Séminaire Lelong.
Analyse

Gerhard K. Kalisch

# Théorème de Titchmarsh sur la convolution et opérateurs de Volterra

*Séminaire Lelong. Analyse*, tome 5 (1962-1963), exp. nº 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962-1963__5__A5_0>

# THÉORÈME DE TITCHMARSH SUR LA CONVOLUTION ET OPÉRATEURS DE VOLTERRA

par Gerhard K. KALISCH

## 1. Introduction.

Le but de cette conférence est de démontrer l'équivalence étroite entre le théorème de Titchmarsh sur la convolution (théorème T) et le théorème énonçant que les sous-espaces invariants de la transformation $Vf = \int_0^x f(y)\, dy$ dans $L_2(0 , 1)$ sont les sous-espaces $L_2(a , 1)$ de $L_2(0 , 1)$ des fonctions s'annulant p. p. dans $(0 , a)$ pour tout $a \in [0 , 1]$ (théorème U ; [1], [2]), et d'en tirer plusieurs conséquences. La première partie de cette conférence fait partie d'un article qui vient de paraître [5] (équivalence entre les théorèmes T et U) ; l'exposé en a été amékioré dans un article de SCHREIBER [7], et je donne ici un exposé unifié. J'ai démontré ailleurs [2] que bien d'autres transformations intégrales ont les mêmes sous-espaces invariants que V , généralisant ainsi le théorème de Titchmarsh. Dans la deuxième partie de cette conférence j'étudie deux conséquences de l'équivalence des théorèmes T et U que j'espère publier sous peu avec tous les détails.

1° Le cas des sommes directes finies des transformations du type V constitue le début d'une étude de multiplicité (théorème $U_\Sigma$) et conduit à une généralisation banale du théorème T (qui semble toutefois devenir plus intéressante pour des sommes infinies).

2° Le cas des produits tensoriels est lié à la généralisation du théorème T due à LIONS [6], et porte sur les espaces invariants par rapport aux n transformations d'intégration par rapport aux n variables de l'espace $R_n$ de n dimensions réelles (théorème $V_\Pi$).

## 2. Notations.

Le support $S(f)$ d'une fonction est le complémentaire du plus grand ouvert où $f = 0$ p. p. L'enveloppe convexe de $S(f)$ est notée $C(f)$ . Si $S(f) \subset (0 , 1)$, on a

$$\overline{f \star g} = \int_0^x f(x - y)\, g(y)\, dy = g \star f$$

et on a

$$(g \star f) \star h = g \star (f \star h) \quad .$$

Si $T$ est une transformation définie dans un espace $L_p$, on appelle un sous-espace $K \subset L_p$ (toujours fermé!) invariant par rapport à $T$ si $TK \subset K$. Si $T$ est une transformation définie dans $L_p$, elle est dite cyclique s'il existe une fonction $f \in L_p$, dite cyclique, telle que l'ensemble des fonctions $f$, $Tf$, $T^2 f$, ... et de leurs combinaisons linéaires est dense dans $L_p$. On définit d'une manière analogue la cyclicité de plusieurs transformations : le sous-espace de $L_p$ qui contient $f$, et qui est invariant par rapport à toutes les transformations à la fois, est l'espace $L_p$. La fonction $\equiv 1$ est notée $u$. Finalement, nous notons les deux formules suivantes où $\tilde{f}(x) = \overline{f(1-x)}$ :

$$((f \star g), h) = (f, (g \star \tilde{h})^{\sim})$$

$$(f \star g)(1) = (f, \tilde{g})$$

où $(f, g)$ est le produit scalaire $\int_0^1 f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$ de $f$ et $g$.

3. Le théorème de Titchmarsh [8] dont il s'agit est le suivant. Nous en donnons deux énoncés équivalents, le deuxième (LIONS [6]) étant valable encore pour les espaces $R_n$.

THÉORÈME T.

a. Soient $f$ et $g$ dans $L_1(0, 1)$ ; soit $f \star g = 0$ p. p. dans $(0, 1)$ ; soit $0 \in S(f)$. Alors $g = 0$ p. p.

b. Soient $f$ et $g$ dans $L_1(-\infty, \infty)$ à supports compacts. Alors $C(f \star g) = C(f) + C(g)$ ...

THÉORÈME U. - Les sous-espaces $L_2(a, 1)$ de $L_2(0, 1)$ sont les seuls sous-espaces invariants par rapport à $V$.

L'analogue du théorème U pour les espaces complexes $C_n$ à dimension finie $n$ est le théorème énonçant que les seuls sous-espaces de $C_n$ invariants par rapport à la transformation $V_n$ donnée par la matrice nilpotente ayant $1$ dans toutes les places au-dessous de la diagonale principale et $0$ ailleurs sont les sous-espaces $C_n(j)$ de $C_n$ qui sont composés de vecteurs ayant les $j$ premieres coordonnées $0$. Comme dans le cas du théorème $U$, les sous-espaces invariants sont donc totalement ordonnés. La forme jordanienne des $V_n$ ayant une seule "cellule", nous appelons le fait que les sous-espaces sont totalement ordonnés, l'"Unicellularité".

