Séminaire Lelong.
Analyse

MARTIN ZERNER

Fonctions holomorphes à valeurs distributions

Séminaire Lelong. Analyse, tome 3 (1961), exp. nº 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A4_0>

14 février 1961

FONCTIONS HOLOMORPHES À VALEURS DISTRIBUTIONS

par Martin ZERNER

1. Introduction.

Soit T une distribution sur $\underset{\sim}{R}^{n+1}(x_0 , x_1 , \ldots , x_n)$ dont le support soit contenu dans une bande,

$$a \leqslant x_0 \leqslant b \quad .$$

On peut alors définir une transformée de Fourier partielle $\mathcal{F}T$ qui, à la variable ξ , fait correspondre une distribution $\mathcal{F}T(\xi)$ sur $\underset{\sim}{R}^n(x_1 , \ldots , x_n)$ définie par la formule :

$$\forall \quad \varphi \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n) , \quad \langle \varphi , \mathcal{F}T(\xi) \rangle = \langle \varphi e^{i\xi x_0} , T \rangle$$

de sorte que $\langle \varphi , \mathcal{F}T \rangle$ se prolonge en une fonction entière de la variable complexe $\xi + i\eta$.

$\mathcal{F}T$ définit aussi une distribution sur R^{n+1} , et il est légitime de se demander si les singularités d'une telle distribution sont quelconques. Par exemple $\mathcal{F}T$ peut-elle être singulière sur un compact et régulière ailleurs ? La réponse est non en vertu de résultats généraux. Rappelons tout d'abord quelques résultats concernant <u>les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles</u> (GROTHENDIECK, [3]).

Soient E un espace vectoriel complexe localement convexe séparé (ELC), $\hat{E}$ son complété, F une fonction définie sur un domaine Δ du plan complexe et à valeurs dans E . Les 5 propriétés suivantes sont équivalentes

1° Pour tout $z \in \Delta$, le rapport :

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h}$$

possède une limite dans $\hat{E}$ quand $h \to 0$ dans le plan complexe.

2° F est une fois continûment dérivable et

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad .$$

3° F est continue et pour tout contour Γ rectifiable et homotope à 0 dans Δ

$$\int_\Gamma F(z)\, dz = 0$$

(intégrale scalaire).

4° Tout $z_0 \in \Delta$ possède un voisinage sur lequel $F(z)$ est somme dans $\hat{E}$ d'une série :

$$F(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$$

où les a_k sont des éléments de $\hat{E}$.

5° Pour toute $e' \in E'$ la fonction $\langle e', F\rangle$ est holomorphe sur Δ.

Si ces propriétés ont lieu, on a la formule de Cauchy :

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{F(w)\, dw}{w - z} \quad .$$

On a de plus le :

LEMME d'Abel. - Si la suite $\{a_k r^k\}$ est bornée, la série de 4° converge uniformément pour $|z - z_0| \leq r' < r$. Si cette suite n'est pas bornée la série diverge pour tout z vérifiant $|z - z_0| \geq r$.

L'équivalence des propriétés 1°, 2°, 4° se démontre exactement comme dans le cas scalaire ainsi que la formule de Cauchy et le lemme d'Abel. L'un ou l'autre de ces deux derniers énoncés permet de montrer que 5° $\Longrightarrow$ 4° à l'aide du théorème de Mackey. Enfin 3° $\Longrightarrow$ 5° comme dans le cas scalaire. Les autres implications sont évidentes.

EXEMPLE 1. - X espace localement compact, $E = \mathcal{C}(X)$. F est continue sur $\Delta \times X$ (et holomorphe pour $a \in X$ fixé).

EXEMPLE 2. - $E = \mathcal{H}(\Delta')$, espace des fonctions holomorphes sur Δ', F est une fonction holomorphe sur $\Delta \times \Delta'$. Si $\tilde{E}$ est le même espace, mais muni de la convergence simple, le théorème d'Hartogs - Osgood s'énonce :

Toute fonction holomorphe à valeurs dans $\tilde{E}$ est holomorphe à valeurs dans E.

EXEMPLE 3. - $E = \mathcal{D}'$. Prenons :

$$T = Y(t)\ \frac{t^{z-1}}{(z)} \quad \text{pour} \quad \Re z > 0$$

où $Y(t) = 0$ pour $t < 0$, $Y(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

Remarquons que, pour tout z, cette distribution a une singularité unique à l'origine, et que son ordre augmente "régulièrement" avec $-\mathcal{R}z$. Ce sont ces faits que nous allons généraliser.

2. Généralisation d'un théorème de Hartogs.

NOTATIONS. - X est un espace localement compact dénombrable à l'infini, ρ une fonction strictement positive tendant vers 0 à l'infini sur X, E_p l'espace de Banach des fonctions f continues sur X telles que :

$$|f(x)\,\rho^p(x)| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

$$E^+ = \bigcup E_p$$

$$E^- = \bigcap E_p$$

(topologies de limites inductive et projective, respectivement).

