

# SÉMINAIRE LELONG.

## ANALYSE

YITZHAK KATZNELSON

### **Calcul symbolique et endomorphismes dans quelques algèbres de Banach**

*Séminaire Lelong. Analyse*, tome 2 (1958-1959), exp. n° 6, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SL\\_1958-1959\\_\\_2\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A3_0)

© Séminaire Lelong. Analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire d'ANALYSE  
(P. LELONG)

20 janvier 1959

Année 1958/59

-:-:-

## CALCUL SYMBOLIQUE ET ENDOMORPHISMES DANS QUELQUES ALGÈBRES DE BANACH

par Yitzhak KATZNELSON

Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre de Banach avec unité. Supposons que  $\mathcal{B}$  est semi-simple et auto-adjointe (symétrique). Soit  $\mathcal{M}$  l'espace des idéaux maximaux de  $\mathcal{B}$  muni de la structure topologique induite par l'ensemble des transformées de Fourier-Gelfand des éléments de  $\mathcal{B}$ . On sait que  $\mathcal{M}$  est alors un espace de Hausdorff compact.

La transformée d'un élément  $f \in \mathcal{B}$  sera notée  $\hat{f}$ , et l'ensemble  $\hat{\mathcal{B}}$  de toutes ces transformées est une algèbre de fonctions continues sur  $\mathcal{M}$ .

DEFINITION. - On dit que la fonction  $F(z)$ , définie dans un ensemble  $D$  du plan complexe, opère dans  $\mathcal{B}$ , si l'on a  $F(f) \in \hat{\mathcal{B}}$  pour toute  $f \in \mathcal{B}$ , dont le spectre est contenu dans  $D$ .

Nous fixons  $D = \mathbb{R}$  (l'axe réel). L'ensemble des fonctions définies sur l'axe réel qui opèrent dans  $\mathcal{B}$  est une algèbre  $\mathcal{F}_0$ . Chaque élément  $f \in \mathcal{B}$ , à spectre réel, engendre une application  $F \rightarrow F(f)$  de  $\mathcal{F}_0$  dans  $\hat{\mathcal{B}}$ .

La topologie faible induite sur  $\mathcal{F}_0$  par l'ensemble de ces applications est localement multiplicativement convexe ; il est facile de voir que  $\mathcal{F}_0$  est complet.

Pour l'étude des propriétés locales des fonctions qui opèrent dans  $\mathcal{B}$ , nous pouvons nous restreindre à la sous-algèbre  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}_0$  de toutes les fonctions  $2\pi$ -périodiques. On sait (théorème de Wiener - Lévy - Gelfand) que  $\mathcal{F}_0$  contient toutes les fonctions analytiques sur l'axe réel.

THEOREME 1. - S'il existe une fonction non continue dans  $\mathcal{F}_0$ ,  $\mathcal{B}$  est de dimension finie.

DEMONSTRATION. - Soit  $F(x)$  non continue à l'origine ; il existe alors une suite  $t_n \rightarrow 0$  telle que

$$\lim F(t_n) = t \neq F(0) .$$

Si  $\mathcal{M}$  est infini, il existe une suite  $\{M_j\}$  qui converge dans  $\mathcal{M}$  vers  $M_0$ . On suppose ici que  $\mathcal{M}$  est métrisable, dans le cas général, il existe une sous-algèbre  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathcal{B}$ , dont l'espace d'idéaux maximaux est métrisable et telle que toute fonction qui opère dans  $\mathcal{B}$  opère dans  $\mathcal{B}_0$ .  $\mathcal{B}_0$  peut être choisie de dimension infinie. On peut construire un élément  $f \in \mathcal{B}$  tel que  $\{\hat{f}(M_j)\}$  contienne une sous-suite infinie de  $\{t_n\}$ .  $F(\hat{f}(M))$  n'est pas continue sur  $\mathcal{M}$ ;  $F(x)$  n'opère donc pas dans  $\mathcal{B}$ .

