Séminaire Lelong.
Analyse

Jean-Pierre Kahane

Séries de Fourier lacunaires sur des compacts sans intérieur

Séminaire Lelong. Analyse, tome 3 (1961), exp. nº 6, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A5_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
3e année, 1961, n° 6

21 février 1961

SÉRIES DE FOURIER LACUNAIRES SUR DES COMPACTS SANS INTÉRIEUR

par Jean-Pierre KAHANE

1. Mesures associées à une suite Λ.

Λ désigne une suite régulière dans R^p, $d\mu$ une mesure ($\geqslant 0$) à support compact dans R^p. On dit que $d\mu$ est associée à Λ si, pour les polynômes trigonométriques

$$s(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, e^{i\lambda x} \qquad \text{(somme finie)}$$

il y a équivalence des normes

$$\left(\int |s|^2\, d\mu\right)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad \left(\sum |a(\lambda)|^2\right)^{1/2} .$$

Ainsi un domaine associé à Λ (Cf. exposé n° 3) est un domaine dont la mesure caractéristique est associée à Λ.

Voici quelques propriétés.

(1) Si $d\mu$ est associée à Λ, il existe un $\alpha > 0$ tel que $d\mu$ reste associée à toute suite α-voisine de Λ.

(2) Si $d\mu$ est associée à Λ, et si $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ n'est pas total dans $L^2(d\mu)$, on peut ajouter un point à Λ (mais non un point quelconque) de façon que $d\mu$ reste associée à la nouvelle suite.

2. Problèmes sur les compacts et les suites.

Soit K un compact dans R^p, et soit C_Λ l'ensemble des fonctions ps. p. continues de spectre contenu dans Λ. Il est naturel de chercher des conditions, soit suffisantes, soit nécessaires, pour que :

α. K porte une mesure associée à Λ ;

β. Si $f \in C_\Lambda$ est nulle sur K, on ait $f \equiv 0$;

γ. Si $f \in C_\Lambda$ est analytique sur K, f soit analytique ;

δ. Si $f \in C_\Lambda$ est $\geqslant 0$ sur K, on ait $f \equiv 0$.

Il est facile de voir que

	$\alpha \Longrightarrow \beta$		$\alpha \not\Longrightarrow \delta$
$\beta \not\Longrightarrow \alpha$		$\beta \not\Longrightarrow \gamma$	$\beta \not\Longrightarrow \delta$
$\gamma \not\Longrightarrow \alpha$	$\gamma \Longrightarrow \beta$		
	$\delta \Longrightarrow \beta$		

Les cases vides non diagonales représentent des questions ouvertes. En particulier, nous ne savons pas si $\alpha \Rightarrow \gamma$. Mais $\alpha \Rightarrow \gamma'$:

γ' : Si f indéfiniment dérivable appartenant à C_Λ est analytique sur K , f est analytique.

3. Conditions suffisantes pour α .

Soit $N(r)$ le nombre maximum de points de Λ (suite régulière) dans une boule de rayon r . On dira que Λ satisfait une condition de rareté uniforme (ϖ) si l'on a $N(r) < \varpi(r)$, ϖ étant une fonction donnée telle que $\varpi(r) = o(r^p)$ $(r \to \infty)$. On appellera dimension de Λ , la borne inférieure des β tels que $N(r) = O(r^\beta)$ $(r \to \infty)$.

EXEMPLES.

1° La suite $\{1^\nu , 2^\nu , 3^\nu , \ldots\}$ sur la droite a pour dimension $\frac{1}{\nu}$.

2° Si Λ est contenue dans une variété linéaire de dimension q , $\dim \Lambda \leqslant q$.

3° Si Λ est le produit direct de deux suites, sa dimension est la somme des dimensions des suites facteurs.

Suivant une terminologie classique, on dit que K est de multiplicité au sens strict, ou de type M_0 , s'il porte une mesure $d\mu$, dont la transformée de Fourier

$$M(u) = \int e^{iux}\, d\mu(x)$$

tend vers zéro quand $|u| \to \infty$. Nous appellerons $\mathfrak{F}$-dimension de K la borne supérieure des α tels qu'il existe une $d\mu$ portée par K dont la transformée de Fourier satisfait

$$M(u) = O(|u|^{-\alpha/2}) \quad (u \to \infty) \quad .$$

EXEMPLES.

1° Une sphère dans R^p a pour $\mathfrak{F}$-dimension $p-1$. Il en est de même pour des surfaces convexes assez régulières. Mais non pour la surface d'un cube, qui a pour $\mathfrak{F}$-dimension zéro.

2° Si la $\mathfrak{F}$-dimension de K est supérieure à p, K est de mesure positive. Si elle est supérieure à $2p$, K admet des points intérieurs, et sa $\mathfrak{F}$-dimension est infinie.

3° Sur la droite ($p = 1$), la $\mathfrak{F}$-dimension ne dépasse jamais la dimension de Hausdorff (= dimension capacitaire). Mais il existe (SALEM), pour chaque α entre 0 et 1, des compacts K dont la dimension de Hausdorff et la $\mathfrak{F}$-dimension égalent toutes deux α.

On a les résultats dans le sens suivant, relatifs à la condition α.

(3) Si K est de type M_0, et si Λ satisfait une condition de rareté uniforme (ϖ) convenable, K et Λ sont associés au sens de α.