L'équivalence des théorèmes T et U.

1° T $\Longrightarrow$ U. - Il suffit de démontrer que $f$ est cyclique pour $V$ si et seulement si $0 \in S(f)$ ; il est même évident qu'il suffit de démontrer que si $0 \in S(f)$, alors $f$ est cyclique pour $V$. Soit

$$g \perp f \ , \quad Vf = u \star f \ , \quad V^2 f = u^{*,2} \star f \ , \ \ldots \quad ,$$

c'est-à-dire

$$(u^{*,n} \star f \ , \ g) = 0 \quad (n \geqslant 0) \quad \text{ou} \quad (u^{*,n} \ , \ (f \star \tilde{g})^{\sim}) = 0$$

d'où

$$f \star g = 0 \ \text{p. p. puisque} \ u^{*,n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \ t^{n-1} \quad .$$

Le théorème T et l'hypothèse $0 \in S(f)$ entraînent $g = 0$ p. p.

C. Q. F. D.

La démonstration reste valable pour $L_p(0 \ , \ 1)$, $1 \leqslant p < \infty$.

2° U $\Longrightarrow$ T. - On établit la version a. Les hypothèses du théorèmes entraînent

$$[u^{*,n} \star (u \star f) \star (u \star g)] \ (1) = 0 = (u^{*,n} \star (u \star f) \ , \ (u \star g)^{\sim})$$

c'est-à-dire $(u \star g)^{\sim}$ est orthogonale au sous-espace cyclique par rapport à $V$ engendré par $u \star f$ d'où, comme $0 \in S(u \star f)$, le théorème U entraîne $(u \star g)^{\sim} = 0$, donc $u = 0$ p. p.

C. Q. F. D.

La démonstration du théorème U, qui n'utilise pas le théorème T, contitue donc bien une nouvelle démonstration du théorème de Titchmarsh. Comme cette démonstration, inspirée par celle de BRODSKI, se trouve dans [5] il est inutile de l'exposer ici.

L'unicellularité est vraie pour des transformations intégrales dont le noyau est plus compliqué que celui de $V$ [2]. La démonstration T $\Longrightarrow$ U dépend en effet de ce que la seule fonction dans $L_p$ orthogonale à $u$, $u^{*,2}$, ... est la fonction nulle. Il est donc clair que la transformation $V^n$ dont le noyau est $\frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1}$ est encore unicellulaire. On est amené par conséquent à considérer les transformations $V_k f = k \star f$ qui sont continues dans $L_p$ si $k \in L_1(0 \ , \ 1)$ et même les transformations $V_K f = \int_0^x K(x \ , \ y) \ f(y) \ dy$. L'auteur a démontré [2] le théorème suivant qui constitue donc bien une généralisation du théorème T.

THÉORÈME U'.

1° Si $k \in L_1(0, 1)$ ; si, dans un voisinage de $0$, $k(t) = t^m k_0(t)$, où $m$ est en entier non-négatif, $k_0(0) \neq 0$ et $k_0 \in C_2$, alors $V_k$ est unicellulaire.

2° Si $K(x, y) = (x - y)^m K_0(x, y)$, où $m$ est un entier non-négatif, $K_0$ est suffisamment régulière, et $K_0(x, x) =$ constante multipliée par une fonction positive, alors $V_K$ est unicellulaire.

La démonstration est basée en partie sur le fait que certains $V_k$ et $V_K$ sont similaires à des transformations $cV^m$ et sur l'unicellularité de ces dernières. Le théorème U' soulève la question de savoir si, pour $k \in L_1(0, 1)$ et $0 \in S(k)$, ou même pour $k$ continue, il est vrai que $V_k$ est encore unicellulaire, en d'autres termes, si l'ensemble des fonctions $k$, $k^{*,2}$, ... et de leurs combinaisons linéaires est dense dans $L_p(0, 1)$. Le théorème de Titchmarsh dit que les transformations $V_k$ n'ont pas de spectre ponctuel ; la généralisation que nous avons en vue précise que $V_k$ est même unicellulaire. Un exemple [2] montre que la dernière hypothèse faite sur $K_0$ dans le théorème U' est indispensable.

