour $y \in V \cap \Lambda$. Soit $\Phi_y \in (m_{S-2})_y$ un représentant de la classe d'équivalence $\varphi_y$. Alors la trace de $\Phi_y$ sur $\Lambda$ est $\varphi_y$. A cause de la définition de $m_{S-2}$, il y a un voisinage $U_y$ de $y$ et un ensemble analytique $M$ dans $U_y$ de dimension $\leq S - 2$, tel que, pour tous les points $z \in U_y - M$, on a : $\Phi_y \in m_z$. C'est pourquoi $\Phi_y$ possède une représentation :

$$\Phi_y = a_z + Dh_z \,, \qquad a_z \in \alpha_z \,, \quad h_z \in \mathcal{O}_z \qquad .$$

Si $z \in \Lambda$, il en résulte que la trace de $\Phi_y/D$ sur $\Lambda$ est la trace de $h_z$ sur $\Lambda$ et ainsi appartient à $\mathcal{O}_{\Lambda}{}^z$. $\Phi_y/D$ est holomorphe sur $(U_y - M) \cap \Lambda$ dans la structure $\mathcal{O}_\Lambda$. L'ensemble analytique $M$ étant de dimension $\leq S - 2$, par le deuxième théorème de prolongement de Riemann (cf. § 3) nous concluons : La trace du quotient $\Phi_y/D$ sur $\Lambda$ est une fonction presque holomorphe, ce qui entraîne $\varphi_y = \Phi_y/_\Lambda \in q_y$. Ainsi la formule (4b) est démontrée, et, d'après (4a), (4) l'est aussi.

15. – A cause de (4) la cohérence de $q$ sera prouvée, si nous réussissons à démontrer la cohérence du faisceau $\mathfrak{m}_{S-2}/\alpha$. Pour cela, il suffit de démontrer la cohérence de $\mathfrak{m}_{S-2}$, car $\alpha$ est cohérent. Pour cette démonstration, nous utilisons le théorème suivant ([2]).

THÉORÈME. – Soit donné un sous-faisceau analytique $\mathfrak{m}$ du faisceau d'holomorphie $\mathcal{O}$, défini sur un ensemble ouvert $V$ de $C^n$. Soit $K$ un entier avec $0 \leqslant K \leqslant n-1$. Pour toute valeur de $K$ nous construisons un faisceau analytique $\mathfrak{m}_K$ par le préfaisceau suivant (cf. § 13) :

Soit $U$ une partie ouverte de $V$ ; $\mathfrak{m}_K(U)$ est formé de toutes les fonctions $f$ holomorphes dans $V$, pour lesquelles il existe dans $U$ un ensemble analytique $M_f$ de dimension $\leqslant K$, de sorte que le germe $f_z$ de $f$ en un point quelconque $z \in U - M_f$ appartient à l'idéal $\mathfrak{m}_z$. Si $W$ est une partie ouverte de $U$, l'application $r_W^U$ de $\mathfrak{m}_K(U)$ dans $\mathfrak{m}_K(W)$ sera définie comme restriction.

Alors si le faisceau $\mathfrak{m}$ est cohérent, tous les faisceaux $\mathfrak{m}_K$, $K = 0, 1, \ldots, n-1$, sont cohérents.

La démonstration de ce théorème sera publiée dans un travail qui paraîtra bientôt dans les "Mathematische Annalen".

Supposons ce théorème établi, il s'ensuit la cohérence de $\mathfrak{m}_{S-2}$ et par suite la cohérence de $q$, qui entraîne la cohérence du faisceau $\mathfrak{N}$ des fonctions presque holomorphes ce qui était notre but.

Nous finirons par quelques généralisations. Jusqu'à présent nous avons considéré deux structures d'holomorphie sur $A$ à savoir holomorphie induite $\mathcal{O}_A$ et presque holomorphie $\mathfrak{N}$. Il est aisé de concevoir d'autres structures d'holomorphie qui sont déterminées par un faisceau analytique $\mathfrak{J}$ d'anneaux de fonctions presque holomorphes de sorte que $\mathfrak{J}$ contient $\mathcal{O}_A$ :

$$\mathcal{O}_A \subset \mathfrak{J} \subset \mathfrak{N} \quad . \tag{5}$$

A une telle structure, on peut associer un revêtement $A_{\mathfrak{J}}$ de $A$, tel que la normalisation $A^*$ de $A$ est un revêtement de $A_{\mathfrak{J}}$ ; $A_{\mathfrak{J}}$ est déterminé par la condition que les fonctions de $\mathfrak{J}$ sont univalentes sur $A_{\mathfrak{J}}$. Alors la question

---

([2]) Publié pour la première fois dans [9], p. 7.

fondamentale est la suivante : Quelles propriétés distinguent le revêtement $A_{\mathfrak{J}}$ en cas de cohérence de la structure $A_{\mathfrak{J}}^{2}$ . H. CARTAN a obtenu le résultat suivant [3] :

Le faisceau $\mathfrak{J}$ est cohérent si et seulement si on peut séparer les points de $A_{\mathfrak{J}}$ par les fonctions de $\mathfrak{J}$ .