Si $f \in E^+$, nous poserons :

$$p_f = \inf\{p\ ;\ f \in E_p\} = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\operatorname{Log}|f(x)|}{-\operatorname{Log}\rho(x)} .$$

Si maintenant Y est un autre espace localement compact, et F une fonction continue à valeurs dans E^+ sur Y, nous associerons à F la fonction à valeurs réelles définie par :

$$p(y) = p_{F(y)} .$$

Soit $\{K_n\}$ un recouvrement de X par une suite de compacts.

$$\sup_{x\notin K_n} \frac{\operatorname{Log}|[F(y)]\ (x)|}{-\operatorname{Log}\rho(x)}$$

est une fonction semi- continue inférieurement sur Y et par suite p est une fonction mesurable.

Si enfin F est une fonction holomorphe à valeurs dans E^+ sur un domaine Δ, en plus de la fonction p ci-dessus définie, il lui sera associé une fonction p^* définie de la façon suivante :

$p^*(w)$ est la borne inférieure des nombres q, tels que w possède un voisinage où F soit holomorphe à valeurs dans E_q.

On voit que p^* est une fonction semi-continue supérieurement.

Grâce à la propriété (1, 5°) (et au fait que E'_p est un espace de mesures) on démontre aussi que p^* est la borne inférieure des q, tels que w ait un voisinage où F soit bornée dans E_q.

THÉORÈME 1. - Soit F holomorphe à valeurs dans E^+ sur le disque unité ouvert Δ, et continue sur le disque fermé. Alors

$$\forall \ z \in \Delta \ , \quad p^*(z) \leq \int p(e^{i\theta}) \, P(z \, , \, \theta) \, d\theta$$

où P désigne le noyau de Poisson. De plus l'ensemble où $p \neq p^*$ est polaire.

DÉMONSTRATION. - C'est essentiellement celle du théorème classique. Un passage à la limite simple montre que

$$p(z) \leq \int p(e^{i\theta}) \, P(z \, , \, \theta) \, d\theta \quad .$$

On montre ensuite, comme dans le cas classique, que p^* est la régularisée supérieure de p, c'est-à-dire que, si $p \leq p_0$ sur un ouvert, $p^* \leq p_0$ sur cet ouvert.

En effet $F(\overline{\Delta})$ est un compact de E^+. Il en résulte qu'il existe p_1 tel que $F(\overline{\Delta})$ soit borné dans E_{p_1}. Les fonctions sous-harmoniques de w :

$$\frac{\mathrm{Log}\ F(x)}{-\mathrm{Log}\ \rho(x)}$$

sont donc bornées supérieurement uniformément en dehors d'un compact fixe de X.

Soit alors W un ouvert sur lequel on ait $p \leq p_0$. D'après une propriété classique d'uniformité de la limite supérieure d'une famille de fonctions sous-harmoniques (DENY - LELONG [2]) on peut trouver, pour tout compact de W et tout $\varepsilon > 0$, un entier n_0 tel que

$$x \in K_{n_0} \implies \mathrm{Log}[F(w)]\ (x) + (p_0 + \varepsilon)\ \mathrm{Log}\ \rho(x) \leq 0$$

c'est-à-dire :

$$F \rho^{p_0 + \varepsilon} \leq 1$$

d'où il ressort que l'image de ce compact est bornée dans $E_{p_0+\varepsilon}$.

L'intégrale qui figure dans l'inégalité est continue, avec p elle majore aussi sa régularisée supérieure p^* .

Enfin la dernière affirmation du théorème résulte de la majoration de $\frac{\operatorname{Log} F(x)}{-\operatorname{Log} \rho(x)}$ et d'un théorème de Brelot, et de CARTAN dans [1].

REMARQUE 1. - Dans [2] et [4], on énonce la propriété que nous utilisons pour

$$\overline{\lim_{t \to t_0}} f_t$$

où t est un paramètre réel, et f_t une fonction sous-médiane (et même un peu plus générale). Il est bien facile de vérifier que la démonstration vaut pour une limite supérieure selon une suite décroissante d'ensembles quelconques.

REMARQUE 2. - Le théorème s'étend trivialement au cas d'un domaine limité par une courbe de Jordan, et au cas d'un polydisque. Dans ce dernier cas l'ensemble où $p \neq p^*$ à des propriétés de rareté beaucoup plus précises (LELONG [5], théorème 1).

3. Application aux distributions.

Pour étudier le comportement d'une fonction à valeurs distribution, on peut commencer par se ramener, à l'aide du produit par une fonction, au cas où le support reste dans un compact fixe. On peut alors faire la transformation de Fourier. On pose enfin

$$X = R^n , \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}$$

et on aboutit à l'étude d'une fonction à valeurs dans l'espace E^+ correspondant.

Soit $\tilde{F}$ la fonction ainsi transformée. Dire $\tilde{F}(z) \in E^-$, c'est dire $F(z) \in \mathcal{D}$. D'où en particulier la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soit F holomorphe à valeurs dans $\mathcal{D}'$ sur Δ . Si l'image par F d'un ensemble non polaire est dans $\mathcal{E}$, alors F est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{E}$.

