Séminaire Lelong.
Analyse

François Norguet

Dérivées partielles et résidus de formes différentielles sur une variété analytique complexe

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 10, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)
Année 1958/59
-:-:-:-

24 février 1959

DÉRIVÉES PARTIELLES ET RÉSIDUS DE FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE

par François NORGUET

INTRODUCTION.

La théorie des résidus des intégrales doubles a été abordée par POINCARÉ en 1886, dans un travail ([16] et [17]) où il mentionne les tentatives déjà réalisées dans ce domaine, citant les travaux de PICARD ([11], [12], [13] et [14]), ainsi qu'un mémoire inédit de STIELTJES. PICARD reprend cette question dans des travaux ultérieurs, PICARD et SIMART dans leur ouvrage [15]. Mais aucune étude systématique ne semble avoir été entreprise, avant les travaux récents de LERAY ([7], [8] et [9]) pour étendre au cas de plusieurs variables complexes la théorie des résidus de Cauchy. Des résultats partiels ont été obtenus par de RHAM ([18] et [19]), SEGRE [20], CACCIOPOLI [1], SEVERI [21], MARTINELLI [10] ; de plus, les nombreuses formules de représentation intégrale [B] pour les fonctions de plusieurs variables complexes, auxquelles sont attachés les noms de BERGMAN, BOCHNER, MARTINELLI, WEIL, doivent trouver leur place dans une théorie moderne des résidus ; les travaux de FANTAPPIÈ [C], sur la représentation des fonctionnelles analytiques, sont en relation avec une telle théorie ; enfin, DOLBEAULT ([3], [4] et [5]), KODAIRA et SPENCER [6] ont défini, pour les formes différentielles semi-méromorphes et sans tenter d'obtenir des formules intégrales, une notion de résidu qu'il convient de rattacher à celle de POINCARÉ et de LERAY.

A partir des idées de LERAY, qui trouvent leur origine dans les travaux cités de POINCARÉ, on tentera, dans cet exposé, de tracer un cadre pour une théorie des résidus : une telle théorie consistant en la réalisation, à l'aide de formes et de cycles, d'homomorphismes topologiques dont la définition est générale. Dans certains cas, l'homomorphisme résidu se réalise aisément grâce à la dérivation partielle des formes différentielles, dont le formalisme a été introduit par LERAY ([7], [8] et [9]). Ce formalisme sera exposé dans une première partie ; son extension aux cas singuliers est basée sur la définition des formes différentielles induites sur les ensembles analytiques complexes, qui sera donnée en Appendice.

La théorie des résidus occupe la seconde partie de l'exposé, suivant le plan de principe suivant :

A. Résidus simples :

1. Définition générale.
2. Calcul du résidu de Leray (méthodes de Leray et de Dolbeault).
3. Calcul du résidu de Martinelli.

B. Composition des résidus :

1. Théorie générale.
2. Composition des résidus de Leray.
3. Composition des résidus de Martinelli.
4. Généralisations diverses.

C. Images de résidus.

D. Calculs explicites de résidus à l'aide de bases pour l'homologie et la cohomologie.

Pour la simplicité de l'exposé, on considérera seulement l'homologie et la cohomologie absolues, alors que les résultats de Leray sont établis en homologie et cohomologie relatives ; de nombreux détails de la théorie de Leray ne pourront figurer ici ; par contre, certaines généralisations de cette théorie seront données (au moins en résumé), permettant d'inclure les résidus de Martinelli, et d'admettre certaines singularités ; le lien avec les idées de DOLBEAULT sera indiqué. Enfin, C et D ne seront pas développés : la considération des images de résidus, bien aisée dans les cas favorables, nécessite encore des études, et les calculs explicites, conduisant aux formules intégrales connues, ne semblent avoir été revus selon les idées actuelles que dans le cas de la formule de Cauchy-Fantappiè ([45], [8] et [9]). Toutes ces questions seront éventuellement l'objet d'un exposé ultérieur, ainsi que l'étude complète du calcul différentiel et intégral qui figure dans la seconde note de LERAY ([8]).

I. Dérivées partielles de formes différentielles extérieures

1. Dérivées par rapport à une variable.

a. Dérivée première. Soit X une variété analytique complexe, de dimension complexe n. Soit S une sous-variété analytique (sans singularités) de X, de dimension complexe $n-1$; on suppose que S admet une équation globale $z = 0$, la fonction holomorphe z, définie au voisinage de S, s'annulant au premier ordre sur S. Soit, au voisinage d'un point 0 de S, un système (z, w), $w = (w_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ de coordonnées locales de X.

Si φ est une forme différentielle (C^{∞}) définie au voisinage de S, φ s'écrit de manière unique, au voisinage de 0, sous la forme :

$$\varphi = dz \wedge \psi + \theta \quad ,$$

où ψ et θ ne contiennent pas la différentielle $d\varphi$ lorsqu'elles sont exprimées en fonction des coordonnées locales (z, w). Si $\psi = 0$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z}$ est définie, au voisinage de 0, par la relation

$$d\varphi = dz \wedge \frac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z} + \beta \quad ,$$

où $\dfrac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z}$ et β ne contiennent pas la différentielle dz. Dans le cas général, $\dfrac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z}$ est définie par

$$\frac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z} = dz \wedge \frac{\partial_{(z,w)}\psi}{\partial z} + \frac{\partial_{(z,w)}\theta}{\partial z} \quad .$$

Cette dérivée partielle, définie au voisinage de 0, dépend du choix du système de coordonnées locales (z, w). On se propose d'étudier sa restriction à S :

$$\left.\frac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z}\right| S = \left.\frac{\partial_{(z,w)}\theta}{\partial z}\right| S \quad .$$

On suppose, de plus, $dz \wedge \varphi$ fermée, soit $dz \wedge d\varphi = 0$. Comme $dz \wedge \varphi = dz \wedge \theta$, on a $dz \wedge d\varphi = dz \wedge d\theta = 0$ au voisinage de 0 ; or

$$d\theta = dz \wedge \frac{\partial_{(z,w)}\theta}{\partial z} + \alpha \quad ,$$

où α ne contient pas la différentielle dz ; alors $dz \wedge d\theta = dz \wedge \alpha = 0$, d'où $\alpha = 0$; donc

$$d\theta = dz \wedge \frac{\partial_{(z,w)}\theta}{\partial z} \quad ,$$

et,

$$d\varphi = -dz \wedge d\psi + d\theta = dz \wedge \left(-d\psi + \frac{\partial_{(z,w)}\theta}{\partial z} \right),$$

soit $d\varphi = dz \wedge \omega$, où $\omega = -d\psi + \dfrac{\partial_{(z,w)}\theta}{\partial z}$. Il en résulte :

$$\frac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z}\Big| S = \omega|S + d\psi|S \quad .$$

Or la relation $dz \wedge d\varphi = 0$ entraîne l'existence [54] , dans un voisinage de S , d'une forme ϖ telle que $d\varphi = dz \wedge \varpi$; de plus, si ϖ et ϖ' sont deux formes telles que $d\varphi = dz \wedge \varpi = dz \wedge \varpi'$, $dz \wedge (\varpi - \varpi') = 0$ et il existe une forme χ telle que $\varpi - \varpi' = dz \wedge \chi$; donc $\varpi|S = \varpi'|S$, i. e. $\varpi|S$ est parfaitement déterminée par la donnée de φ et de z ; par conséquent, $\varpi|S = \omega|S$ au voisinage de 0 . La proposition 1 résumera ce qui précède.

PROPOSITION 1. - *Si* $dz \wedge d\varphi = 0$, *il existe une forme* ϖ , *définie au voisinage de* S , *telle que* $d\varphi = dz \wedge \omega$; $\omega|S$ *est parfaitement déterminée par la donnée de* φ *et de* z ; *si* (z , w) *est un système de coordonnées locales de* X *au voisinage d'un point* 0 *de* S , φ *s'écrit de manière unique, au voisinage de* 0 , *sous la forme* $\varphi = dz \wedge \psi + \theta$, *où* ψ *et* θ *ne contiennent pas la différentielle* dz ; *on a la relation*

$$\frac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z}\Big| S = \omega|S + d\psi|S$$

au voisinage de 0 .

