SÉMINAIRE LELONG.
ANALYSE

PIERRE DOLBEAULT

Formes différentielles et cohomologie à coefficients entiers (couples d'Allendoerfer-Eells)

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)
Année 1958/59

-:-:-:-

1-01

25 Novembre 1958

FORMES DIFFÉRENTIELLES ET COHOMOLOGIE À COEFFICIENTS ENTIERS
(COUPLES D'ALLENDOERFER-EELLS)

par Pierre DOLBEAULT

Soit X une variété différentiable (de classe C^{∞}) connexe, paracompacte, de dimension n.

Les formes différentielles à coefficients réels de classe C^{∞} sur X constituent une algèbre différentielle graduée ; on en déduit une algèbre de cohomologie $\underset{\sim}{H}^*(X , R)$. Le théorème de de Rham indique qu'il existe un isomorphisme canonique entre $\underset{\sim}{H}^*(X , R)$ et l'algèbre de cohomologie à coefficients réels $H^*(X , R)$ de la variété X.

PROBLÈME. - Peut-on trouver une représentation de l'algèbre de cohomologie à coefficients entiers de la variété X faisant intervenir les formes différentielles sur X ?

Dans un mémoire récent, ALLENDOERFER et EELLS [2] donnent une réponse affirmative à cette question, en faisant intervenir certains couples de formes différentielles dont les coefficients possèdent des singularités.

Cet exposé a pour but d'établir les principaux résultats du mémoire cité, qu'on peut obtenir par la théorie des faisceaux. On indiquera des applications et on annoncera, à la fin, quelques résultats relatifs au cas où X est une variété analytique complexe.

1. Couples de formes différentielles. Pour tout entier $r \geq 0$, soient $e(\omega)$ un sous-ensemble fermé rare de X et ω une $(r - 1)$-forme différentielle à coefficients réels C^{∞} sur $X - e(\omega)$; pour $r = 0$, on pose $\omega = 0$ et $e(\omega) = \emptyset$.

Soit $e(\theta)$ un sous-ensemble fermé de $e(\omega)$ et soit θ une extension de $d\omega$ à $X - e(\theta)$, remarquons que, une fois $e(\theta)$ choisi, la forme θ est déterminée de façon unique, puisque $e(\omega) - e(\theta)$ est rare dans X. L'ensemble (θ , ω) est appelé un couple sur X.

On désignera par $|c|$ le support d'une chaîne singulière différentiable c sur X.

La chaîne singulière c est dite <u>admissible pour le couple</u> (θ, ω) si

$$|c| \cap e(\theta) = \emptyset \quad \text{et} \quad |\partial c| \cap e(\omega) = \emptyset \quad .$$

On appelle <u>résidu de</u> (θ, ω) <u>par rapport à la chaîne singulière</u> c <u>le nombre</u>

$$R[(\theta, \omega), c] = \int_c \theta - \int_{\partial c} \omega \quad .$$

On voit que le résidu est bilinéaire en c et (θ, ω) pourvu que les chaînes qui interviennent soient admissibles pour les couples considérés.

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> c_t $(0 \leq t \leq 1)$ <u>une déformation</u> C^∞ <u>de la chaîne singulière indéfiniment différentiable</u> c_0 <u>sur</u> X <u>admissible pour le couple</u> (θ, ω) (i. e. <u>toute</u> c_t <u>est admissible pour</u> (θ, ω)). <u>Alors</u> :

$$R[(\theta, \omega), c_0] = R[(\theta, \omega), c_1] \quad .$$

La démonstration se fait à l'aide de la formule de Stokes.

2. Le complexe $\underset{\sim}{C}(X, A)$. - Soit A un sous-anneau unitaire de l'anneau R des nombres réels (par exemple, l'anneau des entiers rationnels Z). Un (A, r)-couple (θ, ω) de formes différentielles sur X , pour $r \geq 0$, est un couple tel que :

(1) ω soit de degré $r - 1$ pour $r \geq 1$ et $\omega = 0$ pour $r = 0$,

(2) $e(\theta)$ et $e(\omega)$ se trouvent sur des polyèdres C^∞ , localement finis, de dimensions respectives $(n - r - 1)$ et $(n - r)$;

(3) pour toute chaîne c admissible pour (θ, ω) , on ait :

$$R[(\theta, \omega), c] \in A \quad .$$

La somme de deux (A, r)-couples (θ_1, ω_1) et (θ_2, ω_2) est

$$(\theta_1 + \theta_2, \omega_1 + \omega_2) \quad ,$$

où

$$e(\theta_1 + \theta_2) = e(\theta_1) \cup e(\theta_2)$$

et

$$e(\omega_1 + \omega_2) = e(\omega_1) \cup e(\omega_2) \quad ;$$

le produit d'un (A, r)-couple (θ, ω) par $a \in A$ est $(a\theta, a\omega)$. L'opposé d'un (A, r)-couple ne pouvant pas être défini quand $e(\omega) \neq \emptyset$, on définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des (A, r)-couples de façon que l'ensemble quotient par cette relation ait une structure de A-module.

