Séminaire Lelong.
Analyse

André Martineau

Supports des fonctionnelles analytiques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 5 (1962-1963), exp. nº 4, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962-1963__5__A4_0>

SUPPORTS DES FONCTIONNELLES ANALYTIQUES

par André MARTINEAU

Introduction. - Pour situer les définitions et théorèmes qui vont suivre nous allons rappeler quelques-uns des faits bien connus de la représentation de Polya ([1], chapitre V), d'une fonction entière de type exponentiel.

Soit $F(u)$ une fonction entière de type exponentiel d'une variable complexe $|F(u)| \leq A \times \exp B|u|$. Si D est une demi-droite issue de l'origine, on considère l'intégrale de Laplace

(1) $$\int_D F(u) \exp(- z.u).du = \varphi_D(z) \quad .$$

Cette intégrale est absolument uniformément convergente dès que $\operatorname{Arg}(z.u) < \pi/2$ et $|z| > B$, c'est-à-dire dans un demi plan P_D, et définit une fonction $\varphi_D(z)$ holomorphe et tendant vers zéro à l'infini. Si l'on change de droite, on constate aisément que

$$\varphi_D(z) = \varphi_{D'}(z) \qquad \text{pour tout} \quad z \in P_D \cap P'_D \quad ,$$

donc $\varphi_{D'}$ réalise le prolongement analytique de φ_D dans $P_{D'}$. Prenant toutes les droites issues de l'origine, on obtient ainsi une fonction $\varphi(z)$ holomorphe en z pour $|z| > B$, tendant vers zéro à l'infini, appelée transformée de Laplace de F (pour la généralisation à n variables, cf. [7], page 1847, § 4).

D'un autre côté, soit $\psi(z)$ une fonction holomorphe dans le complémentaire (que nous supposons connexe) d'un compact du plan complexe et tendant vers zéro à l'infini.

Si C est un contour simple autour de l'infini dans le domaine d'existence de ψ, on définit, pour toute fonction entière f, le nombre

$$T_\psi(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z).\psi(z)\, dz$$

qui ne dépend manifestement pas de C ; ceci définit une forme linéaire continue, $f \to T_\psi(f)$, sur l'espace des fonctions entières sur $\underset{\sim}{C}$, noté $H(\underset{\sim}{C})$, muni de la topologie d'espace vectoriel localement convexe métrisable et complet de la convergence uniforme sur tout compact.

Il est bien connu, et il est aisé de vérifier, que toute forme linéaire continue sur $H(\underset{\sim}{C})$ peut ainsi être représentée par une telle fonction ψ, et que la correspondance $T_\psi \longleftrightarrow \psi$ est linéaire biunivoque ; ψ s'appelle habituellement l'indicatrice de T_ψ, et on dit que T_ψ est une fonctionnelle analytique.

Soit K un compact du plan complexe. Nous désignons par $H_K(\underset{\sim}{C})$ l'espace vectoriel topologique localement convexe, limite inductive des espaces $H(\omega)$, ω parcourant la famille des voisinages ouverts de K . On vérifie alors aisément que dire que ψ se prolonge analytiquement au complémentaire de K revient à dire que T_ψ se prolonge par continuité à l'espace $H_K(\underset{\sim}{C})$.

Si ψ se prolonge analytiquement au complémentaire d'un convexe compact [et il existe un tel plus petit compact, soit Γ], on peut prendre C aussi voisin qu'on veut de la frontière de ce convexe. La représentation de Polya pour F est l'expression suivante :

(2) $$F(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \psi(z).\exp(z.u)\, dz$$

ou, si l'on veut

$$F(u) = T_{\psi,z}(\exp(z.u)) \quad .$$

On dit que F est la transformée de Fourier-Borel de T_ψ . Grâce à cette transformation, les propriétés de continuité de T_ψ se traduisent en propriétés de croissance de F , car, en effet, si $h(u) = \sup\limits_{z\in K} \operatorname{Re}(z.u)$, on voit qu'on a, pour tout $\varepsilon > 0$, une majoration

(3) $$|F(u)| < K(\varepsilon)\ \exp(h(u) + \varepsilon|u|)$$

lorsque T_ψ se prolonge à $H_K(\underset{\sim}{C})$.

La fonction positivement homogène $h(u)$ ne dépend en fait que de l'enveloppe convexe de K ; donc les inégalités du type (3) ne traduisent pas toutes les propriétés de continuité de T_ψ , ou, ce qui revient ici au même, de prolongement analytique pour ψ .

Dans la suite de cet exposé, il ne sera plus question de fonctions entières de type exponentiel, nous travaillerons avec les formes linéaires T_ψ .

Les deux aspects de la question, à savoir croissance des fonctions entières de type exponentiel et propriétés de continuité des fonctionnelles analytiques sont développés en détail dans un mémoire à paraître [8]. Aussi nous nous contenterons ici d'esquisser les démonstrations qui sont développées dans les paragraphes 1 et 2 du chapitre I du mémoire cité. L'aspect "indicatrices et transformation de Laplace" sera publié ultérieurement, cf. déjà [6] et [7].