DÉFINITION. - *La forme* $\omega|S$, *qui ne dépend que de* φ *et de* z , *qui est définie globalement sur* S , *et qui est liée, par la relation ci-dessus, à la dérivée partielle* $\dfrac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z}\Big| S$, *sera seule appelée, désormais, dérivée de* φ , *sur* S , *par rapport à* z , *et notée* $\dfrac{d\varphi}{dz}\Big| S$; *la forme* ψ *étant désignée par* $\dfrac{\varphi}{dz}(z , w)$, *on a la relation* :

$$\boxed{\frac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z}\Big| S = \frac{d\varphi}{dz}\Big| S + d\left(\frac{\varphi}{dz}(z , w)|S\right)}$$

au voisinage de 0 .

REMARQUE. - Si φ est une fonction, $\dfrac{\varphi}{dz}(z , w) = 0$; la dérivée, définie ci-dessus, est alors la dérivée au sens usuel ; la définition ci-dessus est donc la généralisation adéquate, pour les formes différentielles extérieures, de la notion de dérivée d'une fonction.

Changement d'équation pour S :

i. Soit $z' = 0$ une équation globale de S, vérifiant $z' = hz$, où la fonction holomorphe h ne s'annule pas sur S. Si (z, w) est un système de coordonnées au voisinage du point 0 de S, (z', w), où $z' = hz$, est un nouveau système de coordonnées locales et l'on a la relation :

$$\boxed{\frac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z} = \lambda \frac{\partial_{(z',w)}\varphi}{\partial z'} + d\lambda \wedge \frac{\varphi}{dz'}(z', w)}$$

où $\lambda = h + z \dfrac{\partial_{(z,w)} h}{\partial z}$.

On en déduit :

$$\boxed{\frac{\partial_{(z,w)}\varphi}{\partial z}\Big| S = h \frac{\partial_{(z',w)}\varphi}{\partial z'}\Big| S + dh \wedge \frac{\varphi}{dz'}(z', w)\Big| S}$$

ii. Soit z' une fonction holomorphe de z, telle que la fonction composée $z' \circ z$ s'annule au premier ordre sur S ; alors, on a :

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dz}\Big| S = \frac{dz'}{dz}\frac{d\varphi}{dz'}\Big| S}$$

i. e. la formule habituelle du changement de variable dans les dérivées.

b. Dérivée seconde : $dz \wedge d\varphi = 0$ entraîne $d\varphi = dz \wedge \omega_1$ puis $dz \wedge d\omega_1 = 0$ et enfin $d\omega_1 = dz \wedge \omega_2$; $\omega_2|S$ ne dépend que de ω_1 et de z ; mais, si $d\varphi = dz \wedge \omega_1'$, on a vu que $\omega_1' - \omega_1 = dz \wedge \chi$; donc $d\omega_1' - d\omega_1 = dz \wedge d\chi$, et, si $d\omega_1' = dz \wedge \omega_2'$, on a

$$d\omega_1' - d\omega_1 = dz \wedge (\omega_2' - \omega_2) = dz \wedge d\chi$$

d'où $dz \wedge (\omega_2' - \omega_2 - d\chi) = 0$; alors

$$\omega_2' - \omega_2 - d\chi = dz \wedge \xi \quad , \text{ et } \quad \omega_2'\,|S - \omega_2\,|S = d(\chi|S) \;;$$

la classe de cohomologie de $\omega_2|S$ est donc parfaitement déterminée par φ et z ; c'est cette classe qu'on appelle dérivée seconde de φ , sur S , par rapport à z , et que l'on désigne par $\dfrac{d^2}{dz^2}\Big| S$.

c. Dérivée d'ordre supérieur : On définit ω_p par récurrence : si ω_{p-1} est défini et vérifie $dz \wedge d\omega_{p-1} = 0$, il existe ω_p tel que $d\omega_{p-1} = dz \wedge \omega_p$; comme ω_1 est défini, ω_p existe pour tout $p \geqslant 1$, mais seule la classe de cohomologie, sur S, de $\omega_p|S$, est parfaitement déterminée par la donnée de φ et de z ; en effet, si $\omega'_{p-1} - \omega_{p-1} = dz \wedge \xi + d\chi$,

$$d\omega'_{p-1} - d\omega_{p-1} = -dz \wedge d\xi = dz \wedge \omega'_p - dz \wedge \omega_p$$

d'où

$$dz \wedge (\omega'_p - \omega_p + d\xi) = 0 \quad \text{et} \quad \omega'_p - \omega_p = dz \wedge \eta - d\xi \quad .$$

Cette classe de cohomologie est appelée dérivée d'ordre p de φ, sur S, par rapport à z, et désignée par $\left.\dfrac{d^p\varphi}{dz^p}\right| S$.

d. Cas où S est singulière : Les définitions précédentes reposent uniquement sur la possibilité de diviser par dz une forme ϖ vérifiant $dz \wedge \varpi = 0$, et sur la restriction à S des formes différentielles et de l'opérateur d ; cette restriction étant définie quelle que soit S (voir Appendice), les définitions précédentes se généralisent lorsque la division est possible. La division est possible, en particulier ([7], [8], [9] et [54]) lorsque dz ne s'annule qu'en des points où le hessien de z est non nul ; ces points sont alors des points singuliers isolés ; il semble que la division soit possible lorsque S n'a que des points singuliers isolés ; on voit que cette condition est nécessaire et suffisante si ϖ est holomorphe, grâce à un résultat de [57] sur l'homologie du complexe de l'algèbre extérieure.

2. Dérivées partielles par rapport à plusieurs variables.

a. Cas non singulier. Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Soit $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille de sous-variétés non singulières de X, de dimension $n-1$, en position générale (i. e. : au voisinage de tout point 0 de $S = \bigcap_{1 \leq i \leq m} S_i$, il existe un système (z, w), $z = (z_i)_{1 \leq i \leq m}$, $w = (w_i)_{1 \leq i \leq n-m}$, de coordonnées locales de X, telles que S_i ait pour équation locale $z_i = 0$). On suppose que chaque S_i admet, au voisinage de S, une équation globale $z_i = 0$, la fonction holomorphe z_i s'annulant au premier ordre sur S_i. Soit φ une forme différentielle (C^∞) définie au voisinage de S, telle que $\left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} dz_i\right) \wedge \varphi$ soit fermée ; alors $\left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} dz_i\right) \wedge d\varphi = 0$. Donc il existe une famille $(\omega_i)_{1 \leq i \leq m}$ telle que $d\varphi = \sum_{1 \leq i \leq m} dz_i \wedge \omega_i$; cette famille vérifie $\sum_{1 \leq i \leq m} dz_i \wedge d\omega_i = 0$, donc $\left(\bigwedge_{1 \leq j \leq m} dz_j\right) \wedge d\omega_i = 0$ pour tout i ; alors il existe une famille

$(\omega_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq m}}$ telle que $d\,\omega_i = \sum_{1\leq i\leq m} dz_i \wedge \omega_{ij}$. De façon générale, soit p un entier > 0 , et supposons définie une famille $(\omega_{i_1\ldots i_p})_{\substack{1\leq i_\alpha\leq m\\1\leq\alpha\leq p}}$ de formes différentielles telles que $\left(\bigwedge_{1\leq j\leq m} dz_j\right) \wedge d\,\omega_{i_1\ldots i_p} = 0$; alors il existe une famille $(\omega_{i_1\ldots i_p\, i_{p+1}})_{\substack{1\leq i_\alpha\leq m\\1\leq\alpha\leq p+1}}$ telle que $d\,\omega_{i_1\ldots i_p} = \sum_{1\leq i_{p+1}\leq m} dz_{i_{p+1}} \wedge \omega_{i_1\ldots i_{p+1}}$,
et $\left(\bigwedge_{1\leq j\leq m} dz_j\right) \wedge d\,\omega_{i_1\ldots i_{p+1}} = 0$.