Rappelons qu'une algèbre  $\mathcal{B}$  est régulière si, pour tout fermé  $G \subset \mathcal{M}$  et  $M_0 \notin G$ , il existe  $f \in \mathcal{B}$  tel que  $\hat{f}(M) = 0$  pour  $M \in G$ ,  $\hat{f}(M_0) = 1$ . ;  $\mathcal{B}$  est alors normale c'est-à-dire : soient  $G_1, G_2$  fermés disjoints dans  $\mathcal{M}$ , il existe  $f \in \mathcal{B}$  tel que  $\hat{f}(M) = 0$  pour  $M \in G_1$ ,  $\hat{f}(M) = 1$  pour  $M \in G_2$ .

Dans la suite nous supposons que  $\mathcal{B}$  est régulière.

**THÉOREME 2.** - Pour que  $F \in \mathcal{F}_0$  soit bornée dans une boule  $\|f\| < \delta$  dans  $\mathcal{B}$  il faut et il suffit que pour chaque  $M \in \mathcal{M}$ , il existe un voisinage  $V_M$  tel que  $F$  soit bornée dans une boule centrée à l'origine dans l'idéal  $\mathcal{F}(\mathcal{M} - V_M) = \cap M_\alpha$  pour  $M_\alpha \in \mathcal{M} - V_M$ .

**DÉMONSTRATION.** - La condition étant trivialement nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

Pour chaque  $M \in \mathcal{M}$ , soit  $\bar{W}_M$  un voisinage fermé de  $M$ , contenu dans  $V_M$ ; soit  $W_M$  l'intérieur de  $\bar{W}_M$ ;  $\{W_M\}$  est un recouvrement de  $\mathcal{M}$  dont on choisit un sous-recouvrement fini  $W_{M_1}, \dots, W_{M_n}$ .

Soit  $\{g_j\}$  une partition de l'unité dans  $\mathcal{B}$ , subordonnée à  $\{W_{M_j}\}$  et soit  $\varphi_j \in \hat{\mathcal{B}}$ ,  $\varphi_j(M) = 1$  pour  $M \in \bar{W}_{M_j}$ ,  $\varphi_j(M) = 0$  pour  $M \in \mathcal{M} - V_{M_j}$ .

Pour tout  $f \in \hat{\mathcal{B}}$ , on a

$$F(f) = \sum_j g_j F(f) = \sum_j g_j F(\varphi_j f)$$

et le théorème résulte du fait que  $\varphi_j f \in \mathcal{F}(\mathcal{M} - V_{M_j})$ .

**DÉFINITION.** -  $M$  est régulier par rapport à  $F \in \mathcal{F}_0$  s'il existe un voisinage  $V_M$  de  $M$  tel que  $F$  soit bornée dans une boule centrée à l'origine dans l'idéal

$$\mathcal{F}(\mathcal{M} - V_M).$$

LEMME. - Soit  $F \in \mathcal{F}_0$ , il n'y a qu'un nombre fini de points non-réguliers par rapport à  $F$ .

DÉMONSTRATION. - Supposons le contraire ; soit  $\{M_j\}$  une suite infinie de points non-réguliers ayant des voisinages  $V_{M_j}$  deux à deux disjoints. Pour chaque  $j$  soit  $\bar{W}_{M_j}$  un voisinage fermé de  $M_j$ , contenu dans  $V_{M_j}$  et soit  $\varphi_j \in \mathcal{B}$ , avec  $\varphi_j(M) = 1$  sur  $\bar{W}_{M_j}$ ,  $\varphi_j(M) = 0$  hors de  $V_{M_j}$ .

D'après l'hypothèse, nous pouvons choisir  $f_j \in \mathcal{F}(M - W_{M_j})$ ,  $\|f_j\| < 2^{-j}$  tel que  $\|F(f_j)\| \gg 2^j \|\varphi_j\|$ .