1. Définitions.

Si V est une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, Ω un ouvert de V , $H(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans Ω muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. C'est un espace $(\mathcal{S})$ de Schwartz (pour les références d'espaces vectoriels topologiques nous renvoyons à [2], et pour la théorie des espaces de Schwartz à [4]).

L'ensemble des formes linéaires continues sur $H(V)$ forme un espace $H'(V)$ du type dual de Fréchet-Schwartz (nous disons $(\mathcal{DS})$) pour la topologie forte de dual. Tout élément de $H'(V)$ sera dit <u>fonctionnelle analytique définie sur</u> V.

Si K est une partie de V, on désigne par $H_{K,I}(V)$ l'espace $\varinjlim_{\omega} H(\omega)$ dans la catégorie des espaces localement convexes. Lorsque K est ouvert, on a $H_{K,I}(V) = H(K)$; lorsque K est compact, $H_{K,I}(V)$, que nous noterons $H_K(V)$, est un espace $(\mathcal{DS})$, [4] ; dans ce dernier cas, on peut appeler fonctionnelle analytique définie sur K tout élément du dual $H'_K(V)$ de $H_K(V)$, et cet espace, muni de sa topologie de dual fort, est du type $(\mathcal{S})$.

DÉFINITION 1. - <u>Soient</u> T <u>une fonctionnelle analytique définie sur</u> V, K <u>une partie ouverte (resp. compacte) de</u> V. <u>Nous dirons que</u> T <u>est portable par</u> K, <u>ou encore, nous dirons que</u> K <u>est un porteur de</u> T, <u>si</u> T <u>se prolonge par continuité à</u> $H_K(V)$.

Cette notion a les propriétés de transitivité souhaitées. Pour les propriétés d'intersection, qui seraient suggérées par le cas des mesures, cf. § 3.

DÉFINITION 2. - <u>Soit</u> μ <u>une mesure à support compact définie sur</u> V. <u>On dit que</u> μ <u>représente</u> T, <u>ou que</u> T <u>est représentable par</u> μ, <u>si, quel que soit</u> $f \in H(V)$, <u>on a</u>

$$T(f) = \int_V f \, d\mu \quad .$$

Si Ω est ouvert, l'espace $\mathcal{C}(\Omega)$ des fonctions continues dans Ω muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact contenant $H(\Omega)$ comme sous-espace vectoriel topologique, une application du théorème de Hahn-Banach conduit à la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - T <u>est portable par</u> Ω <u>si et seulement si elle est représentable par une mesure à support compact dans</u> Ω.

On en déduit que, si K est un porteur compact de T, quel que soit ω voisinage ouvert de K, il existe μ_ω à support compact dans ω qui représente T. Nous introduisons alors la définition suivante :

DÉFINITION 1' [1]. - T <u>est faiblement portable par</u> K , <u>ou</u> K <u>est un porteur faible de</u> T , <u>si, quel que soit</u> ω <u>voisinage de</u> K , T <u>est portable par</u> ω .

Cette notion a les propriétés de transitivité souhaitées.

Soit Ψ une famille de compacts de V satisfaisant à la condition suivante :

Si K_α est une famille filtrante décroissante pour l'inclusion d'éléments de Ψ , $\bigcap_\alpha K_\alpha \in \Psi$.

DÉFINITION 3. - <u>Un compact de</u> V <u>est dit</u> Ψ<u>-support (faible) de</u> T <u>s'il est minimal parmi les compacts de</u> Ψ <u>et porteurs (faibles) de</u> T .

Nous supposerons dans la suite que <u>V est une variété de Stein</u> (cf. [9], exposé 9, définition 2) ; nous rappelons que, si K est un compact de V , on désigne par enveloppe de K dans V l'ensemble $\tilde{K}$ des y de V tels que, pour toute f , $f \in H(V)$, on ait :

$$|f(y)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)| \qquad \tilde{K} \text{ est un compact de } V \quad .$$

Lorsque Ω est un ouvert de V , on peut aussi montrer que

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{K \subset \Omega} \tilde{K} \quad \text{est un ouvert de } V \quad .$$

On a les propriétés suivantes :

$$H(V) \quad \text{a une image dense dans} \quad H_{\tilde{K}}(V)$$

$$H(V) \quad \text{a une image dense dans} \quad H(\tilde{\Omega})$$

(conséquences du théorème 4 de IX, [9]).

L'application de restriction définie de $H_{\tilde{K}}(V)$ dans $H_K(V)$ (resp. de $H(\tilde{\Omega})$ dans $H(\Omega)$) est injective ; elle identifie $H(\tilde{\Omega})$ à un sous-espace fermé de $H(\Omega)$, l'adhérence de l'image de $H(V)$ dans $H(\Omega)$.

Malheureusement dans le cas compact nous ne savons montrer que ceci : $H_{\tilde{K}}(V)$ identifié à un sous-espace de $H_K(V)$ est égal à l'ensemble des limites de suites de Cauchy d'éléments de l'image de $H(V)$ dans $H_K(V)$. Nous savons conclure que $H_{\tilde{K}}(V)$ est un sous-espace-fermé de $H_K(V)$ seulement sous l'hypothèse supplémentaire que voici, dont nous ne savons pas si elle est réalisée en général.