La famille $\left(\omega_{i_1\ldots i_p}\right)_{\substack{1\leq i_\alpha\leq m\\1\leq\alpha\leq p}}$ existe donc pour tout entier $p > 0$, mais n'est pas parfaitement déterminée par la donnée de φ et de z ; cependant la classe de cohomologie, sur S , de $\omega_{i_1\ldots i_p}\big|S$ ne dépend que de φ et de z ; aussi cette classe peut-elle être considérée comme une dérivée partielle de φ sur S , et désignée par

$$\left.\frac{\partial^q \varphi}{\partial z_1^{q_1}\ldots\partial z_m^{q_m}}\right| S \qquad \text{avec } q = \sum_{1\leq j\leq m} q_j \ ,$$

où q_j est le nombre des indices égaux à j dans la permutation $i_1 \ldots i_p$.

La construction ci-dessus, considérée par LERAY ([7],[8] et [9]) et par GEL'FAND et ŠILOV [49], sera appelée construction GLS .

b. Cas où S est singulière : comme précédemment, on voit que la construction GLS peut être réalisée lorsque z est telle que, si une forme ϖ vérifie $\left(\bigwedge_{1\leq i\leq m} dz_i\right)\wedge\varpi = 0$, il existe une famille $(\varpi_i)_{1\leq i\leq m}$ telle que $\varpi = \sum_{1\leq i\leq m} dz_i \wedge \varpi_i$. Or cette propriété peut être réalisée si les S_i sont non singulières, mais non nécessairement en position générale, comme il résulte de [53]. On peut alors généraliser les définitions précédentes.

c. Généralisations ultérieures : on verra que, dans les conditions ci-dessus, les résidus composés de formes semi-méromorphes admettant $\bigcup_{1\leq i\leq m} S_i$ comme ensemble polaire se calculent à l'aide des dérivées partielles qui viennent d'être définies. Or ces résidus sont définis même lorsque les S_i n'ont pas d'équations globales au voisinage de S , pourvu qu'ils soient non singuliers et en position générale. Cela permettra de généraliser, dans certains cas, les définitions ci-dessus. Plus généralement, on donnera une définition purement topologique des résidus, qui conduira à une autre généralisation des notions ci-dessus.

3. Propriétés des dérivées partielles. Fibrations holomorphes régulières.

Comme LERAY l'a montré dans son Cours [9] , les dérivées partielles définies ci-dessus satisfont aux règles de calcul habituelles sur les dérivées partielles : formule de Leibnitz et changement de variables. La signification de ces dérivées partielles et de la règle du changement de variables est claire si on considère la situation suivante :

Soit f une application holomorphe d'une variété analytique complexe X de dimension n dans une variété analytique complexe T de dimension $m \leq n$; soit $0'$ un point de X ; on suppose qu'il existe sur T , au voisinage de $f(0') = 0$, un système $t = (t_i)_{1\leq i\leq m}$ de coordonnées locales satisfaisant aux conditions suivantes : la sous-variété S_i d'équation $z_i = t_i \circ f = 0$ est non singulière, et les S_i , $1 \leq i \leq m$ sont en position générale ; soit $S = \bigcap\limits_{1\leq i\leq m} S_i$; f est dite alors régulière en 0 . Alors les dérivées partielles

$$\left.\frac{\partial^q \varphi}{\partial z_1^{q_1} \dots \partial z_m^{q_m}}\right|_S \quad , \text{ avec } q = \sum_{1\leq j\leq m} q_j$$

sont définies, pour toute forme φ , définie au voisinage de S , vérifiant $\left(\bigwedge\limits_{1\leq i\leq m} dz_i\right) \wedge d\varphi = 0$, et on peut poser, par définition :

$$\boxed{\left.\frac{\partial^q \varphi}{\partial t_1^{q_1} \dots \partial t_m^{q_m}}\right|_0 = \left.\frac{\partial^q \varphi}{\partial z_1^{q_1} \dots \partial z_m^{q_m}}\right|_{f^{-1}(0)} \; , \quad q = \sum_{1\leq j\leq m} q_j}$$

Ainsi une dérivée partielle, en un point 0 de T où f est régulière, par rapport aux coordonnées locales $(t_i)_{1\leq i\leq m}$, d'une forme φ , définie sur X au voisinage de $f^{-1}(0)$, et telle que $\left(\bigwedge\limits_{1\leq i\leq m} d(t_i \circ f)\right) \wedge \varphi$ soit fermée, est définie comme une classe de cohomologie de $f^{-1}(0)$, et satisfait aux règles usuelles de Leibnitz et du changement de coordonnées locales sur T au voisinage de 0 . En particulier, tout vecteur tangent à T en 0 opère sur les formes considérées ci-dessus, associant à chacune d'elles une classe de cohomologie de $f^{-1}(0)$.

Si $\mathcal{T}_0$ désigne l'espace tangent à T en 0 , et $H^*(f^{-1}(0))$ l'algèbre de cohomologie de $f^{-1}(0)$,

i. si g est une fonction sur T au voisinage de 0 , $\left(\frac{\partial g}{\partial t_i}\right)_{1\leq i\leq m}$ sont les composantes d'un élément grad g de $\mathcal{C}_0$;

ii. si φ est une forme sur X du type ci-dessus, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\right)_{1\leq i\leq m}$ sont les composantes d'un élément de $H^*(f^{-1}(0)) \otimes \mathcal{C}_0$, qu'on désignera par grad φ .

Les considérations ci-dessus sont le fondement du "calcul différentiel et intégral" sur une variété analytique complexe, tel qu'il est exposé dans ([7],[8] et [9]).

II. Théorie des Résidus.

A. Résidus simples

1. Définition générale des résidus.

a. Cobord, résidu et formule du résidu. Soient X un espace topologique, S une partie fermée de X ; la suite exacte de cohomologie à supports compacts (à coefficients dans un corps), relative au sous-ensemble fermé S de X , fournit l'homomorphisme cobord

$$H_c^p(S) \longrightarrow H_c^{p+1}(X - S) \quad .$$

Si S et X - S sont des variétés topologiques, de dimensions respectives m et n , l'isomorphisme de Poincaré entre l'homologie et la cohomologie fournit l'homomorphisme, encore appelé cobord

$$\delta : \; H_{c,m-p}(S) \longrightarrow H_{c,n-p-1}(X - S)$$

ou

$$\boxed{\delta : \; H_{c,q}(S) \longrightarrow H_{c,q+n-m-1}(X - S)} \quad .$$

La dualité entre l'homologie à supports compacts, et la cohomologie à supports fermés quelconques, fournit l'homomorphisme transposé, appelé résidu relatif à S :

$$r : \; H^q(S) \longleftarrow H^{q+n-m-1}(X - S)$$

ou

$$\boxed{r : \; H^{p-(n-m-1)}(S) \longleftarrow H^p(X - S)} .$$

Ci-dessus, l'indice indique une dimension (resp. degré) en homologie (resp. cohomogie). On appelle formule du résidu la formule, exprimant la dualité ci-dessus :

$$\boxed{\langle \varphi^{n-q} \, , \, \delta(\sigma_{m+1-q}) \rangle = \langle r(\varphi^{n-q}) \, , \, \sigma_{m+1-q} \rangle}$$

b. Réalisation du cobord. On suppose que X est une variété C^∞ , et S une sous-variété C^∞ de X , régulièrement plongée. Soit V un voisinage de S , tel qu'il existe une rétraction ρ de V sur S, de classe C^{∞}, pour laquelle $\rho^{-1}(y)$ est, pour tout $y \in S$, une boule, de dimension réelle $n - m$, en position générale par rapport à S et par rapport à la frontière de V ; V est ainsi muni d'une fibration en boules, de base S. Si σ est un cycle de S, on pose $\delta(\sigma) = bV \cap b(\rho^{-1}(\sigma))$, les bords étant pris dans X ; $\delta(\sigma)$ est un cycle de $X - S$, muni d'une fibration, en sphères de dimension $n - m - 1$, de base σ ; δ anticommute avec le bord, et préserve l'homologie ; il réalise donc un homomorphisme

$$\delta : H_{c,*}(S) \longrightarrow H_{c,*}(X - S)$$

identique au cobord défini précédemment. Une opération classique analogue permet de réaliser le cobord comme opérateur sur la cohomologie.