On peut donner à ce phénomène le nom de "quasi-analyticité faible de la régularité". Il est alors légitime de poser les questions suivantes :

QUESTION 1. - Si F est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{D}'$ sur un voisinage de l'origine, et si pour tout k ,

$$F^{(k)}(0) \in \mathcal{E} \quad .$$

F prend-elle forcément ses valeurs dans $\mathcal{E}$? (Quasi-analyticité forte).

Réponse négative. D'après le lemme d'Abel, les hypothèses signifient que $\{\frac{r^k F^{(k)}(0)}{k!}\}$ est une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{E}$, bornée pour la topologie induite par $\mathcal{D}'$ (pour un certain $r > 0$). La réponse positive entraînerait que la suite $\{\frac{r'^k F^{(k)}(0)}{k!}\}$ soit bornée pour la topologie naturelle de $\mathcal{E}$, et ce quel que soit $r' < r$.

QUESTION 2. - Soit encore F holomorphe à valeurs dans $\mathcal{D}'$, et soit $\{z_k\}$ une suite tendant vers 0 . Si les $F(z_k)$ sont dans $\mathcal{E}$, F est-elle à valeurs dans $\mathcal{E}$?

La réponse, moins évidente, est encore négative. Pour toute suite $\{z_k\}$ tendant vers 0 , et tout $z_0 \notin \{z_k\}$ on peut construire F entière à valeurs dans $\mathcal{E}'$, telle que $\forall\ k > 0$, $F(z_k) \in \mathcal{D}$ et $F(z_0) \notin \mathcal{D}$. Si $z_0 \neq 0$ la suite $\{F(z_k)\}$ peut de plus être prise bornée dans $\mathcal{D}$.

<u>Comportement au bord</u>. On a immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soient Δ un domaine de $\underset{\sim}{C}$, γ un arc de Jordan libre dans la frontière de Δ , F une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathcal{D}'$ sur Δ , continue sur $\Delta \cup \gamma$, et telle que $F(\gamma) \subset \mathcal{E}$. Alors F est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{E}$ sur Δ .

Dans le cas d'un morceau de frontière rectiligne il suffit d'un peu de technique des distributions pour arriver à la proposition 3 (ZERNER [8]).

<u>Autres espaces</u>. - On pourra appliquer le théorème 1 si on sait transformer un espace fonctionnel en un sous-espace fermé de E^+ pour un espace X et une fonction ρ convenables. Nous allons définir deux telles applications.

1° Remplaçons $\mathcal{D}'$ par $\mathcal{S}'$, et $\mathcal{E}$ par $\mathcal{S}$ (notations de [7], tome II). Alors $\mathcal{S}'$ devient un espace suites grâce au développement en fonctions de Hermite (SCHWARTZ [7], tome II, ch. 7, § 7, exemple 7).

On vérifie ainsi que tous les résultats ci-dessus restent vrais si on remplace $\mathcal{D}'$ par $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{E}$ par $\mathcal{S}$.

2° Enfin à une fonction indéfiniment dérivable sur la droite correspond naturellement une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ = ensemble des entiers positifs).

On étudie de cette façon les fonctions analytiques à valeurs dans des espaces de fonctions satisfaisant à une majoration du type considéré par GEVREY et HOLMGREN

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leq Ck^{pk} \quad .$$

On aboutit alors au résultat assez compliqué à formuler que voici :

PROPOSITION 3. - Soit F une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sur le demi-plan supérieur ouvert $\mathbb{C}^+$ et continue sur $\overline{\mathbb{C}^+}$. On peut donc parler des valeurs prises par F sur l'axe réel. Supposons qu'elles soient toutes des traces sur $\mathbb{R}$ de fonctions entières de type de croissance exponentielle borné ρ (indépendamment de la valeur réelle de w). Appelons $\tilde{F}$ la distribution sur $\mathbb{R}^2$ que définit la restriction de F aux réels. A priori, $\tilde{F}$ possède une extension à $\mathbb{R}^2 + i\mathbb{R}^+ \sigma$ et une à $\mathbb{R}^2 + i\mathbb{R}\tau$ (σ vecteur unitaire des u , et τ vecteur unitaire des t). La proposition affirme que $\tilde{F}$ est valeur au bord d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^+$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels, Bull. Soc. math. France, t. 73, 1945, p. 74-106.

[2] DENY (J.) et LELONG (P.). - Etude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône, Bull. Soc. math. France, t. 75, 1947, p. 89-112.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur certains espaces de fonctions holomorphes, J. für reine und angew. Math., t. 192, 1953, p. 35-64 et 77-95.

[4] LELONG (Pierre). - Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 58, 1941, p. 83-177 (Thèse Sc. math. Paris. 1941).

[5] LELONG (Pierre). - Fonctions plurisousharmoniques au voisinage du sous-espace réel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 2860-2862.

[6] LELONG (Pierre). - Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variable réelle, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961 (à paraître).

[7] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tomes 1 et 2. - Paris, Hermann, 1950-1951 (Act. scient. et ind., 1091 et 1122 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).

[8] ZERNER (Martin). - Une application de la théorie de Hartogs généralisée, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 377-378.