Hubert Delange

Sur les représentations exponentielles des fonctions holomorphes dans le demi-plan supérieur avec une partie imaginaire positive

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. nº 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A4_0>

SUR LES REPRÉSENTATIONS EXPONENTIELLES DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE DEMI-PLAN SUPÉRIEUR AVEC UNE PARTIE IMAGINAIRE POSITIVE

par Hubert DELANGE

Cet exposé est un résumé d'un mémoire d'ARONSZAJN et DONOGHUE [1].

1. - Nous considérons la classe P des fonctions $\varphi(\zeta)$ holomorphes dans le demi-plan $\Im[\zeta] > 0$ et satisfaisant dans ce demi-plan à $\Im[\varphi(\zeta)] \geqslant 0$.

On peut noter tout de suite que, pour une telle fonction, ou bien $\Im[\varphi(\zeta)] > 0$ pour tout point du demi-plan, ou bien $\varphi(\zeta)$ est une constante réelle (car $\Im[\varphi(\zeta)]$ ne peut avoir un minimum en un point sans être constante).

Il est connu que la classe P est identique à celle des fonctions représentées par

$$\varphi(\zeta) = \alpha\zeta + \beta + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\lambda - \zeta} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right] d\mu(\lambda) \quad , \tag{1}$$

où α et β sont réels, $\alpha \geqslant 0$, et $\mu(\lambda)$ est une fonction réelle non décroissante telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda^2+1} < +\infty \quad .$$

φ étant donnée, la mesure associée à μ est bien déterminée. En effet, comme le montre un calcul facile, quand η tend vers zéro par valeurs positives,

$$\int_a^b \Im[\varphi(\xi + i\eta)]\, d\xi$$

tend vers $\pi\left[\frac{\mu(b+0)+\mu(b-0)}{2} - \frac{\mu(a+0)+\mu(a-0)}{2}\right]$. Ainsi, la mesure est déterminée

---

(1) ARONSZAJN (N.) and DONOGHUE (W. F.). - On exponential representations of analytic functions in the upper half-plane with positive imaginary part, J. Anal. math. Jerusalem, t. 5, 1956-57, p. 321-388.

pour tous les intervalles "réguliers" (c'est-à-dire ceux dont les extrémités sont des points de continuité de μ), et par suite pour tous les ensembles boréliens.

La fonction μ est elle-même bien déterminée si on la normalise en imposant les conditions :

$$\mu(0) = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \mu(\lambda) = \frac{1}{2}[\mu(\lambda + 0) + \mu(\lambda - 0)] \ .$$

On a alors

$$(2) \qquad \mu(b) - \mu(a) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \to +0} \int_a^b \Im[\varphi(\xi + i\eta)] \, d\xi \ .$$

Dans la suite, nous désignerons par la même lettre μ aussi bien la mesure que la fonction.

Naturellement, α et β sont aussi déterminés quand la fonction φ est donnée. D'ailleurs, on voit de suite que $\beta = \Re[\varphi(i)]$, tandis qu'un calcul facile montre que $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}$ tend vers α lorsque ζ tend vers l'infini dans un angle tel que $\theta_1 < \arg \zeta < \theta_2$, où $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$.

1.1. - On peut noter aussi que la mesure de l'ensemble réduit au point x_0, mesure que nous désignerons par $\mu([x_0])$, est la limite du produit $(x - \zeta)\varphi(\zeta)$ lorsque ζ tend vers x_0 dans un angle de même type que le précédent.

Il est connu également que, sauf au plus pour des valeurs du nombre réel x_0 formant un ensemble de mesure nulle, $\varphi(\zeta)$ tend vers une limite finie quand ζ tend vers x_0 dans un tel angle. De plus, lorsque $\mu'(x_0)$ existe, ce qui a lieu aussi presque-partout, $\Im[\varphi(x_0 + iy)]$ tend vers $\pi\mu'(x_0)$ quand y tend vers zéro par valeurs positives.