2. Calcul du résidu de Leray.

X est une variété analytique complexe, de dimension complexe n ; S, une sous-variété sans singularités, de dimension $n - 1$. Le cobord (resp. résidu) augmente (resp. diminue) la dimension (resp. degré) de une unité.

Soit φ une forme différentielle fermée, de classe C^{∞}, définie dans $X - S$, satisfaisant la condition suivante :

pour tout point 0 de S, et pour toute fonction s, holomorphe dans un voisinage U de 0, s'annulant au premier ordre sur S, il existe une forme différentielle χ, de classe C^{∞} dans U, telle que $\chi = s^p \varphi$ dans $U - S$. On dit alors que φ est semi-méromorphe dans X, et admet des pôles à l'ordre p sur S. On se propose de réaliser l'homomorphisme résidu lorsqu'une classe de cohomologie de $X - S$ est représentée par une forme semi-méromorphe dans X, admettant des pôles à l'ordre p sur S.

a. Méthode de Leray par division et cohomologie.

i. Singularité polaire d'ordre 1 : $\chi = s\varphi$ dans $U - S$; donc $d\chi = ds \wedge \varphi$ dans $U - S$, et $ds \wedge d\chi = 0$ dans $U - S$, donc aussi dans U ; alors il existe θ, régulière dans U, telle que $d\chi = ds \wedge \theta$ dans U ; donc $ds \wedge (\varphi - \theta) = 0$ dans $U - S$, et $ds \wedge (\chi - s\theta) = 0$ dans U ; alors il existe ψ dans U, telle $\chi - s\theta = ds \wedge \psi$ dans U, soit

$$\boxed{\varphi = \frac{ds}{s} \wedge \psi + \theta}$$

dans $U - S$.

En poursuivant l'application de la méthode de division, on voit que $\psi|S$ ne dépend que de φ, et que c'est une forme fermée ; donc la méthode précédente définit une forme fermée sur S, désignée par $\text{rés}(\varphi)$. Compte-tenu de la structure fibrée de $\delta\sigma$, lorsque σ est un cycle de S, le théorème classique de Cauchy permet de démontrer la relation

$$\boxed{2i\pi\int_{\sigma}\text{rés}(\varphi) = \int_{\delta\sigma}\varphi}$$

qui, grâce au théorème de dualité entre homologie et cohomologie, prouve que $2i\pi$ rés réalise r.

ii. Singularité polaire d'ordre quelconque : alors $\varphi = \dfrac{ds}{s^p}\wedge\psi + \dfrac{1}{s^{p-1}}\theta$ dans $U - S$, ψ et θ étant régulières dans U ; donc

$$\varphi = d\left(\frac{1}{1-p}\,\frac{1}{s^{p-1}}\psi\right) - \frac{1}{s^{p-1}}\left(\frac{1}{p-1}\,d\psi - \theta\right)$$

dans $U - S$, et φ est cohomologue, dans $X - S$, à une forme semi-méromorphe dans X, ayant des singularités à l'ordre $p - 1$ sur S ; par suite, φ est cohomologue, dans $X - S$, à une forme φ_1 semi-méromorphe dans X, ayant des pôles à l'ordre 1 sur S. On désigne par $\text{Rés}(\varphi)$ la classe de cohomologie de $\text{rés}(\varphi_1)$ dans S, et on vérifie que cette classe ne dépend que de la classe de cohomologie de φ dans X. On réalise ainsi l'homomorphisme résidu lorsqu'une classe de cohomologie de $X - S$ est représentée par une forme, semi-méromorphe dans X, admettant des pôles à l'ordre p sur S.

iii. Généralisation au cas où S est singulière. Si S présente des singularités telles que la division par ds soit toujours possible, les définitions ci-dessus de $\text{rés}(\varphi)$ et de $\text{Rés}(\varphi)$ restent valables. Mais une difficulté se présente pour la réalisation des classes d'homologie de S et du cobord. Toutefois, si une classe d'homologie de S est représentée par un sous-ensemble analytique σ, l'intégration $\int_{\sigma}\text{rés}(\varphi)$ est définie [50] de la façon suivante : c'est l'extension simple du courant d'intégration sur la partie non singulière $\sigma - \sigma'$ de σ ; de plus δ est défini dans $X - \sigma'$; si φ est à support compact dans $X - \sigma'$,

$$\int_{\sigma-\sigma'}\text{rés}(\varphi) = \int_{\delta(\sigma-\sigma')}\varphi \qquad .$$

Si φ n'est pas à support compact dans $\sigma - \sigma'$, on peut l'approcher par des formes à support compact ; l'intégrale au premier membre tend vers $\int_{\sigma}\text{rés}(\varphi)$, donc l'intégrale ou second membre tend vers une limite que l'on désigne par $\int_{\delta(\sigma)}\varphi$, définissant ainsi le courant $\delta(\sigma)$. On a ainsi réalisé δ lorsqu'une classe d'homologie de S est représentée par un ensemble analytique, et r

lorsque S est tel que la division par ds soit possible, et on a la formule du résidu :

$$\boxed{\int_{\sigma} \text{rés}(\varphi) = \int_{\delta(\sigma)} \varphi}$$

Il faut toutefois remarquer qu'on est sorti du cadre général tracé en 1 .

b. Méthode de Dolbeault par la différentielle d" :

i. Singularité polaire d'ordre 1 :

$\varphi = \frac{ds}{s} \wedge \psi + \theta$ se prolonge canoniquement [56] en un courant $\widetilde{\varphi} = \frac{ds}{s} \wedge \psi + \theta$;

$d''\widetilde{\varphi} = d''(\frac{ds}{s}) \wedge \psi + \frac{ds}{s} \wedge d''\psi + d''\theta$; comme φ est fermé dans X - S ,

$d''\varphi = \frac{ds}{s} \wedge d''\psi + d''\theta = 0$ dans X - S , donc aussi dans X , et

$d''\widetilde{\varphi} = d''(\frac{ds}{s}) \wedge \psi$. Comme $d''(\frac{ds}{s}) = 2i\pi\widetilde{S}$ [55] , où $\widetilde{S}$ désigne le courant d'intégration sur S , on a

$$\boxed{d''\widetilde{\varphi} = 2i\pi\widetilde{S} \wedge \text{rés}(\varphi)}$$

Cas où S est singulière : quel que soit l'ensemble analytique S , de dimension n - 1 , si $\varphi = \frac{ds}{s} \wedge \psi + \theta$, $d\varphi = 0$ dans U - S , ψ et θ étant C^{∞} dans U , on a

$$d''\widetilde{\varphi} = 2i\pi\widetilde{S} \wedge \psi \qquad \text{dans } U - S .$$

Cela prouve que $\psi|S$ est parfaitement déterminé par la donnée de φ , donc définit une section rés(φ) du faisceau des germes de formes différentielles induites sur S , et l'on a :

$$\boxed{d''\widetilde{\varphi} = 2i\pi\widetilde{S} \wedge \text{rés}(\varphi)} \quad .$$

Les considérations de (a)(iii) relatives au cobord et à la formule du résidu s'appliquent ici.

ii. Singularité polaire d'ordre p : (S non singulière)

$\varphi = d\gamma + \beta$, où γ est une forme semi-méromorphe dans X , et β une forme semi-méromorphe fermée ayant des pôles à l'ordre 1 sur S . Donc φ se prolonge canoniquement en un courant

$$\widetilde{\varphi} = \widetilde{d\gamma} + \widetilde{\beta} = d'\widetilde{\gamma} + \widetilde{d''\gamma} + \widetilde{\beta} \quad ;$$

alors

$$d''\widetilde{\varphi} = d\widetilde{\varphi} = dd'\widetilde{\gamma} + d\widetilde{d''\gamma} + d\widetilde{\beta} = d(-d''\widetilde{\gamma} + \widetilde{d''\gamma}) + d''\widetilde{\beta}$$

soit $d''\widetilde{\varphi} = d\alpha + d''\widetilde{\beta}$ où α est un courant porté par S .