Une autre condition nécessaire est la suivante :

Soit $X$ un point de $A$ et $\Delta$ un germe premier quelconque de $A$ dans $x$ . Soient $\Delta_1^*$ , $\Delta_2^*$ des germes premiers de $A^*$ aux points $X_1^*$ , $X_2^*$ de $A^*$ , tel que $\alpha(\Delta_1^*) = \alpha(\Delta_2^*) = \Delta$ et $\alpha(X_1^*) = \alpha(X_2^*) = X$ . Il existe un germe premier $\Delta^{**}$ de $A^* \times A^*$ au point $X_1^* \times X_2^*$ , tel que le diagramme des applications suivantes soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta^{**} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\alpha \times \alpha"] & \\
\Delta_1^* \arrow[dr, "\alpha"'] & & \Delta_2^* \arrow[dl, "\alpha"] \\
 & \Delta &
\end{tikzcd}$$

Toutes les applications sont holomorphes, propres, non-dégénérées.

Si $X^* \times Y^*$ est un point quelconque de $\Delta^{**}$ dans l'application de $A^*$ sur $A_{\mathfrak{J}}$ , les deux points $X^*$ et $Y^*$ sont à identifier. Un tel arrangement des identifications sera nommé "un arrangement holomorphe au point $X$ ". Alors on peut démontrer :

Si la structure d'holomorphie $\mathfrak{J}$ est cohérente, le revêtement associé $A_{\mathfrak{J}}$ résulte de la normalisation $A^*$ par un arrangement des identifications qui est holomorphe en tous les points de $A$ .

L'inverse en général n'est pas valable. On peut associer à tout revêtement $A_{\mathfrak{J}}$ de $A$ , tel que $A^*$ soit un revêtement de $A_{\mathfrak{J}}$ , une structure d'holomorphie maximale qui contient toutes les fonctions presque holomorphes qui sont univalentes sur $A_{\mathfrak{J}}$ .

Alors on obtient le résultat suivant :

Si le revêtement $A_{\mathfrak{J}}$ résulte de la normalisation $A^*$ par un arrangement des identifications qui est holomorphe en tous les points de $A$ , la structure maximale de $A_{\mathfrak{J}}$ est cohérente.

Une application de cette proposition est le théorème suivant :

La structure d'holomorphie de toutes les fonctions presque holomorphes qui sont univalentes sur l'ensemble analytique $A$ , est cohérente.

Ce résultat peut être obtenu aussi à partir du théorème cité plus haut de H. CARTAN.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] ABHYANKAR (S.). - Concepts of order and rank on a complex space and a condition of normality, Math. Annalen, t. 141, 1960, p. 171-192.

[2] BEHNKE (H.) und STEIN (K.). - Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Annalen, t. 124, 1951, p. 1-16.

[3] CARTAN (Henri). - Quotients of complex analytic spaces, Contributions to function theory, International colloquium on function theory [1960. Bombay]; p. 1-15. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1961.

[4] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Komplexe Räume, Math. Annalen, t. 136, 1958, p. 245-318.

[5] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Bilder und Urbilder analytischer Garben, Annals of Math., t. 68, 1958, p. 393-443.

[6] GRÖBNER (Wolfgang). - Moderne algebraische Geometrie die idealtheoretischen Grundlagen. - Wien und Innsbruck, Springer-Verlag, 1949.

[7] HODGE (W. V. D.) and PEDOE (D.). - Methods of algebraic geometry. Vol. III : Book 5 : Birational geometry. - Cambridge, at the University Press, 1954.

[8] OSGOOD (W. F.). - Lehrbuch der Funktionentheorie. Zweiter Band, erste Lieferung. 2te Auflage. - Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

[9] THIMM (Walter). - Über Moduln und Ideale von holomorphen Funktionen mehnerer Variablen, Math. Annalen, t. 139, 1959, p. 1-13.