---

[1] Nous différons ici de l'exposé oral où nous avions affirmé l'équivalence de la définition 1 et de la définition 1'.

Hypothèse Φ . - Il existe une famille équicontinue Φ d'applications du segment $[0\ ,\ 1]$ dans $\tilde{K}$ telle que, pour tout $y \in \tilde{K}$, il existe $\varphi \in \Phi$ avec $\varphi(0) = y$, $\varphi(1) \in K$ (pour les démonstrations, cf. [8]).

Cette hypothèse Φ est manifestement vraie lorsque K contient la frontière de $\tilde{K}$ (ce qui règle le cas de la dimension 1), de même par exemple, si K est la frontière distinguée de $\tilde{K}$ lorsque $\tilde{K}$ est un polyèdre analytique défini par un système fini d'équations $|f_i| < 1$ où $f_i \in H(V)$, et aussi dans tous les cas que nous avons su examiner ($K =$ réunion finie de polydisques, de convexes, ...), et enfin, bien entendu, lorsque $K = \tilde{K}$.

DÉFINITION 4. - On dit que K est un bon compact de V quand $H_{\tilde{K}}(V)$ est fermé dans $H_K(V)$.

De cette définition et des propriétés rappelées plus haut, utilisant le fait que nos espaces sont, soit du type $\mathfrak{F}$, soit du type $(\mathfrak{D}\mathfrak{S})$, le théorème de Hahn-Banach permet de tirer le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 1. - T est portable par Ω ouvert de V (respectivement par K bon compact de V) (respectivement faiblement portable par K compact de V) si et seulement si elle est portable par $\tilde{\Omega}$ (respectivement par $\tilde{K}$).

Dans le cas où K est un bon compact, on déduit du théorème 1 que les définitions 1 et 1' sont équivalentes.

2. Existence des supports.

Par le lemme de Zorn, on déduit immédiatement de nos définitions la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - Si T est faiblement portable par un élément de Ψ , elle admet un Ψ-support faible.

Nous disons d'un compact K égal à son enveloppe qu'il est $H(V)$-convexe. Or la famille des compacts $H(V)$-convexes de V est une famille Ψ ; en outre T , d'après la proposition 1, admettant au moins un porteur compact, admet au moins un porteur $H(V)$-convexe. Donc, toute fonctionnelle analytique admet au moins un support $H(V)$-convexe.

THÉORÈME 2. - Si K compact non vide de V est $H(V)$-convexe, l'ensemble des fonctionnelles analytiques qui admettent K comme seul support $H(V)$-convexe est non maigre dans $H'_K(V)$.

Démonstration. - On utilise les deux lemmes ci-dessous :

LEMME 1. - Soit δ_{x_0} la fonctionnelle analytique $(f \to f(x_0))$. Tout porteur $H(V)$-convexe de δ_{x_0} contient x_0.

Démonstration du lemme. - On vérifie, si $K = \widetilde{K}$ et si $x_0 \notin K$, que $\widetilde{K \cup x_0} = K \cup x_0$. Alors, si K est un porteur de δ_{x_0}, on peut trouver un voisinage de K, ω, et un voisinage de x_0, ω', tels que :

$$\omega \cap \omega' = \Phi$$

et tels que $H(V)$ soit dense dans $H(\omega \cup \omega')$ (lemme du théorème 3 de l'exposé 9, de [9]).

Si μ est une mesure qui représente δ_{x_0} dans ω, et si on considère la fonction e, qui vaut 0 dans ω, et 1 dans ω', et une suite f_n d'éléments de $H(V)$ convergent vers cette fonction, il vient

$$\delta_{x_0}(e) = 1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int 0 . d\mu = 0 \quad ,$$

ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

LEMME 2. - Pour tout compact K, $H(V)$-convexe, la famille L, de compacts $H(V)$-convexes qui ne contiennent pas K, admet une base dénombrable.

Démonstration. - Soit $\{x_n\}$ une suite de points dense dans V, et $V_{n,m}$ un système fondamental de voisinages compacts de x_n. On peut prendre comme base de notre famille de compacts (soit L_n) les ensembles de la forme :

$$\widetilde{\bigcup_{i=i_1,\ldots,i_n} V_{i,m(i)}}$$

qui ne contiennent pas K.

C. Q. F. D.

Démonstration du théorème. - Si $L \not\supset K$, $H'_K(V) \cap H'_L(V)$ est un sous-espace maigre de $H'_K(V)$. En effet, il admet une topologie du type $(\mathfrak{F})$ plus fine que la topologie de $H'_K(V)$ et, par le lemme 1, étant distinct de $H'_K(V)$, il est maigre d'après un théorème connu de Banach.

Ensuite, d'après le lemme 2, faisant parcourir à L la famille des L_n, on voit que les fonctionnelles analytiques de $H'_K(V)$ portables par un autre compact $H(V)$-convexe que K, et ne le contenant pas, sont incluses dans une réunion dénombrable de sous-espaces maigres, donc forment un ensemble maigre.