1.2. - Dans le cas particulier où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda| \, d\mu(\lambda)}{\lambda^2 + 1} < +\infty \ ,$$

on peut écrire la formule (1) sous la forme plus simple

$$\varphi(\zeta) = \alpha\zeta + \beta_\infty + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - \zeta} \ ,$$

où

$$\beta_\infty = \beta - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda \, d\mu(\lambda)}{\lambda^2+1}$$

Nous appellerons ceci la "représentation canonique relative à l'infini" de $\varphi(\zeta)$, celle donnée par la formule (1) étant la "représentation canonique relative à i ".

2. Remarquons par ailleurs que, <u>si la fonction φ satisfait à $\Im[\varphi(\zeta)] \leq M$ pour $\Im[\zeta] > 0$, on a $\alpha = 0$ et μ est absolument continue avec une dérivée $\leq \frac{M}{\pi}$</u>.

En effet, $\alpha = \lim\limits_{\eta \to +\infty} \frac{\varphi(i\eta)}{i\eta}$ et $\Re[\frac{\varphi(i\eta)}{i\eta}] = \frac{\Im[\varphi(i\eta)]}{\eta} \leq \frac{M}{\eta}$.

Ceci donne $\Re\alpha \leq 0$, d'où $\alpha = 0$ puisque α est réel $\geqslant 0$.

D'autre part, la formule (2) montre que, pour $a < b$,

$$\mu(b) - \mu(a) \leq \frac{M}{\pi}(b-a) \quad ,$$

d'où le résultat relatif à μ.

On peut poser $\mu(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)\,dx$, où f est mesurable et $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{\pi}$ ($f(x) = \mu'(x)$ presque partout).

Ainsi, pour toute fonction $\varphi \in P$ et telle que $\Im[\varphi(\zeta)] \leq M$, on a la représentation

$$\varphi(\zeta) = \beta + \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{1}{x-\zeta} - \frac{x}{x^2+1}] f(x)\,dx \quad ,$$

où β est une constante réelle et f une fonction réelle mesurable satisfaisant à $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{\pi}$.

D'ailleurs, toute expression de cette forme définit une fonction du type indiqué.

f est bien déterminée quand on connaît φ si l'on convient d'identifier deux fonctions égales presque-partout (puisque l'intégrale indéfinie de f est déterminée).

3. Notons maintenant que, si φ est une fonction non identiquement nulle de la classe P , elle peut se mettre d'une façon unique sous la forme $\varphi(\zeta) = e^{\Phi(\zeta)}$, où $\Phi \in P$ et $\Im[\Phi(\zeta)] \leq \pi$.

Si φ n'est pas une constante réelle, on a $\Im[\varphi(\zeta)] > 0$ dans tout le demi-plan $\Im[\zeta] > 0$ et $\Phi(\zeta)$ est la valeur principale de $\log \varphi(\zeta)$.

Si $\varphi(\zeta) = C$, où C est une constante réelle $\neq 0$,

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} \log C & \text{si } C > 0 , \\ \log |C| + i\pi & \text{si } C < 0 . \end{cases}$$

On voit ainsi que toute fonction non identiquelent nulle de la classe P possède une représentation unique de la forme

$$\varphi(\zeta) = \exp\left\{\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{x-\zeta} - \frac{x}{x^2+1}\right] f(x)\, dx\right\} , \tag{3}$$

où σ est une constante réelle et f une fonction réelle mesurable satisfaisant à $0 \leq f(x) \leq 1$.

D'ailleurs, inversement, toute expression de cette forme définit une fonction non identiquement nulle de la classe P .

Ainsi, toute fonction non identiquement nulle de la classe P possède deux représentations : la représentation ordinaire, donnée par la formule (1), et la représentation exponentielle, donnée par la formule (3).

4. L'objet du mémoire d'ARONSZAJN et DONOGHUE est d'étudier les relations entre certaines propriétés, d'une part de la mesure μ et des constantes α et β , d'autre part de la fonction f , qui figurent dans les deux représentations d'une même fonction non identiquement nulle de la classe P .