Posons  $f = \sum_j f_j$  ; on a  $F(f) \in \mathcal{B}$  et

$$2^j \|\varphi_j\| \leq \|\varphi_j F(f)\| \leq \|\varphi_j\| \|F(f)\|$$

soit  $\|F(f)\| \gg 2^j$ , pour tout  $j$ , d'où contradiction.

Il est clair que la propriété d'être régulier par rapport à une  $F \in \mathcal{F}_0$  donnée, est invariante par automorphisme. Un idéal  $M$  qui a une infinité d'images par l'ensemble des automorphismes de  $\mathcal{B}$  est donc automatiquement régulier. Si tous les points de  $\mathcal{M}$  ont cette propriété (auquel cas nous dirons que  $\mathcal{B}$  admet suffisamment d'automorphismes), tous les points de  $\mathcal{M}$  sont réguliers.

THÉOREME 3. - Si  $\mathcal{B}$  admet suffisamment d'automorphismes toute fonction  $F \in \mathcal{F}_0$  est bornée au voisinage de l'origine dans  $\mathcal{B}$ .

EXEMPLE. - Soit  $\mathcal{B}$  l'algèbre des restrictions des fonctions dérivables à une suite  $\{a_n\}$  convergente vers zéro. Pour qu'une fonction  $F(x)$  opère dans  $\mathcal{B}$ , il faut et il suffit que  $F$  soit dérivable en tout point. Ainsi, la fonction  $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$  opère dans  $\mathcal{B}$  mais n'est bornée dans aucune boule centrée à l'origine.

Lorsque l'on veut étudier les rapports qui existent entre la structure de  $\mathcal{B}$  et l'ensemble des fonctions qui opèrent dans  $\mathcal{B}$  il est plus commode d'étudier l'algèbre  $\mathcal{F}$ , dont l'espace d'idéaux maximaux est compact plutôt que  $\mathcal{F}_0$  dont la structure est toujours plus compliquée. Nous donnons quelques résultats concernant le cas où  $\mathcal{F}$  admet une structure d'algèbre de Banach. Cette structure

n'est pas nécessairement celle induite sur  $\mathcal{F}$  par  $\mathcal{F}_0$ .

Posons  $\omega_n = \|e^{inx}\|$ , la norme étant prise dans  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}$  contient comme sous-algèbre l'ensemble  $A\{\omega_n\}$  des fonctions  $F(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$  telles que

$$\sum |a_n| \omega_n < \infty.$$

**THÉOREME 4.** - Si  $\mathcal{F}$  admet une structure d'algèbre de Banach il existe un entier  $p$  tel que  $\mathcal{F}$  contient toute fonction  $p$  fois dérivable.

**DEMONSTRATION.** - Pour tout  $f \in \mathcal{B}$  à spectre réel, soit  $K_f$  la norme de l'application  $F \rightarrow F(f)$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{B}$ .

Posons

$$K^*(f) = \sup_{-\infty < n < +\infty} \left( \frac{\|e^{inf}\|}{\omega_n} \right) \leq K_f.$$

$K^*(f)$  est une fonction de Baire sur l'algèbre, et reste donc bornée dans une boule  $\|f - f_0\| < N$ .

$$\|e^{in(f-f_0)}\| \leq K^*(f_0) K^*(f) \omega_n \omega_{-n} \leq C \omega_n$$

pour  $\|f - f_0\| < N$ .

Il est évident, d'autre part, que  $F(x) \rightarrow F(2x)$  est un opérateur continu dans  $\mathcal{F}$ , ce qui implique

$$\omega_{2n} < K \omega_n \text{ et par conséquent } \omega_{2^n} \leq K^n$$

On a :