C. Q. F. D.

REMARQUE 1. - Dans le cas de la dimension 1, vu la correspondance rappelée dans l'introduction entre T_ψ et ψ où ψ est holomorphe dans $\complement K$ (cas du plan complexe), nous voyons que cette propriété n'est qu'une traduction du fait que les fonctions non prolongeables hors d'un ouvert Ω forment un ensemble non maigre dans $H(\Omega)$. Cette traduction est encore possible dans $\underset{\sim}{C}^n$ lorsque $\complement K$ est une réunion d'hyperplans complexes d'après le théorème 1, page 2889, de [7], mais dans ce cas le théorème ici démontré contient néanmoins davantage car un compact peut être minimal parmi les porteurs de T dont le complémentaire est réunion d'hyperplans complexes sans être minimal parmi ses porteurs $H(\underset{\sim}{C}^n)$-convexes.

THÉORÈME 3. - Soient Ω un ouvert (respectivement un compact) de V, et T une fonctionnelle analytique (faiblement) portable par Ω. Si les Ω_i sont des ouverts (respectivement des compacts) de V tels que :

$$\widetilde{\bigcup_i \Omega_i} \supset \widetilde{\Omega}$$

($i \in I$ un ensemble fini dans le cas compact, dénombrable au plus dans le cas ouvert), alors il existe des fonctionnelles analytiques T_i, T_i portable par Ω_i, $T_i = 0$ pour presque tout i, telles que :

$$T = \sum_i T_i$$

(si les Ω_i sont compacts on suppose que $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ est un bon compact).

Démonstration. - Soient $\Omega' = \bigcup_i \Omega_i$, et ρ_i l'homomorphisme de restriction à Ω_i de $H_{\Omega'}(V)$, ${}^t\rho_i$ l'homomorphisme transposé.

Nous considérons l'application σ définie de

$$H_{\Omega'}(V) \quad \text{dans} \quad E = \prod_i H_{\Omega_i}(V) \quad \text{par} \quad f \to \prod_i \rho_i(f)$$

et sa transposée ${}^t\sigma$ définie de $E' = \sum_i H'_{\Omega_i}(V)$ dans $H'_{\Omega'}(V)$ par

$$(\ldots, \theta_i, \ldots) \to \sum_i {}^t\rho_i(\theta_i), \quad \theta_i \in H'_{\Omega_i}(V) \qquad .$$

Sous nos hypothèses, E est soit du type $(\mathfrak{F})$ (cas ouvert), soit du type $(\mathfrak{DS})$. Aussi, pour montrer que ${}^t\sigma$ est surjective il suffit de montrer que σ est injective et d'image fermée ce qui est immédiat.

Soit donc T (faiblement) portable par Ω, alors, d'après le théorème 1, T est portable par $\widetilde{\Omega}$, donc a fortiori par $\bigcup_i \widetilde{\Omega}_i$, donc par $\bigcup_i \Omega_i$. Donc il existe $\Theta_i \in H'_{\Omega_i}(V)$ telle que $T = \sum {}^t\rho_i(\Theta_i)$. Si T_i est la restriction de Θ_i à $H(V)$, T_i est portable par K_i, et on a

$$T = \sum_i T_i$$

C. Q. F. D.

Notons que les hypothèses sont susceptibles de variantes, par exemple si $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ on n'a pas besoin, lorsqu'on fait l'hypothèse que T est portable par Ω, de supposer que Ω soit un bon compact.

REMARQUE 2. – Dans le cas de $\underset{\sim}{C}$ la correspondance entre T_ψ et ψ transforme ce théorème en un "théorème de décomposition des singularités". Si ψ est holomorphe dans un ouvert connexe de la sphère de Riemann contenant ∞, si K est complémentaire de cet ouvert, si $K_1, \dots, K_N$ sont N compacts tels que la composante connexe de ∞ dans $\underset{\sim}{C} \cup \infty$ de $\complement(\bigcup_{j=1}^{N} K_j)$ soit incluse dans $\complement K$, alors il existe des ψ_j, ψ_j holomorphes dans $\complement K_j$, telles que $\psi = \sum_j \psi_j$ dans $\complement K$.

Cette traduction peut aussi être faite à plusieurs variables, sous l'hypothèse indiquée dans la remarque 1 sur K et les K_j.

3. Intersection des supports.

Il est aisé de voir que, malgré le théorème 2, même en supposant dans $\underset{\sim}{C}^n$ que ψ est la famille des convexes, ou la famille des produits $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n$ de convexes de $\underset{\sim}{C}$, il n'y a pas d'unicité du Ψ-support. Le problème qui se pose naturellement est donc celui de l'intersection de deux porteurs : Si T est portable par K_1 et par K_2 est-elle portable par $K_1 \cap K_2$? L'analyse de notre démonstration de [10] nous a conduit au problème suivant à la solution duquel est consacré le paragraphe.

Problème. – Soient T une fonctionnelle analytique, $K_0, \dots, K_p$ $(p+1)$ porteurs de T (ouverts ou compacts simultanément) ; si T est portable par chaque $L_j = K_0 \cap \dots \cap K_{j-1} \cap K_{j+1} \cap \dots \cap K_p$ est-elle portable par $L_0 \cap L_1 \cap \dots \cap L_p$?