4.1. - h et k étant deux nombres positifs ou nuls, on désigne par $\mathfrak{M}(h , k)$ la classe des mesures positives telles que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|\lambda|^h}{\lambda^2+1}\, d\mu(\lambda) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\lambda^2+1}\, d\mu(\lambda) < +\infty .$$

On désigne de même par $\mathcal{G}(h , k)$ la classe des fonctions réelles mesurables satisfaisant à $|f(x)| \leq 1$ et telles que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|x|^h}{x^2+1} |f(x)| \, dx < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x^k}{x^2+1} |f(x)| \, dx < +\infty \quad .$$

La mesure μ qui figure dans la représentation ordinaire d'une fonction de la classe P appartient toujours à la classe $\mathfrak{M}(0\ ,\ 0)$. Il existe une représentation canonique relative à l'infini, comme il a été indiqué au paragraphe 1.2, si $\mu \in \mathfrak{M}(1\ ,\ 1)$.

De même la fonction f qui figure dans la représentation exponentielle appartient toujours à la classe $\mathcal{G}(1\ ,\ 1)$.

Il est clair que, si h et $k \geqslant 1$,

$$\mathfrak{M}(h\ ,\ k) \subset \mathfrak{M}(1\ ,\ 1) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}(h\ ,\ k) \subset \mathcal{G}(1\ ,\ 1) .$$

On introduit, par ailleurs, les fonctions X^+ et X^- définies par

$$X^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x > 0 , \\ 0 & \text{pour} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad X^-(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x < 0 , \\ 0 & \text{pour} \quad x \geqslant 0 . \end{cases}$$

On a alors le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME A. - <u>Soient</u> h <u>et</u> $k \geqslant 1$.

a. $f - X^- \in \mathcal{G}(h\ ,\ k) \rightleftarrows \alpha > 0$ <u>et</u> $\mu \in \mathfrak{M}(h-1\ ,\ k-1)$;

b. $f \in \mathcal{G}(h\ ,\ k) \rightleftarrows \alpha = 0\ ,\ \mu \in \mathfrak{M}(h\ ,\ k)$ et $\beta_\infty > 0$;

c. $f - 1 \in \mathcal{G}(h\ ,\ k) \rightleftarrows \alpha = 0\ ,\ \mu \in \mathfrak{M}(h\ ,\ k)$ et $\beta_\infty < 0$;

d. $f - X^+ \in \mathcal{G}(h\ ,\ k) \rightleftarrows \alpha = 0\ ,\ \mu \in \mathfrak{M}(h+1\ ,\ k+1)$ <u>et</u> $\beta_\infty = 0$.

Les auteurs donnent aussi un théorème B , d'énoncé plus compliqué, qui fait intervenir les fonctions $f' = fX^-$ et $f'' = fX^+$.

5. Il n'est pas possible de donner ici les démonstrations, même pour une seule des quatre parties du théorème A . Nous nous bornerons à essayer de donner une idée des méthodes employées.

5.1. - Les auteurs utilisent systématiquement la décomposition d'une fonction non identiquement nulle de la classe P en un produit de fonctions appartenant respectivement aux classes P' et P" définies comme suit :

P' est l'ensemble des fonctions $\not\equiv 0$ de la classe P telles que, dans leur représentation exponentielle, $f(x) = 0$ pour $x > 0$.

P" est l'ensemble des fonctions $\not\equiv 0$ de la classe P telles que, dans leur représentation exponentielle, $f(x) = 0$ pour $x < 0$.

Il est clair que, si φ est une fonction $\not\equiv 0$ de la classe P, on peut écrire

$$\varphi = \varphi' \varphi'' \quad , \text{ où } \varphi' \in P' \text{ et } \varphi'' \in P'' .$$

Si f, f' et f" sont les fonctions qui figurent respectivement dans les représentations exponentielles de φ, φ' et φ'', on doit avoir $f' = fX^-$ et $f'' = fX^+$. Ainsi φ' et φ'' sont déterminées à un facteur constant près.

5.1.1. - Les auteurs donnent d'abord des conditions relatives à la représentation ordinaire d'une fonction φ de la classe P pour que cette fonction appartienne à P' ou à P", ainsi que des propriétés relatives à ces cas.

Ainsi on a le

LEMME 1. - φ <u>n'étant pas identiquement nulle, pour que</u> $\varphi \in P'$, <u>il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites</u> :

1° <u>L'ensemble des nombres</u> < 0 <u>est un support pour la mesure</u> μ (Autrement dit, tout ensemble contenu dans l'ensemble des nombres ≥ 0 a une mesure nulle) ;

2° <u>L'intégrale</u> $\int_{-\infty}^{-0} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}$ <u>est finie et</u> $\beta + \int_{-\infty}^{0} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)} \geq 0$.