$$\|e^{ing}\| = \|e^{i2^m t g}\| \leq C \omega_{2^m}^2 \leq C K^{2m}$$

avec

$$\frac{1}{2} < t \leq 1, \quad m \sim \log n / \log 2$$

Ce qui implique

$$\|e^{ing}\| \leq C(g) n^{(2 \log K) / \log 2}$$

et il suffit de prendre

$$p > \frac{2 \log K}{\log 2} + 1.$$

**COROLLAIRE 1.** - Sous les hypothèses précédentes,  $\mathcal{F}$  est régulière, donc  $\mathcal{B}$  est régulière.

Remarque. -  $\mathcal{F}$  opère aussi dans elle-même. Comme elle admet suffisamment d'automorphismes chaque fonction de  $\mathcal{F}$  reste bornée dans un voisinage de zéro dans  $\mathcal{F}$ . Il résulte du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe un voisinage de zéro dans  $\mathcal{F}$  sur lequel toutes les fonctions de  $\mathcal{F}$  sont bornées. Comme, du fait que  $F(nx)$  reste bornée pour  $\|f\| < \xi$  il résulte que  $F(x)$  est bornée pour  $\|f\| < n\xi$ ; alors toute fonction de  $\mathcal{F}$  est bornée sur toute partie bornée de  $\mathcal{F}$ , et il existe alors un  $R$  tel que

$$\|F\| \sim \sup_{\|F_0\| \leq R} \|F(F_0)\| \quad (\text{équivalence des normes})$$

Ceci implique que la suite  $\{\omega_n\}$  est équivalente à une suite croissante.

Si l'on pouvait établir d'abord la régularité de  $\mathcal{F}$ , on pourrait simplifier la démonstration précédente du théorème 4 et prendre  $p > (\log K / \log 2) + 1$  au lieu de  $2 \log K / \log 2 + 1$ .

COROLLAIRE 3. - Si  $\mathcal{B}$  admet suffisamment d'automorphismes toute partie bornée de  $\mathcal{B}$  se plonge dans une partie bornée de  $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ . Si on désigne par  $\mathcal{F}'$  l'adhérence de l'ensemble des fonctions analytiques dans  $\mathcal{F}$ , toute fonction de  $\mathcal{F}'$  opère continuellement dans  $\mathcal{B}$ .

Il est naturel de se demander s'il est possible que  $\mathcal{F}'$  soit égale à  $A\{\omega_n\}$ .

La réponse est négative :  $\mathcal{F}'$  a une propriété qui n'appartient à aucune algèbre du type  $A\{\omega_1\}$ , à savoir  $\mathcal{F}'$  admet beaucoup d'endomorphismes. Pour chaque  $F_0 \in \mathcal{F}'$ ;  $F \rightarrow F(F_0)$  est un endomorphisme de  $\mathcal{F}'$ . Le théorème suivant qui généralise des résultats connus de Beurling-Helson et de Leibenson montre que ce n'est pas le cas dans les algèbres  $A\{\omega_n\}$ .

THÉORÈME 5. - Si  $F(x) \in A\{\omega_n\}$  implique  $F(2x) \in A\{\omega_n\}$  et si  $\alpha(x)$  est deux fois continuellement dérivable et telle que  $F(x) \in A\{\omega_n\}$  implique  $F(\alpha(x)) \in A\{\omega_n\}$  alors

$$\alpha(x) = nx + x_0.$$

Nous terminerons en mentionnant quelques résultats sur la structure de  $\mathcal{B}$  à partir de  $\mathcal{F}'$ .

THÉORÈME 6. - Si  $\mathcal{F}' = C(T)$ ,  $C(T)$  désigne l'algèbre de toutes les fonctions

continues,  $2\pi$ -périodiques alors  $\mathcal{B} = C(\mathcal{M})$ ,  $C(\mathcal{M})$  étant l'algèbre de toutes les fonctions continues sur  $\mathcal{M}$ .

On dit qu'un élément  $f \in \mathcal{B}$  est un élément de synthèse spectrale s'il est contenu dans chaque idéal  $I$  tel que

$$I \subset M \Rightarrow f \in M \text{ pour tout } M \in \mathcal{M}.$$

THÉOREME 7. - Si  $\mathcal{F} \supset D_n(T)$  et si  $f \in \mathcal{B}$ ,  $f$  réel,  $f^n$  est un élément de synthèse spectrale.

---