Dans la suite nous supposerons toujours pour simplifier que les K_j, $j = 0, 1, \dots, p$, sont tous $H(V)$-convexes, et que V est connexe de dimension n. Alors, la réponse ne dépend que de $K = \bigcup_{j=0}^{p} K_j$ et de sa situation dans V comme nous allons le montrer (ceci reste vrai pour $p = 1$ sans hypothèse sur les K_j).

Notons $K_{j_0 \dots j_r}$ pour $K_{j_0} \cap \dots \cap K_{j_r}$; on a $L_j = K_{0 \dots \hat{j} \dots p}$.

Nous introduisons l'espace

$$E^r = \prod_{(j_0, \dots, j_r)} H_{K_{j_0 \dots j_r}}(V)$$

et l'application ∂^r du cobord, définie de E^r dans E^{r+1} par

$$\left[\partial^r(\dots, \varphi_{j_0 \dots j_r}, \dots)\right]_{i_0 \dots i_{r+1}} = \sum_{h=0}^{r+1} (-1)^h \varphi_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{r+1}} .$$

$\varphi_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{r+1}}$, désignant la restriction de $\varphi_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{r+1}}$, élément de $H_{K_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{r+1}}}(V)$ à $K_{i_0 \dots i_h \dots i_{r+1}}$ (restriction de germe!) en sorte que cette somme ait un sens.

(Pour les notions cohomologiques, nous renvoyons à [3] ou à [5].)

Un système de fonctions $(\varphi)_{j_0 \dots j_r}$ est un r-cocycle si $\partial^r(\dots, \varphi_{j_0 \dots j_r}, \dots) = 0$, c'est un r-cobord s'il appartient à $\partial^{r-1} E^{r-1}$.

L'ensemble des r-cocycles est un sous-espace fermé F^r de E^r, l'ensemble des r-cobords est un sous-espace B^r de F^r.

Nous désignerons par cocycle <u>entier</u> de E^r un système $(\dots, \varphi_{i_0 \dots i_r}, \dots)$ où $\varphi_{i_0 \dots i_r}$ provient d'un élément de $H(V)$ pour tout système d'indices $(i_0, \dots, i_r)$ et par cobord <u>entier</u> de E^r un cobord provenant de l'image de

$$\prod_{\substack{(i_0 \dots i_{r-1}) \\ i<i_1<\dots<i_{r-1}}} H_{i_0 \dots i_{r-1}}(V)$$

$H_{i_0 \dots i_{r-1}}(V)$ désignant l'image de $H(V)$ dans $H_{K_{i_0 \dots i_{r-1}}}(V)$; F_e^r, B_e^r désignant l'espace des r-cocycles entiers, des r-cobords entiers.

DÉFINITION 5. - <u>On dit que</u> K <u>satisfait à la condition de Runge d'ordre</u> r <u>si les</u> r-<u>cocycles entiers sont denses dans les</u> r-<u>cocycles</u>.

Justification de la définition. - Nous allons nous contenter d'esquisser les raisonnements lorsque $K = \bigcup_j K_j$ est réunion d'ouverts.

D'abord, si $r = 0$, les 0-cocycles sont les éléments de $H(K)$ et la condition de Runge d'ordre zéro signifie que $H(V)$ est dense dans $H(K)$. Faisons l'hypothèse supplémentaire que la cohomologie du nerf de recouvrement de K par les K_j à valeurs dans $\underset{\sim}{C}$ soit triviale (2) (ce qui est vrai pour nos applications ; c'est-à-dire lorsque $T \neq 0$ et que la réponse au problème est positive).

Il en est alors de même pour tout système de coefficients constants à valeurs dans un espace vectoriel complexe. En particulier pour $r \geqslant 1$ tout r-cocycle entier est un r-cobord entier. Alors il revient au même de dire que les r-cobords entiers sont denses dans les r-cocycles, ou de dire que les r-cocycles entiers sont denses dans les r-cocycles. Mais chaque K_j étant $H(V)$-convexe $H_{i_0 \dots i_{r-1}}(V)$ est dense dans $H_{K_{i_0 \dots i_{r-1}}}(V)$, donc il revient au même de dire que la condition de Runge d'ordre r est satisfaite, ou de dire que les r-cobords sont denses dans les r-cocycles. Nous allons voir que cette dernière condition ne dépend pas du recouvrement. En effet, pour passer d'un système de cocycles $(\dots, \varphi_{i_0 \dots i_r}, \dots)$ à une forme d"-fermée ω_r de type $(0, r)$ on procède ainsi, [3] page 213, (pour la d"-cohomologie, cf. [5]) : On peut trouver des fonctions indéfiniment dérivables $\theta_{i_0 \dots i_{r-1}}$ telles que $\theta_{i_0 \dots i_{r-1}}$ soit définie dans $K_{i_0 \dots i_{r-1}}$ et telles que

$$\partial^{r-1}(\dots, \theta_{j_0 \dots j_{r-1}}, \dots) = (\dots, \varphi_{i_0 \dots i_r}, \dots) \quad .$$

Les deux espaces, E^r et l'espace analogue $\mathcal{E}^r$, obtenu en remplaçant $H_{K_{i_0 \dots i_{r-1}}}(V)$ par $\mathcal{E}(K_{i_0 \dots i_{r-1}})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans $K_{i_0 \dots i_{r-1}}$, étant du type $(\mathfrak{F})$, à toute suite φ^n de r-cocycles tendant vers zéro dans F^r on peut associer une suite θ^n de (r-1)-cocycles tendant vers zéro dans $\mathcal{E}^{r-1}$.