En effet, la représentation exponentielle montre que, si $\varphi \in P'$, φ est holomorphe dans le complémentaire de l'ensemble des nombres réels ≤ 0 et, pour $\xi > 0$, $\varphi(\xi)$ est réelle > 0 et est une fonction non décroissante de ξ.

La formule (2) montre alors que la fonction μ est constante pour $\lambda > 0$.

On a donc pour $\xi > 0$

$$\varphi(\xi) = \alpha \xi + \beta - \frac{\mu([0])}{\xi} + \int_{-\infty}^{-0} \left[\frac{1}{\lambda - \xi} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right] d\mu(\lambda) .$$

Comme, pour $\lambda < 0$, $\frac{1}{\lambda - \xi} - \frac{1}{\lambda^2+1}$ décroit quand ξ décroît et tend vers $\frac{1}{\lambda(\lambda^2+1)}$ quand ξ tend vers 0 , on voit que $\varphi(\xi)$ ne peut rester >0 que si

$$\int_{-\infty}^{-0} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)} > -\infty \quad ; \quad \beta + \int_{-\infty}^{-0} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mu([0]) = 0 \ .$$

Inversement, on voit que, si les conditions indiquées sont satisfaites, φ est holomorphe dans le complémentaire de l'ensemble des nombres réels $\leqslant 0$ et $\varphi(\xi)$ est réelle >0 pour $\xi > 0$. Alors, la formule (2), appliquée à la représentation de la fonction égale à la valeur principale de $\log \varphi(\xi)$, montre que

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < a < b \ .$$

Le lemme 1 peut être complété comme suit :

<u>Si les conditions indiquées sont satisfaites,</u>

a. $\frac{\varphi(\xi)}{\xi}$ <u>tend vers</u> α <u>quand</u> ξ <u>tend vers</u> $+\infty$;

b. <u>Pour que</u> $\varphi(\xi)$ <u>soit bornée pour</u> $\xi > 0$, <u>il faut et il suffit que</u> $\int_{-\infty}^{0} \frac{|\lambda| d\mu(\lambda)}{\lambda^2+1} < +\infty$ <u>et</u> $\alpha = 0$, <u>ou que</u> $\int_{-\infty}^{0} \frac{|x|}{x^2+1} f(x)\, dx < +\infty$.

<u>Alors</u> $\beta_\infty > 0$.

(a) résulte d'un calcul simple et la première partie de (b) de ce que $\frac{1}{\lambda - \xi} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$ est une fonction croissante de ξ et tend vers $\frac{-\lambda}{\lambda^2+1}$ quand ξ tend vers $+\infty$.

L'inégalité $\beta_\infty > 0$, dans le cas où $\varphi(\xi)$ est bornée pour $\xi > 0$, résulte de ce que, dans ce cas, β_∞ est la limite de $\varphi(\xi)$ pour ξ tendant vers $+\infty$, donc $= e^{\sigma}$.

On établit de façon semblable le

- LEMME 2. - φ n'étant pas identiquement nulle, pour que $\varphi \in P''$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

1° L'ensemble des nombres $\geqslant 0$ est un support pour la mesure μ (autrement dit, tout ensemble contenu dans l'ensemble des nombres < 0 a une mesure nulle) ;

2° $\alpha = 0$;

3° L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2+1} d\mu(\lambda)$ est finie et $\leq \beta$. (De sorte que φ possède une représentation canonique relative à l'infini, et $\beta_\infty \geqslant 0$).

Alors

a. $\varphi(\zeta)$ tend vers β_∞ quand ζ tend vers $-\infty$;

b. Pour que $\beta_\infty > 0$, il faut et il suffit que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} f(x)\, dx < +\infty$.

5.1.2. - On a ensuite le théorème suivant :

Soit φ une fonction non identiquement nulle de la classe P .

Supposons que $\varphi = \varphi'\varphi''$, avec $\varphi' \in P'$ et $\varphi'' \in P''$.