(4) Si K a pour $\mathfrak{F}$-dimension a, si Λ a pour dimension b, et si $a > 2b$, K est associé au sens de α à toute sous-suite de Λ dont le pas est assez grand, et Λ est associée à tout homothétique assez grand de K.

Nous ne savons pas si les hypothèses de (4) suffisent pour que K et Λ soient associés, ne fût-ce qu'au sens de β.

4. Conditions suffisantes pour δ.

On s'attachera uniquement maintenant au cas $p = 1$, et à des suites $\{\lambda_n\}$ symétriques et lacunaires à la Hadamard :

(H) $$\lambda_1 > C > 0 , \quad \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > q > 1 \qquad (n = 1 , 2 , \ldots) \quad .$$

Les polynômes trigonométriques s seront réels, et s'écriront

(S) $$s(x) = \sum r_n \cos(\lambda_n x + \varphi_n) \quad .$$

Mary WEISS [1] a montré récemment (1959) que, pour tout $q > 1$, et tout intervalle I, il existe $C = C(q, I)$ et $k = k(q, I)$ tels que, moyennant (H) et (S)

[1] WEISS (Mary). - Concerning a theorem of Paley on lacunary power series, Acta Math., t. 102, 1959, p. 225-238.

$$\Sigma\, r_n < k \sup_{x\in I} s(x) \quad .$$

Le résultat est très facile pour $q > 3$, et difficile pour $q \lesssim 3$. Il donne une condition du type δ , quand on prend pour K un intervalle.

Nous allons restreindre l'étude à des compacts K du type de Cantor, ainsi construits. On donne ξ entre 0 et $1/2$. On supprime de $[0\,,\,1]$ l'intervalle $]\xi\,,\,1-2\,\xi[$ (1re étape) et à chaque étape on opère sur chaque intervalle restant, par homothétie, la même amputation. L'ensemble E_ξ obtenu est de mesure nulle, et de dimension de Hausdorff $\frac{\log 2}{-\log \xi}$. L'ensemble triadique de Cantor correspond à $\xi = \frac{1}{3}$. On a les résultats suivants :

(5) Si $\xi > 1/3$, il existe q , k et C , tels que, moyennant (H) et (S), on ait

$$\Sigma\, r_n < k \sup_{x\in E_\xi} s(x) \quad .$$

(6) Si $q > 1$, il existe ξ , k et C avec la même conclusion.

Les démonstrations sont élémentaires, mais exigent quelque soin (surtout celle de (6), due à Mme WEISS).

L'hypothèse $\xi > \frac{1}{3}$ dans (5) est essentielle. En effet, aucune sous-suite, si lacunaire soit-elle, de $\{1\,,\,3\,,\,3^2\,,\,3^3\,,\,\ldots\}$, n'est associée à $2\pi E_{1/3}$ au sens de (δ). Il suffit de prendre $C > 2\pi$. On peut se demander si, dans (5), on peut prendre q indépendant de ξ , ou, dans (6), ξ indépendant de q . Il n'en est rien, comme on va le voir.

5. <u>Conditions nécessaires pour</u> β .

On se restreindra encore à la considération des E_ξ . On se bornera à des énoncés du type suivant : pour certaines valeurs de ξ , il existe des suites Λ "rares", ou "lacunaires", telles qu'au moins une $f \in C_\Lambda$, $\neq 0$, s'annule sur E_ξ .

On sait (SALEM-ZYGMUND) que E_ξ est de type M_0 , si et seulement si $1/\xi$ n'est pas un nombre de Pisot, c'est-à-dire un entier algébrique dont les conjugués sont à l'intérieur du cercle unité du plan complexe. Voici une réciproque de l'énoncé (3), concernant les E_ξ .

(7) Soit $1/\xi$ un nombre de Pisot ; quelle que soit la condition de rareté uniforme (ϖ) , il existe une suite Λ satisfaisant cette condition, et une $f \in C_\Lambda$, $\neq 0$, s'annulant sur E_ξ .

Si $1/\xi$ est un entier, on peut d'ailleurs prendre pour Λ une suite d'entiers. On sait qu'il existe des nombres de Pisot entre 2 et 3, et même arbitrairement près de 2. L'énoncé suivant est une sorte de réciproque des énoncés (5) et (6).

(8) Soit $1/\xi$ un nombre de Pisot. Il existe un $q > 1$ tel que, quel que soit C, il existe une suite $\{\lambda_n\}$ satisfaisant (H) et une $f \in C_\Lambda$, $\not\equiv 0$, s'annulant sur E_ξ.

Les énoncés (5) et (6) montrent que, dans cette dernière proposition, q est nécessairement inférieur à un $q(\xi)$ qui est fini pour tout $\xi > 1/3$, et qui, lorsque ξ tend vers $1/2$, tend vers 1. Nous allons montrer que q, par contre, n'est pas borné si $1/\xi$ est un entier ≥ 7.

(9) Soit $1/\xi$ un entier ≥ 7, et soit $\{q_n\}$ une suite positive (croissant aussi vite que l'on veut). Il existe une suite d'entiers $\{\lambda_n\}$ telle que $\lambda_1 > q_1$ et $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > q_n$, et une fonction $f(t) = \sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n t}$ continue, s'annulant sur E_ξ, mais $\not\equiv 0$.

Le principe des démonstrations est la construction de f par dualité, après avoir montré que pour les fonctions M continues à spectre dans E_ξ, les normes $\sup_n |M(n)|$ et $\sup_\lambda M(\lambda)$ sont équivalentes.