On forme ensuite $d'' \theta^n$; d'' étant une application continue, on obtient une suite tendant vers zéro de $(r - 1)$-cocycles du recouvrement à valeurs dans le faisceau des germes de formes à coefficients indéfiniment différentiables de type $(0, 1)$ et d"-fermés, etc., donc finalement on associe, à une suite φ^n de r-cocycles du recouvrement à valeurs dans le faisceau des germes de fonctions

(2) La définition 4 et ce qui suit valent aussi lorsque $T = 0$.

holomorphes, une suite ω_r^n de formes à coefficients indéfiniment dérivables définies sur K, de type $(0, r)$ et d''-fermée ; de même en sens inverse.

Mais, si un cocycle φ est limite de cobords ψ^n, les $\varphi^n \equiv \varphi - \psi^n$ forment une suite de cocycles cohomologues, tendant vers zéro, et réciproquement, donc il leur correspond une suite de formes ω_r^n, d''-fermées sur K, et d''-cohomologues, qui tendent vers zéro et de même dans l'autre sens. En conséquence, dire qu'un cocycle est limite de cobords dans F^r peut s'exprimer à l'aide des formes différentielles à coefficients indéfiniment différentiables de type $(0, r)$ et d''-fermées, qui leur correspondent dans la construction de l'isomorphisme de Leray-Dolbeault.

Ceci justifie notre définition en montrant que, sous nos hypothèses, la condition de Runge ne dépend en fait que de K. Si on change de recouvrement, elle est encore satisfaite.

En plus, exprimée à l'aide de formes différentielles, nous pourrons, plus loin, la transformer par des raisonnements de dualité.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3. - <u>Pour que toute</u> T <u>différente de</u> 0, <u>portable par chaque</u> L_j, <u>soit portable par</u> $L_0 \cap \dots \cap L_p$, <u>il est nécessaire que la condition de Runge d'ordre</u> $p-1$ <u>soit satisfaite pour</u> K.

<u>Démonstration</u>. - Si B^{p-1} n'est pas dense dans F^{p-1}, il existe une forme linéaire continue sur F^{p-1} non identiquement nulle, mais nulle sur B^{p-1}. Nous pouvons la prolonger en une forme linéaire continue non identiquement nulle sur E^{p-1}. Si les $T_{0\dots\hat{i}\dots p}$ sont les composantes de cette forme linéaire, en utilisant le fait que

$$\sum_{h=0}^{p} (-1)^h T_{0\dots\hat{h}\dots p}(\varphi_{0\dots\hat{h}\dots p}) = 0 \quad \text{lorsque} \quad (\dots, \varphi_{0\dots\hat{h}\dots p}) \in B_e^{p-1},$$

on vérifie aisément que $(-1)^h T_{0\dots\hat{h}\dots p}$ est le prolongement d'une fonctionnelle analytique T à $H_{K_{0\dots\hat{h}\dots p}}(V)$. Mais si T se prolonge à $H_{K_{0\dots p}}(V)$, on en déduit que, pour toute $\varphi \in F^{p-1}$, on a :

$$\sum_{h=0}^{p} (-1)^h T_{0\dots\hat{h}\dots p}(\varphi_{0\dots\hat{h}\dots p}) = T_{0\dots p}\Big(\sum_{h=0}^{p} (-1)^h \varphi_{0\dots\hat{h}\dots p}\Big) = T_{0\dots p}(0) = 0$$

ce qui n'est pas pas construction. Donc T est bien une fonctionnelle analytique non égale à zéro, portable par chaque $L_j = K_{0\dots\hat{j}\dots p}$, et non portable par

$$K_{0\ldots p} = L_0 \cap L_1 \cap \ldots \cap L_p \quad .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 4. - Si K satisfait à la condition de Runge d'ordre $p-1$, pour que toute T, portable par chaque L_j, soit portable par $L_0 \cap \ldots \cap L_p$, il est nécessaire et suffisant que $\partial E^{p-1} = H_{K_{0\ldots p}}(V)$, c'est-à-dire que toute fonction φ holomorphe au voisinage de $L_0 \cap \ldots \cap L_p$ soit de la forme $\varphi = \sum_{j=0}^{p} \varphi_j$ où φ_j est holomorphe au voisinage de L_j.

Démonstration. - Pour la suffisance, on pose

$$T(\varphi) = \sum_{h=0}^{p} (-1)^h \, T_{0\ldots\hat{h}\ldots p}(\varphi_{0\ldots\hat{h}\ldots p}) \qquad \text{où} \quad \varphi = \sum_{h=0}^{p} (-1)^h \, \varphi_{0\ldots\hat{h}\ldots p} \quad .$$

La condition de Runge assure que cette somme ne dépend pas de la décomposition choisie. On vérifie, par le graphe fermé, que ∂ est un homomorphisme.