On va montrer qu'on peut associer canoniquement à $d''\tilde{\varphi}$ une classe de cohomologie de S, et montrer que cette classe coïncide avec la classe-résidu de φ. Soit ρ une rétraction comme en 1 (b) ; l'image $\rho(d''\tilde{\varphi})$ est un courant sur S, défini par $\langle \rho(d''\tilde{\varphi}), \psi \rangle = \langle d''\tilde{\varphi}, \rho^{-1}(\psi) \rangle$ si ψ est une forme différentielle, à support compact dans S ; d'après la relation (1), on a :

$$\rho(d''\tilde{\varphi}) = \rho(d\alpha) + \rho(d''\tilde{\beta}) = \pm d(\rho(\alpha)) + \rho(d''\tilde{\beta}) \quad ;$$

donc $\rho(d''\tilde{\varphi})$ et $\rho(d''\tilde{\beta})$ sont homologues sur S ; or $\rho(d''\tilde{\beta}) = 2i\pi\,\text{rés}(\beta)$ et on sait que la classe de cohomologie de $\text{rés}(\beta)$ sur S ne dépend que de la classe de cohomologie de φ dans $X - S$; cela prouve que la classe d'homologie du courant $\rho(d''\tilde{\varphi})$ dans S ne dépend que de celle de φ dans $X - S$ (donc en particulier ne dépend pas de la rétraction ρ choisie). On a donc pu réaliser l'homomorphisme r à l'aide de l'opérateur d''. La méthode utilisée suppose S non singulière, mais pourrait être généralisée au cas où S est uniformisable en chaque point ([3] et [4]).

c. Méthode des dérivées partielles. Si S a une équation globale $s = 0$, un calcul facile montre que

$$\boxed{\left.\frac{d^p\omega}{ds^p}\right| S = p!\ \text{Rés}\left(\frac{ds \wedge \omega}{s^{1+p}}\right)}$$

Applications :

i. Généralisation de la notation différentielle. Si S ne possède pas d'équation globale, soit Σ l'espace fibré (à fibres vectorielles complexes de dimension 1) associé au diviseur S ; soit s une section holomorphe de Σ qui s'annule exactement au premier ordre sur S, et soit ω une section C^∞ de Σ^{1+p}, définie au voisinage de S, et telle que la forme différentielle $\varphi = \dfrac{\omega}{s^{1+p}}$ soit fermée dans $X - S$. Alors $\text{Rés}(\varphi)$ est défini, et la relation ci-dessus suggère de poser

$$\boxed{\left.\frac{d^p[\omega]}{ds^{1+p}}\right| S = p!\ \text{Rés}\left(\frac{\omega}{s^{1+p}}\right)}$$

On trouvera, dans ([7], [8] et [9]), les propriétés de ces classes de cohomologie.

ii. Dérivation par rapport à un opérateur. Que S possède, ou non, une équation globale, soit τ un opérateur qui, à certaines formes différentielles ω, de classe C^∞ sur X, fait correspondre une classe de cohomologie $\tau(\omega)$ de $X - S$;

alors on peut définir la dérivée de ω par rapport à τ par la relation :

$$\boxed{\left.\frac{d\omega}{d\tau}\right| S = r(\tau(\omega))} \quad .$$

3. Calcul du résidu de Martinelli.

Ce calcul ne semble pas pouvoir être développé de manière aussi complète que les calculs précédents. L'idée de le faire entrer dans le cadre général de 1 en utilisant une fibration en sphères associée au noyau classique K (voir ci-dessous) de BOCHNER-MARTINELLI, m'a été communiquée par B. V. SINGBAL. Le point de vue sous lequel on considère la formule de Bochner-Martinelli ([34],[35] et [36]) était celui de [52].

a. Calcul du résidu de Martinelli en dimension 0 dans C^n. Un point de l'espace euclidien C^n à n dimensions complexes a pour coordonnées complexes $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ et pour coordonnées réelles $((x_i)_{1\leq i\leq n}, (y_i)_{1\leq i\leq n})$ où $z_i = x_i + iy_i$; δ_n désigne la mesure de Dirac en 0, $\bar{\delta}_n = \delta_n \left(\bigwedge_{1\leq i\leq n} dx_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{1\leq i\leq n} dy_i\right)$; si

$$r_n^2 = \sum_{1\leq i\leq n} z_i \bar{z}_i \quad , \quad \Delta\left(\frac{1}{r^{2n-2}}\right) = -\frac{4\pi^n \delta_n}{(n-2)!} \quad .$$

Alors, si on pose

$$H_n = \frac{\sum_{1\leq i\leq n} dz_1 \ldots \widehat{dz_i} \ldots dz_n \, d\bar{z}_1 \ldots \widehat{d\bar{z}_i} \ldots d\bar{z}_n}{r_n^{2n-2}} \quad ,$$

on déduit de la formule précédente $d'd''H_n = \frac{(2i\pi)^n}{(n-2)!} \bar{\delta}_n$.

Soit

$$\boxed{K_n = \frac{d'H_n}{1-n} = \frac{\sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{i-1} z_i \, dz_1 \ldots dz_n \, d\bar{z}_1 \ldots \widehat{d\bar{z}_i} \ldots d\bar{z}_n}{r_n^{2n}}} \quad ;$$

alors

$$\boxed{d'K_n = 0 \quad , \quad d''K_n = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \bar{\delta}_n} \quad ;$$

donc, si f est une fonction holomorphe dans un domaine X de C^n tel que $0 \in D$,

$$d''(K_n f) = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} f(0) \bar{\delta}_n$$

et, si D est un domaine de C^n tel que $\overline{D} \subset X$,

$$\boxed{\int_{bD} K_n f = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \begin{cases} f(0) & \text{si } 0 \in D' \\ 0 & \text{si } 0 \notin \overline{D'} \end{cases}}$$

Cette formule joue, relativement au résidu de Martinelli, le même rôle que la formule de Cauchy classique relativement au résidu de Leray, et il convient d'écrire

$$\boxed{\text{rés}(K_n f) = f(0)} \quad .$$

Si $\varphi = K_n f$, on obtient alors la formule :

$$\boxed{\int_{\delta\sigma} \varphi = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \int_{\sigma} \text{rés}(\varphi)}$$

qui prouve que r est réalisée par $\dfrac{(2i\pi)^n \text{ rés}}{(n-1)!}$.

b. <u>Calcul du résidu de Martinelli en dimension</u> $n-p$ <u>dans</u> C^n . Soit $\overline{\delta}_p$ le courant d'intégration sur le sous-espace S_p d'équations $z_i = 0$, $1 \leq i \leq p$; soit $r_p^2 = \sum_{1 \leq i \leq p} z_i \overline{z}_i$. On pose

$$H_p = \frac{\sum_{1 \leq i \leq p} dz_1 \ldots \widehat{dz_i} \ldots dz_n \, d\overline{z}_1 \ldots \widehat{d\overline{z}_i} \ldots d\overline{z}_n}{r_p^{2p-2}}$$

$$\boxed{K_p = \frac{d'H_p}{1-p} = \frac{\sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^{i-1} \overline{z}_i \, dz_1 \ldots dz_p \, d\overline{z}_1 \ldots \widehat{d\overline{z}_i} \ldots d\overline{z}_p}{r_p^{2p}}}$$

alors

$$\boxed{d'K_p = 0 \quad , \quad d''K_p = \frac{(2i\pi)^p}{(p-1)!} \overline{\delta}_p} \quad .$$

Soit ω une forme différentielle C^∞ dans un domaine X de C^n , tel que $X \cap S_p \neq \emptyset$; on suppose $d(K_p \wedge \omega) = 0$ dans $X - S_p$; il en résulte $K_p \wedge d\omega = 0$ dans X , et

$$d(K_p \wedge \omega) = dK_p \wedge \omega - K_p \wedge d\omega = dK_p \wedge \omega = \frac{(2i\pi)^p}{(p-1)!} \overline{\delta}_p \wedge \omega \quad .$$