Supposons que l'on ait, compte-tenu des lemmes 1 et 2,

$$\varphi(\zeta) = \alpha\zeta + \beta + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\lambda-\zeta} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right] d\mu(\lambda) \quad ,$$

$$\varphi'(\zeta) = \alpha'\zeta + \beta' + \int_{-\infty}^{-0} \left[\frac{1}{\lambda-\zeta} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right] d\mu'(\lambda)$$

et

$$\varphi''(\zeta) = \beta''_\infty + \int_0^{+\infty} \frac{d\mu''(\lambda)}{\lambda-\zeta} \quad .$$

Alors, on a $\alpha = \alpha'\beta''_\infty$ et $d\mu(\lambda) = \varphi'(\lambda)\, d\mu''(\lambda) + \varphi''(\lambda)\, d\mu'(\lambda)$.

La formule $\alpha = \alpha'\beta''_\infty$ résulte de ce que α est la limite de $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}$ pour ζ tendant vers l'infini dans un angle $\theta_1 < \arg\zeta < \theta_2$, où $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$, et que $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta} \cdot \varphi''(\zeta)$.

La formule pour $d\mu(\lambda)$ résulte de la formule (2) et de ce que $\mu([0])$ est la limite, pour ζ tendant vers 0 dans un angle tel que le précédent, de $-\zeta\psi(\zeta) = -\zeta\varphi''(\zeta)\cdot\varphi'(\zeta)$.

5.2. – Les auteurs utilisent encore le théorème de comparaison suivant :

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions non identiquement nulles de la classe P et soient f_1 et f_2 les fonctions qui figurent dans leurs représentations exponentielles.

Si la fonction $\varphi_1 - \varphi_2$ est holomorphe sur le segment ouvert $]a, b[$ et prend sur ce segment des valeurs réelles $\geqslant 0$, on a

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \text{ presque partout sur }]a, b[.$$

Cela tient à ce que, sauf au plus pour des valeurs du nombre réel x formant un ensemble de mesure nulle, on a

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \to +0} \arg[\varphi_1(x + iy)] \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \to +0} \arg[\varphi_2(x + iy)] ,$$

(où chaque argument est pris avec sa valeur comprise entre 0 et π), et les limites de $\varphi_1(x + iy)$ et $\varphi_2(x + iy)$ existent aussi.

Lorsque ceci a lieu et que x appartient à $]a, b[$, on a

$$\Im[\lim \varphi_1(x + iy)] = \Im[\lim \varphi_2(x + iy)] \geqslant 0$$

et

$$\Re[\lim \varphi_1(x + iy)] \geqslant \Re[\lim \varphi_2(x + iy)] ,$$

d'où

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) .$$

5.3. – Les différents résultats indiqués dans les paragraphes précédents suffisent pour établir la partie (b) du théorème A dans le cas où $h = k = 1$.

Pour passer au cas général, il faut utiliser un changement de variable convenable, après avoir établi un théorème relatif à l'existence d'une certaine intégrale dépendant d'une fonction de la classe P et d'une courbe ayant certaines propriétés.

5.4. - Les auteurs donnent ensuite des relations entre les moments de la mesure μ et de la fonction f correspondant à une même fonction de la classe P.

5.5. - Les théorèmes A et B concernent le comportement au voisinage de l'infini des fonctions μ et f correspondant à une même fonction φ de la classe P.

On en déduit des résultats relatifs au comportement de μ et f au voisinage d'un nombre fini a en introduisant la fonction φ^* définie par

$$\varphi^*(\zeta^*) = \varphi(a - \frac{1}{\zeta^*}) \quad ,$$

fonction qui appartient aussi à la classe P.

Les propriétés qui interviennent pour μ concernent essentiellement la convergence d'intégrales telles que

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-0} \frac{d\mu(\lambda)}{(a-\lambda)^h} \quad \text{et} \quad \int_{a+0}^{a+\varepsilon} \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda-a)^k} \quad ,$$

et la continuité de μ au point a.

6. Le mémoire s'achève par des théorèmes qui fournissent des conditions pour que μ soit absolument continue sur un intervalle, ou même soit absolument continue sur un intervalle, avec une dérivée de puissance p-ième sommable sur celui-ci.