Pour la nécessité, on remarque qu'une solution positive du problème entraîne que $H'_{K_{0\ldots p}}(V)$ a une image fermée dans E'^{p-1} par l'application ${}^t\partial$, et ${}^t\partial$ étant injectif, nos espaces étant soit du type $(\mathfrak{F})$ de Schwartz soit du type $(\mathfrak{DS})$, on en déduit que ∂ est surjective.

C. Q. F. D.

Ces propositions s'appliquent ainsi :

THÉORÈME 4. - Si $K = \bigcup_{j=0}^{p} K_j$ est $H(V)$-convexe $(p \geq 1)$ alors toute fonctionnelle analytique T, portable par chaque L_j, est portable par $L_0 \cap \ldots \cap L_p$.

Démonstration. - D'après des théorèmes de H. CARTAN ([9], exposé 19, proposition 4, dans le cas où K est compact, théorème B, exposé 18, dans le cas où K est ouvert), on sait que

$$H^s(K\,;\,\mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad s \geq 1 \quad ,$$

$\mathcal{O}$ désignant le faisceau des germes de fonctions holomorphes.

Mais la cohomologie de K peut se calculer à l'aide des cocycles de Čech décrits précédemment ([3], chapitre 2, § 5, et page 213) donc, pour $p \geq 2$, $H^{p-1}(K\,,\,\mathcal{O}) = 0$ entraîne que K satisfait à la condition de Runge d'ordre $p-1$, et $H^p(K\,,\,\mathcal{O})$ entraîne la condition de la proposition 4. Pour $p = 1$, on a $H^1(K\,;\,\mathcal{O}) = 0$ et K étant $H(V)$-convexe $H(V)$ a une image dense dans $H_K(V)$. La condition de Runge d'ordre zéro est donc satisfaite.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 5. - Si $p \geqslant n+1$ (n est la dimension de V), toute fonctionnelle analytique T , portable par chaque L_j , est portable par $L_0 \cap \dots \cap L_p$.

Démonstration. - On sait alors que $H^{p-1}(K\ ,\ \mathcal{O}) = 0 = H^p(K\ ,\ \mathcal{O})$.

PROPOSITION 5. - Une condition nécessaire et suffisante (les K_j sont supposés $H(V)$-convexe et ouverts), pour que K satisfasse à la condition de Runge d'ordre $(p-1)$ et pour que $H^p(K\ ,\ \mathcal{O}) = 0$, et que $H_*^{n-p+1}(K\ ,\ \Omega^n) = 0$.

Démonstration. - Ω^n désigne le faisceau des germes de n-formes à coefficients holomorphes sur V . Le symbole $\star$ remplace la qualification "à support compact".

Suffisance : On désigne par $\mathcal{E}^r$ l'espace du type $(\mathcal{F})$-Schwartz des formes différentielles à coefficients indéfiniment différentiables définies sur K et de type $(0\ ,\ r)$, $\mathcal{F}^r$ désignera le noyau de $d'' : \mathcal{E}^r \to \mathcal{E}^{r+1}$. Un raisonnement analogue à ceux de J.-P. SERRE dans [11], cf. [6], montre que $d''\mathcal{E}^{p-1}$ est fermé dans $\mathcal{E}^p$. On en déduit, par exemple à l'aide du procédé employé dans la justification de la définition 4, que $\partial^{p-1} : E^{p-1} \to E^p$ a une image fermée.

Mais, $\overline{\partial^{p-1}\ E^{p-1}} = E^p$ comme on le voit aisément. Donc l'hypothèse entraîne en fait la surjectivité de ∂^{p-1} , donc $H^p(K\ ,\ \mathcal{O}) = 0$.

D'autre part, on constate que $d''\mathcal{E}^{p-1}$ a pour polaire $\mathcal{E}^{n,n-p+1}$ l'ensemble des formes de type $(n\ ,\ n-p+1)$ d''-fermées à coefficients $\star$-distributions définies sur K , et que $\mathcal{F}^{p-1}$ a pour polaire $d''\mathcal{E}^{n,n-p}$ où $\mathcal{E}^{n,n-p}$ désigne l'ensemble des formes de type $n\ ,\ n-p$ à coefficients $\star$-distributions définies sur K .

Donc $\underline{H^{n-p+1}}(K\ ,\ \Omega^n) = 0$ entraîne que ces deux polaires sont égaux ; en conséquence, $\overline{d''\mathcal{E}^{p-2}} = \mathcal{F}^{p-1}$ par le théorème des bipolaires, ce qui d'après la justification de la définition 4, montre que K satisfait à la condition de Runge d'ordre $p-1$.