On est donc conduit à poser

$$\boxed{\omega|S_p = \text{rés}(K_p \wedge \omega)}$$

et la formule

$$\boxed{\int_{\delta\sigma} K_p \wedge \omega = \frac{(2i\pi)^p}{(p-1)!}\int_{\sigma} \omega}$$

qui se démontre, grâce à la fibration en boules de $\delta\sigma$, à l'aide de la formule obtenue en (a), prouve que $\frac{(2i\pi)^p}{(p-1)!}$ rés réalise l'homomorphisme r.

c. Calcul du résidu de Martinelli en dimension p sur une variété. Soit X une variété analytique complexe de dimension n, et soit S_p une sous-variété analytique de X, de dimension $n - p$, pour laquelle il existe en chaque point un système $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de coordonnées locales de X dans lequel S_p a pour équations $z_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$; on peut alors construire K_p au voisinage de chaque point de S_p. Si φ est une forme différentielle, C^∞ et fermée dans $X - S_p$, qui, au voisinage de chaque point 0 de S_p, s'exprime sous la forme $\varphi = K_p \wedge \omega$, où ω est C^∞ dans X au voisinage de 0, alors

$$d\varphi = d(K_p \wedge \omega) = \frac{(2i\pi)^p}{(p-1)!}\,\bar{\delta}_p \wedge \omega \quad \text{au voisinage de } 0 ;$$

comme $d\varphi$ et $\bar{\delta}_p$ ne dépendent que de φ et de S_p, $\omega|S_p$ ne dépend aussi que de φ et de S_p, et définit une forme différentielle sur la sous-variété S_p, désignée par $\text{rés}(\varphi)$. Comme précédemment, la formule

$$\boxed{\int_{\delta\sigma} \varphi = \frac{(2i\pi)^p}{(p-1)!}\int_{\sigma} \text{rés}(\varphi)}$$

montre que $\frac{(2i\pi)^p}{(p-1)!}$ rés réalise l'homomorphisme r.

B. Composition des résidus.

1. Théorie générale.

Soient X un espace topologique, S_1 et S_2 deux parties fermées de X. Les inclusions $S_1 \cap S_2 \subset S_1 \cup S_2 \subset X$ donnent naissance [48] à une suite spectrale dont la première ligne est constituée par les cobords :

$$\delta^1 : H_c^{p-1}(S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_c^p(S_1 \cup S_2 - S_1 \cap S_2)$$

$$\delta^2 : H_c^p(S_1 \cup S_2 - S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_c^{p+1}(X - S_1 \cup S_2)$$

dont le composé est un homomorphisme nul ε .

Comme $H_c^p(S_1 \cup S_2 - S_1 \cap S_2)$ est la somme directe de $H_c^p(S_1 - S_1 \cap S_2)$ et de $H_c^p(S_2 - S_1 \cap S_2)$, ε est la somme des homomorphismes ${}^1\delta_2$ et ${}^2\delta_2$ définis de la manière suivante : ${}^1\delta_2$ est le composé du cobord

$H_c^p(S_1 - S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_c^{p+1}(X - S_1 \cup S_2)$ correspondant à l'inclusion $S_1 - S_1 \cap S_2 \subset X - S_2$, et du cobord

$H_c^{p-1}(S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_c^{p-1}(S_1 - S_1 \cap S_2)$ correspondant à l'inclusion $S_1 \cap S_2 \subset S_1$; ${}^2\delta_2$ est le composé du cobord

$H_c^p(S_2 - S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_c^{p+1}(X - S_1 \cup S_2)$ correspondant à l'inclusion $S_2 - S_1 \cap S_2 \subset X - S_1$, et du cobord

$H_c^{p-1}(S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_c^p(S_2 - S_1 \cap S_2)$ correspondant à l'inclusion $S_1 \cap S_2 \subset S_2$. Donc ${}^1\delta_2 + {}^2\delta_2 = 0$. Les homomorphismes ${}^1\delta_2$ et ${}^2\delta_2$ sont appelés cobords composés, relatifs aux parties fermées S_1 et S_2 de X .

$${}^1\delta_2 , {}^2\delta_2 : H_c^{p-1}(S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_c^{p+1}(X - S_1 \cup S_2)$$

Si $S_1 \cap S_2$, $S_1 - S_1 \cap S_2$, $S_2 - S_1 \cap S_2$ et $X - S_1 \cup S_2$ sont des variétés topologiques, et si $S_1 - S_1 \cap S_2$ et $S_2 - S_1 \cap S_2$ ont la même dimension, l'isomorphisme entre l'homologie et la cohomologie fournit les cobords :

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta^1 : H_{c,*}(S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_{c,*}(S_1 \cup S_2 - S_1 \cap S_2) \\ \delta^2 : H_{c,*}(S_1 \cup S_2 - S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_{c,*}(X - S_1 \cup S_2) \end{array}} \quad \boxed{\delta^2 \circ \delta^1 = 0}$$

et les cobords composés

$$\boxed{{}^1\delta_2 , {}^2\delta_2 : H_{c,*}(S_1 \cap S_2) \longrightarrow H_{c,*}(X - S_1 \cup S_2) \ , \ {}^1\delta_2 + {}^2\delta_2 = 0} \ .$$

La dualité entre homologie et cohomologie fournit les résidus :

$$\boxed{\begin{array}{ll} r^1 : H^*(S_1 \cup S_2 - S_1 \cap S_2) \longrightarrow H^*(S_1 \cap S_2) & \\ & r^1 \circ r^2 = 0 \\ r^2 : H^*(X - S_1 \cup S_2) \longrightarrow H^*(S_1 \cup S_2 - S_1 \cap S_2) & \end{array}}$$

et les résidus composés :

$$\boxed{{}^1r_2 \,,\ {}^2r_2 : H^*(X - S_1 \cup S_2) \longrightarrow H^*(S_1 \cap S_2) \quad , \quad {}^1r_2 + {}^2r_2 = 0} \quad .$$

Les formules, exprimant les dualités ci-dessus, sont les formules des résidus. Si $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une famille de parties fermées de X, on généralise la définition des cobords composés et des résidus composés en utilisant les notations, introduites par LERAY ([7],[8] et [9]) lorsque les S_i sont des sous-variétés non singulières, de codimension 1 en position générale dans une variété analytique complexe X.

2. Composition des résidus de Leray.

a. Hypothèses de Leray. La définition des cobords et des résidus composés est valable en particulier sous les hypothèses de Leray, qui viennent d'être mentionnées. Pour le calcul du cobord composé, LERAY généralise la fibration en disques par une fibration en polydisques ; pour le calcul du résidu composé, il utilise l'expression

$$\varphi = \frac{ds_1}{s_1} \wedge \frac{ds_2}{s_2} \wedge \omega + \frac{ds_1}{s_1} \wedge \psi_1 + \frac{ds_2}{s_2} \wedge \psi_2 + \theta \quad ,$$

définit $\omega = \text{rés}(\varphi)$, et démontre directement à l'aide de la représentation du cobord, l'anticommutativité des opérations de composition. Enfin, les résidus composés se calculent, dans certains cas, à l'aide des dérivées partielles définies dans I. :

$$\boxed{\prod_{1 \leq i \leq m} (q_i\,!)\ \text{Rés}^m \frac{\left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} dz_i\right) \wedge \varphi}{\prod_{1 \leq i \leq m} z_i^{q_i}} = \left.\frac{\partial^q \varphi}{\partial z_1^{q_1} \ldots \partial z_m^{q_m}}\right|_S \ , \quad q = \sum_{1 \leq j \leq m} q_j}$$

Cela permet les généralisations analogues à celles de A2c .

b. Généralisation. La théorie est possible sous des hypothèses plus larges que celles de Leray ; on ne donnera ici qu'une esquisse, pour $m = 2$, de la généralisation qui sera exposée dans un travail ultérieur.