## 4. Sommes directes.

Considérons la somme directe

$$L^n = L_p(0, 1) \oplus \dots \oplus L_p(0, 1) = \sum_{j=1}^{n} \oplus L_p(0, 1)$$

de $n$ espaces $L_p(0, 1)$, et dans $L^n$ la transformation $V_n = V \oplus \dots \oplus V$ qui est somme directe de $n$ transformations $V$ : nous écrirons

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} \oplus V \quad .$$

L'ensemble des sous-espaces invariants par rapport à $V_n$ n'étant plus totalement ordonné, on peut apporter de l'ordre dans cet ensemble compliqué en y ajoutant l'idée de multiplicité. Nous disons qu'un sous-espace $L$ de $L^n$ invariant par rapport à $V_n$ a multiplicité uniforme $m$ si $L = \sum_{j=1}^{m} \oplus L_j$ où les $L_j$ sont invariants par rapport à $V_n$, où la restriction $V_L$ de $V$ à $L$ est égale à la somme directe $\sum_{j=1}^{m} \oplus V_{nj}$ (où les restrictions $V_{nj}$ de $V_n$ à $L_j$ sont similaires entre eux) et où $m$ ne dépend que de $L$ et de $V_n$. Nous avons la généralisation suivante du théorème U.

THÉORÈME $U_\Sigma$. - L'ensemble des sous-espaces de $L^n$, invariants par rapport à $V_n$ et ayant multiplicité uniforme $n$, est totalement ordonné : c'est l'ensemble

$$L^n(a\,,\,1) = \sum_{j=1}^{n} \oplus L_p(a\,,\,1) \qquad (a \in [0\,,\,1]) \quad .$$

La démonstration est basée sur une analyse des sous-espaces de $L^n$, invariants par rapport à $V_n$ et déterminés par $n$ vecteurs de fonctions $f^k = (f_j^k)_{j=1}^n$. Il se trouve que $n$ vecteurs déterminent $L^n$ si et seulement si $0 \in S(\mathrm{Det} \star (f_j^k))$ où $\mathrm{Det} \star (f_j^k)$ est le "déterminant de convolution" des $f_j^k$ qui est formé comme le déterminant ordinaire, mais où l'on emploie la convolution au lieu de la multiplication. La généralisation (banale) du théorème T dont nous avons besoin ici est la suivante : étant donnés une matrice $F = (f_j^k)$, $n \times n$ de fonctions $f_j^k \in L_1(0\,,\,1)$ et un vecteur $h = (h_j)$ de fonctions $h_j \in L_1(0\,,\,1)$, alors $F \star h = 0$ p. p. dans $(0\,,\,1)$ (où $\star$ est le produit matriciel convolutionnaire de la matrice $F$ et du vecteur $h$) et $0 \in S(\mathrm{Det} \star (f_j^k))$ entraînent $h = 0$ p. p. La démonstration utilise aussi [3] et [4]. La généralisation devient bien moins banale lorsque l'on songe à l'étendre à des indices infinis.

## 5. Produits tensoriels.

Considérons l'espace $L^{(n)} = L_p(I_n)$ $(1 \leq p < \infty)$ où $I_n$ est le cube-unité dans l'espace réel $R_n$ à $n$ dimensions. Soit

$$(V_j\, f)(x_1\,,\, \ldots\,,\, x_n) = \int_0^{x_j} f(x_1\,,\, \ldots\,,\, \xi_j\,,\, \ldots\,,\, x_n)\, d\xi_j \quad (j = 1\,,\, \ldots\,,\, n) \quad .$$

Alors la version B du théorème T, étendue à $n$ dimensions entraîne le théorème suivant.

THÉORÈME $U_\Pi$. - Tout sous-espace $L$ de $L^{(n)}$ invariant par rapport à toutes les $V_j$ $(j = 1\,,\, \ldots\,,\, n)$ est cyclique. Le sous-espace $L$, déterminé par $f$, est égal à $L^{(n)}(B(f))$ qui est composé de toutes les fonctions de $L^{(n)}$ s'annulant p. p. au dehors de $B(f)$ où $B(f) = (S(f) + I_n) \cap I_n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIXMIER (Jacques). - Les opérateurs permutables à l'opérateur intégral, Portug. Math., t. 8, 1949, p. 73-84.

[2] KALISCH (G. K.). - On similarity, reducing manifolds, and unitary equivalence of certain Volterra operators, Annals of Math., t. 66, 1957, p. 481-494.

[3] KALISCH (G. K.). - On isometric equivalence of certain Volterra operators, Proc. Amer. math. Soc., t. 12, 1961, p. 93-98.

[4] KALISCH (G. K.). - On similarity invariants of certain operators in $L_p$, Pacific J. Math., t. 11, 1961, p. 247-252.

[5] KALISCH (G. K.). - A functional analysis proof of Titchmarsh's theorem on convolution, J. math. Anal. and Appl., t. 5, 1962, p. 176-183.

[6] LIONS (Jacques-Louis). - Supports dans la transformation de Laplace, J. Anal. math., Jérusalem, t. 2, 1952, p. 369-380.

[7] SCHREIBER (Michel). - Remark on a paper of Kalisch, J. math. Anal. and Appl. (à paraître).

[8] TITCHMARSH (E. C.). - The zeros of certain integral functions, Proc. London math. Soc., t. 25, 1926, p. 283-302.