Nécessité : $H^p(K\ ,\ \mathcal{O}) = 0$ entraîne que $d'' : \mathcal{E}^{p-1} \to \mathcal{E}^p$ est un homomorphisme, donc que son transposé $d'' : \mathcal{E}_*^{n,n-p} \to \mathcal{E}_*^{n,n-p+1}$ a une image fermée ; ensuite, les $(p-1)$-cobords et les $(p-1)$-cocycles ont même polaire, la condition de Runge d'ordre $(p-1)$ étant satisfaite, donc $d''\mathcal{E}_*^{n,n-p}$ est dense dans $\mathcal{E}_*^{n,n-p+1}$, et comme il en est un sous-espace fermé

$$d''\mathcal{E}_*^{n,n-p} = \mathcal{E}_*^{n,n-p+1}\ ,\quad \text{c'est-à-dire}\quad H_*^{n-p+1}(K\ ,\ \Omega^n) = 0 \quad .$$

C. Q. F. D.

En corollaire, on obtiendra le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - V étant de dimension $n \geqslant 1$, toute fonctionnelle analytique T, portable par chaque intersection n à n de $(n+1)$ compacts (ou ouverts) K_j, est portable par $K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_n$ si et seulement si $\complement K$ est connexe.

Démonstration. - Dans le cas où V, variété de Stein, est de dimension 1, la condition de Runge d'ordre zéro est satisfaite si et seulement si $\complement K$ est connexe.

Supposons $n > 1$. On a la suite exacte ([3], théorème 4.10.1), supposant K ouvert,

$$0 \to H^0_*(K, \Omega^n) \to H^0_*(V, \Omega^n) \to H^0_*(\complement K, \Omega^n) \xrightarrow{\partial} H^1_*(K, \Omega^n) \to H^1_*(V, \Omega^n) \to \quad .$$

On sait que $H^0_*(V, \Omega^n)$ $0 = H^1_*(V, \Omega^n)$, [11], et on a $H^0_*(\complement K, \Omega^n) = 0$ si et seulement si $\complement K$ n'a pas de composante connexe compacte, donc $H^1_*(K, \Omega^n) = 0$ si et seulement si $\complement K$ n'a pas de composante connexe compacte. D'après la proposition 5, K satisfait donc à la condition de Runge d'ordre $(n-1)$ si et seulement si $\complement K$ n'a pas de composante connexe compacte, puisque $H^n(K, \mathcal{O}) = 0$.

Le résultat est démontré dans le cas ouvert ; le cas compact s'en déduit immédiatement.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. Si T, une fonctionnelle analytique, est portable dans E par les intersections n à n de $(n+1)$-convexes K_j, $0 \leqslant j \leqslant n$, T est portable par $K_0 \cap \ldots \cap K_n$.

Démonstration. $\complement K = \bigcup_{j=0}^{n} K_j$ est connexe!

REMARQUE 3. - Les constantes obtenues sont les meilleurs possibles. Dans la dimension complexe 1, on voit que si T est portable par deux convexes elle est portable par leur intersection ; donc il existe un convexe compact minimal, unique porteur de T. C'est le convexe dit diagramme conjugué de l'indicatrice de croissance de $\mathfrak{F}T$, [1]. Le corollaire du théorème 6 dans le dimension 1, s'interprète ainsi comme une version duale du théorème de Phragmèn-Lindelöf qu'on exprimerait en disant : Si T est portable par deux demi-espaces, elle est portable par leur intersection. La version, en termes de croissance du corollaire du théorème 6, apparaît donc comme une généralisation naturelle à n-variables du théorème de Phragmèn-Lindelöf.

Le théorème 4, lorsque $p = 1$, joue un rôle important dans le mémoire [8]. Nous en donnons plusieure applications, au problème de l'intersection d'un porteur et d'un sous-ensemble analytique "quasi-porteur", à l'étude de l'intersection de porteurs de formes convenables, à l'étude des fonctionnelles analytiques admettant un support réel [pour un exemple montrant la prudence nécessaire dans ce domaine, voir l'exemple de [10], exposé 19, page 19-06].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOAS (R. P.). - Entire functions. - New York, Academic Press, 1954 (Pure and applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, 5).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 3-5. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229 ; Eléments de Mathématique, 18).

[3] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg, 13).

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$, Sum. Bras. Math., t. 3, 1954, p. 57-123.

[5] MALGRANGE (Bernard). - Lectures on the theory of functions of several complex variables. - Bonbay, Tata Institute of fundamental Research, 1958 (Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics, 13).

[6] MARTINEAU (André). - Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 214, 13 p.

[7] MARTINEAU (André). - Indicatrices des fonctionnelles analytiques et inversion de la transformée de Fourier-Borel par la transformation de Laplace, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 1845-1847 et p. 2888-2890.

[8] MARTINEAU (André). - Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, Journal d'Analyse mathématique, Jérusalem, t. 11, 1963 (à paraître).

[9] Séminaire CARTAN, t. 4, 1951/52 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. - Paris, Ecole Normale Supérieure, 1952 (multigraphié).

[10] Séminaire SCHWARTZ, t. 4, 1959/60 : Unicité du problème de Cauchy, division des distributions. - Paris, Secrétariat mathématique, 1960 (multigraphié).

[11] SERRE (Jean-Pierre). - Un théorème de dualité, Comment. Math. Helvet., t. 29, 1955, p. 9-26.