Soit $m = 2$; supposons que $S = S_1 \cap S_2$ est non singulière et de dimension complexe $n-2$, et que, en tout point 0 de S, S_1 et S_2 ont des composantes irréductibles non singulières. Alors, le cobord composé se définit directement de la façon suivante : soient V un voisinage de S, ρ une rétraction de V sur S ; pour tout simplexe σ de S, ${}^1\delta_2(\sigma)$ est une chaîne de $b\rho^{-1}(\sigma) \cap (bV - (S_1 \cup S_2))$, dont la trace sur chaque sphère $b\rho^{-1}(x)$, $x \in S$, est un cycle dont le coefficient de séparation ([1] et [10] ; [42]) relativement à S_1 et S_2, égale 1. Alors, soit φ une forme différentielle, C^∞ dans $X - (S_1 \cup S_2)$, qui, au voisinage de chaque point de S, s'écrive sous la forme

$$\varphi = \frac{ds_1}{s_1} \wedge \frac{ds_2}{s_2} \wedge \psi + \frac{ds_1}{s_1} \wedge \psi_1 + \frac{ds_2}{s_2} \wedge \psi_2 + \theta \ ,$$

$s_1 = 0$ et $s_2 = 0$ étant des équations locales de S_1 et S_2. En se ramenant à des intégrations sur les cycles séparateurs de la fibration ci-dessus, et en utilisant le résultat de Martinelli-Cacciopoli ([1] et [10]), on montre que

$$\int_\sigma \text{rés}(\varphi) = (2i\pi)^2 \int_{{}^1\delta_2(\sigma)} \varphi$$

où $\text{rés}(\varphi) = \psi$, pour tout cycle σ de S.

La formule de Weil [23] peut apparaître comme une formule de composition de résidus de Leray, dans un cas singulier ; toutefois, on peut aussi l'examiner selon l'esprit de D.

3. Composition des résidus de Martinelli.

Les considérations générales de 1 s'appliquent également dans ce cas. Dans le calcul de ces résidus apparaissent des produits extérieurs de noyaux élémentaires de Bochner-Martinelli, tels que

$$K_p \wedge K_q = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}} (-1)^{i+j+q(p-1)}\, \bar{z}_i \bar{z}_{p+j}\, dz_1 \dots dz_{p+q}\, d\bar{z}_1 \dots \widehat{d\bar{z}_i} \dots d\bar{z}_p\, d\bar{z}_{p+1} \dots \widehat{d\bar{z}_{p+j}} \dots d\bar{z}_{p+q}}{\left(\displaystyle\sum_{1 \le i \le p} z_i \bar{z}_i\right)^p \left(\displaystyle\sum_{1 \le j \le q} z_{p+j} \bar{z}_{p+j}\right)^q}$$

On voit alors que le noyau de la grande formule de Martinelli ([39], [40] et [41]) est une combinaison linéaire de produits extérieurs de noyaux élémentaires, et que cette formule est obtenue en utilisant toutes les compositions possibles permettant d'augmenter, d'un nombre entier donné, la dimension d'un cycle. Il semble indiqué d'examiner cette formule selon l'esprit de D , car des calculs explicites d'enlacement de cycles y interviennent.

4. Généralisations diverses.

a. Résidus spectraux. Soient X un espace topologique, et $(X_i)_{1\leq i\leq h}$ une famille finie de parties fermées de X, vérifiant $X_i \supset X_{i+1}$ pour tout i tel que $0 \leq i \leq h-1$, $X_0 = X$. La suite (complétée par 0 aux extrémités) de cobords :

$$0 \to H_c^p(X_h) \to H_c^{p+1}(X_{h-1} - X_h) \to \dots \to H_c^{p+h-i}(X_i - X_{i+1}) \to \dots \to H_c^{p+h}(X - X_1) \to 0$$

est la première ligne d'une suite spectrale de cohomologie [48] qui aboutit à $H^*(X)$, convenablement gradué. Le composé de deux homomorphismes, dans cette suite spectrale, est nul. Si $X_i - X_{i+1}$, pour $0 \leq i \leq h-1$, est une variété, on obtient, par isomorphisme, des homomorphismes d'homologie, dits cobords spectraux, et, par dualité, des homomorphismes de cohomologie, dits résidus spectraux. Les formules exprimant la dualité, sont dites formules des résidus spectraux.

Les hypothèses ci-dessus sont réalisées en particulier dans 1 , où en plus des résidus composés, apparaissent des résidus spectraux. Elles le sont aussi dans les deux situations suivantes :

i. X est un espace analytique complexe, $X_0 = X$, X_{i+1} est l'ensemble des points non ordinaires de X_i, $0 \leq i \leq h-1$, X_h est une variété analytique complexe non vide.

ii. X est une variété analytique complexe, $X_0 = X$, X_1 est un ensemble analytique dans X, X_{i+1} est l'ensemble des points non ordinaires de X_i pour $1 \leq i \leq h-1$, X_h est une variété analytique complexe non vide ; cette situation admet comme cas particulier les hypothèses de Leray de 2 et les hypothèses correspondantes de 3 , ainsi que les hypothèses de Dolbeault ([3] et [4]).

APPENDICE

Formes différentielles induites sur un ensemble analytique.

Soient X une variété analytique complexe (connexe), S un ensemble analytique dans X ; il lui correspond [50] un courant $\tilde{S}$, continu d'ordre 0 , et fermé. Soit $\mathcal{E}(X)$ l'algèbre différentielle graduée (sur le corps des complexes) des formes différentielles C^∞ sur X ; on dit qu'un élément φ de $\mathcal{E}(X)$ s'annule sur S si $\varphi \wedge \tilde{S} = 0$; l'ensemble $\mathcal{E}(X, S)$ des éléments de $\mathcal{E}(X)$ qui s'annulent sur S est une sous-algèbre différentielle graduée de $\mathcal{E}(X)$

(i. e. $\mathcal{E}(X, S)$ est stable relativement à l'opérateur différentiel d ; ceci est vrai parce que $\tilde{S}$ est fermé) ; l'algèbre quotient $\mathcal{E}(X)/\mathcal{E}(X, S)$ est une algèbre différentielle graduée, appelée algèbre des formes différentielles induites par X sur S .

Soit S^* l'ensemble des points ordinaires de S ; S^* est une variété analytique complexe ; il existe un opérateur canonique qui, à toute $\varphi \in \mathcal{E}(X)$, associe sa restriction $\varphi|S^*$ à la variété S^* ; il résulte de [50] que $\mathcal{E}(X, S)$ est l'ensemble des éléments φ de $\mathcal{E}(X)$, tels que $\varphi|S^* = 0$. Si $\varphi \in \mathcal{E}(X)$, on désigne par $\varphi|S$ l'image canonique de φ dans $\mathcal{E}(X)/\mathcal{E}(X, S)$. L'opération de restriction ainsi définie conserve le degré, et commute avec d : $d(\varphi|S) = d\varphi|S$.

On définit de manière évidente le faisceau différentiel gradué des germes de formes différentielles induites par X sur S ; l'algèbre de ses sections, et l'algèbre $\mathcal{E}(X)/\mathcal{E}(X, S)$, permettant de définir des algèbres de cohomologie de S ; il serait intéressant de comparer cette cohomologie avec la cohomologie, à coefficients complexes, de S .

BIBLIOGRAPHIE

[A] Théorie des Résidus

[1] CACCIOPPOLI (Renato). - Residui di integrali doppi e intersezioni di curve analitiche, Ann. Mat. pura ed appl., Serie 4, t. 29, 1949, p. 1-14.

[2] DIDON (M. F.). - Note sur une formule de calcul intégral, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 2, t. 2, 1873, p. 31-48.

[3] DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, I., Annals of Math., Series 2, t. 64, 1956, p. 83-130.

[4] DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, II., Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 282-330.

[5] DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles méromorphes localement exactes, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 494-518.

[6] KODAIRA (K.) and SPENCER (D. C.). - On a theorem of Lefschetz and the lemma of Enriques-Severi-Zariski, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 39, 1953, p. 1273-1278.

[7] LERAY (Jean). - La théorie des résidus sur une variété analytique complexe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 2253-2257.

[8] LERAY (Jean). - Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 22-28.

[9] LERAY (Jean). - Extension de la théorie des résidus au cas de plusieurs variables, Cours au Collège de France, Janvier-Mars 1959.

[10] MARTINELLI (Enzo). - Contributi alla teoria dei residui per le funzioni di due variabili complesse, Ann. Mat. pura ed appl., Serie 4, t. 39, 1955, p. 335-343.

[11] PICARD (Emile). - Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 96, 1883, p. 320-323.

[12] PICARD (Emile). - Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 102, 1886, p. 250-253.

[13] PICARD (Emile). - Sur les périodes des intégrales doubles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 102, 1886, p. 349-350.

[14] PICARD (Emile). - Sur le calcul des périodes des intégrales doubles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 102, 1886, p. 410-412.

[15] PICARD (E.) et SIMART (G.). - Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. - Paris, Gauthier-Villars, 1897.

[16] POINCARÉ (Henri). - Sur les résidus des intégrales doubles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 102, 1886, p. 202-204.

[17] POINCARÉ (Henri). - Sur les résidus des intégrales doubles, Acta Math., t. 9, 1887, p. 321-380.

[18] de RHAM (Georges). - Sur la notion d'homologie et les résidus d'intégrales multiples, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses [1932. Zürich], Band II : Sektions-Vorträge. - Zürich und Leipzig, Orell Füssli ; p. 195.

[19] de RHAM (Georges). - Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples, Enseign. math., t. 35, 1936, p. 213-228.

[20] SEGRE (Beniamino). - Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali n-pli, nella teoria delle funzioni di n variabili complesse, Atti del primo Congresso dell'Unione matematica italiana [1937. Firenze]. - Bologna, Nicola Zanichelli, 1938 ; p. 174-180.

[21] SEVERI (Francesco). - Funzioni analitiche e forme differenziali, Atti del quarto Congresso dell'Unione matematica italiana [1951. Taormina], t. 1. - Roma, Edizioni Cremonese, 1953 ; p. 125-140.

[22] WIRTINGER (Wilhelm). - Ein Integralsatz über analytische Gebilde im Gebiete von mehreren komplexen Veränderlichen, Monatshefte für Math. und Phys., t. 45, 1937, p. 418-431.

[B] Formules intégrales

[a] Formules de Bergman et Weil.

La formule de Weil est démontrée, sous certaines hypothèses, dans :

[23] WEIL (André). - L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Annalen, t. 111, 1935, p. 178-182.

La possibilité de réaliser ces hypothèses est établie dans :

[24] CARTAN (Henri). - Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 61, 1944, p. 149-197.

[25] CARTAN (Henri). - Idéaux et modules de fonctions analytiques de n variables complexes, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 29-64.

[26] HEFER (Hans). - Zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, Über eine Zerlegung analytischer Funktionen und die Weilsche Integraldarstellung, Math. Annalen, t. 122, 1950, p. 276-278.

[27] OKA (Kiyosi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, V. : L'intégrale de Cauchy, Japanese J. of Math., t. 17, 1941, p. 525-531.

[28] OKA (Kiyosi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VII. : Sur quelques notions arithmétiques, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 1-27.

Les difficultés de démonstration rigoureuse de la formule de Weil sont évitées par :

[29] CARTAN (Henri). - Intégrale d'André Weil, Séminaire H. Cartan, t. 4, 1951/52 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, exposé 6.

Le résultat ainsi obtenu par H. Cartan est exposé sans démonstration dans :

[30] NORGUET (François). - Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (Passage du local au global), Bull. Soc. math. France, t. 82, 1954, p. 137-159.

Une autre démonstration de la formule de Weil, qui fournit en outre une famille de formules intermédiaires, se trouve dans :

[31] SOMMER (Friedrich). - Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer complexer Veränderlichen, Math. Annalen, t. 125, 1952, p. 172-182.

Dans le même ordre d'idées que l'intégrale de Weil se situent les travaux de Bergman, par exemple :

[32] BERGMAN (Stefan). - Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler, I., Math. Z., t. 39, 1934, p. 76-94 ; II., Math. Z., t. 39, 1934, p. 605-608.

[33] BERGMAN (Stefan). - Über eine Integraldarstellung von Funktionen zweier komplexer Veränderlichen, Recueil math. Soc. math. Moscou (Mat. Sbornik), N. S., t. 1 (43), 1936, p. 851-862.

[b] Formules de Bochner et de Martinelli.

[34] BOCHNER (Salomon). - Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula, Annals of Math., Series 2, t. 44, 1943, p. 652-673.

[35] MARTINELLI (Enzo). - Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse, Mem. r. Accad. Ital., t. 9, 1938, p. 269-283.

[36] MARTINELLI (Enzo). - Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs, Comment. Math. Helvet., t. 15, 1942/43, p. 340-349.

[37] MARTINELLI (Enzo). - Sulla formula di Cauchy n-dimensionale e sopra un teorema di Hartogs nella teoria delle funzioni di n variabili complesse, Comment. Math. Helvet., t. 17, 1944/45, p. 201-208.

[38] MARTINELLI (Enzo). - Formula di Cauchy (n+1)-dimensionale per le funzioni analitiche di n variabili complesse, Comment. Math. Helvet., t. 18, 1945/46, p. 30-41.

[39] MARTINELLI (Enzo). - Formule integrali e topologia nella teoria delle funzioni di più variabili complesse, Pont. Acad. Sc. Acta, t. 9, 1945, p. 235-250.

[40] MARTINELLI (Enzo). - Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di più variabili complesse, Annali Mat. pura ed appl. Serie 4, t. 34, 1953, p. 277-347.

[41] MARTINELLI (Enzo). - Sur l'extension des théorèmes de Cauchy aux fonctions de plusieurs variables complexes, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles]. - Liège, Georges Thone ; Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Recherche mathématique).

[C] Fonctorielles analytiques de Fantappiè

(Bibliographie très sommaire)

[42] FANTAPPIÈ (Luigi). - I funzionali delle funzioni de due variabili, Mem. r. Accad. Ital., t. 2, 1931, p. 1-172.

[43] FANTAPPIÈ (Luigi). - Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones. - Barcelona, Consejo superior de Investigaciones cientificas, 1943.

[44] FANTAPPIÈ (Luigi). - I funzionali analitici e le loro applicazioni alla risoluzione delle equazioni alle derivate parziali, Centro internazionale matematico estivo, Primo ciclo, Varenna, 9-18 giugno 1954, Analisi funzionale. - Roma, Istituto matematico, 1954, multigraphié.

[45] LERAY (Jean). - Fonction de variables complexes : sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctions linéaires, Atti Accad. naz. dei Lincei, Rend., Serie 8, t. 20, 1956, p. 589-590.

[46] PELLEGRINO (Franco). - La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications, Complément au volume de Paul Lévy : Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. - Paris, Gauthier-Villars, 1951.

[47] PELLEGRINO (F.) e SUCCI (F.). - Fondamenti della teoria dei funzionali misti complessi, Univ. Roma Rend. Mat., Serie 5, t. 12, 1953, p. 105-162.

[D] Bibliographie complémentaire.

[48] FÁRY (István). - Valeurs critiques et algèbres spectrales d'une application, Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 437-490.

[49] GEL'FAND (I. M.) i ŠILOV (G. E.). - Obobščennye funkcii i deistviya nad nimi [Fonctions généralisées et leurs opérations] (Obobščennye funkcii, Vypusk 1). - Moskva, Gosudarstv. Izdat. Fiz-Mat. Lit., 1958.

[50] LELONG (Pierre). - Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 239-262.

[51] LERAY (Jean). - Congrès math. Canadien, 1955 [Notes multigraphiées].

[52] NORGUET (François). - Produit tensoriel et produit de composition des courants, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 667-669.

[53] NORGUET (François). - Sur l'homologie associée à une famille de dérivations, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 1081-1083.

[54] de RHAM (Georges). - Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire, Comment. Math. Helvet., t. 28, 1954, p. 346-352.

[55] de RHAM (G.) and KODAIRA (K.). - Harmonic integrals (Lectures delivered in a Seminar conducted by Professors Hermann Weyl and Karl Ludwig Siegel at the Institute for advanced Study, 1950, revised 1953). - Princeton, Institute for advanced Study, 1953, multigraphié.

[56] SCHWARTZ (Laurent). - Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe, Colloque international de Géométrie différentielle [1953. Strasbourg]. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953 (Colloques intern. C. N. R. S., 52) ; p. 185-195.

[57] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale, Multiplicités (Cours au Collège de France, 1957/58).