Considérons la relation $(\theta, \omega) \sim (\theta', \omega')$ si

$$R[(\theta, \omega), c] = R[(\theta', \omega'), c]$$

pour toute chaîne c admissible pour les deux couples. Cette relation est évidemment réflexive et symétrique, montrons qu'elle est transitive.

Supposons $(\theta , \omega)\sim(\theta' , \omega')$ et $(\theta' , \omega')\sim(\theta'' , \omega'')$ et soit c une chaîne admissible pour (θ , ω) et (θ'' , ω''). Deux chaînes singulières C^∞ quelconques c_p et c_q, de dimensions respectives p et q, $(p + q \leq n)$, sur X peuvent être amenées en position générale

$$(|\partial c_p| \cap |c_q| = \emptyset , \quad |c_p| \cap |\partial c_q| = \emptyset)$$

par une déformation C^∞ arbitrairement petite de l'une d'elles. On peut alors opérer une déformation admissible pour les couples (θ , ω) et (θ'' , ω'') de c en c' de manière que c' soit admissible pour (θ' , ω'). D'après la proposition 1, on a :

$$\begin{aligned} R[(\theta , \omega) , c] = R[(\theta , \omega) , c'] = R[(\theta' , \omega') , c'] &= R[(\theta'' , \omega'') , c'] \\ &= R[(\theta'' , \omega'') , c] , \end{aligned}$$

donc

$$(\theta , \omega) \sim (\theta'' , \omega'') .$$

On désignera par $[\theta , \omega]$ la classe d'équivalence du couple (θ , ω) ; la relation d'équivalence dans l'ensemble des (A , r)-couples étant compatible avec l'addition et la multiplication par les éléments de A, on voit que, pour les lois de composition quotients, l'ensemble des classes d'équivalence forme un A-module que l'on notera $\underset{\sim}{C}^r(X , A)$ $(r \geq 0)$.

Désignons par $\underset{\sim}{C}(X , A)$ la somme directe $\sum_{r \geq 0} \underset{\sim}{C}^r(X , A)$.

<u>Différentielle extérieure dans</u> $\underset{\sim}{C}(X , A)$. - Si (θ , ω) et (θ' , ω') sont deux (A , r)-couples équivalents, les deux $(A , r + 1)$-couples $(0 , \theta)$ et $(0 , \theta')$ sont équivalents, en effet, pour toute $(r + 1)$-chaîne γ admissible pour $(0 , \theta)$ et $(0 , \theta')$, on a :

$$\begin{aligned} R[(0 , \theta) , \gamma] = - \int_{\partial\gamma} \theta = - R[(\theta , \omega) , \partial\gamma] &= - R[(\theta' , \omega') , \partial\gamma] \\ &= - \int_{\partial\gamma} \theta' = R[(0 , \theta') , \gamma] . \end{aligned}$$

Désignons par d l'application :

$$\underset{\sim}{C}^r(X , A) \to \underset{\sim}{C}^{r+1}(X , A)$$

qui envoie $[\theta , \omega]$ sur $d[\theta , \omega] = [0 , \theta]$.

L'opérateur d est un endomorphisme du A-module $\underset{\sim}{C}(X , A)$, tel que $dd = 0$. L'opérateur d est appelé différentielle extérieure.

Désignons par $\underset{\sim}{Z}^r(X , A)$ le noyau de l'homomorphisme

$$d : \underset{\sim}{C}^r(X , A) \to \underset{\sim}{C}^{r+1}(X , A) \quad .$$

PROPOSITION 2. - Pour que $[\theta , \omega]$ appartienne à $\underset{\sim}{Z}^r(X , A)$, il faut et il suffit que $\int_{\partial c} \theta = 0$ si $|\partial c_{r+1}| \cap e(\theta) = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. - Si $[\theta , \omega] \in \underset{\sim}{Z}^r(X , A)$, on a :

$$d[\theta , \omega] = [0 , \theta] = [0 , 0] \quad ,$$

ce qui équivaut à : $0 = R[(0 , \theta) , c] = - \int_{\partial c} \theta$ **si** $|\partial c_{r+1}| \cap e(\theta) = \emptyset$.

En particulier, si $e(\theta) = \emptyset$, θ est fermée.

Tout $(A , 0)$-couple est de la forme $(\theta , 0)$ où θ est une fonction et où $e(\theta)$ est porté par un polyèdre de dimension $(n - 1)$; comme $d\theta = 0$ sur $X - e(\theta)$, la fonction θ qui prend ses valeurs dans A est constante sur chaque composante connexe de $X - e(\theta)$. Si, de plus, $[\theta , 0] \in \underset{\sim}{Z}^0(X , A)$, d'après la proposition 2, la fonction θ prend la même valeur constante sur toutes les composantes de $X - e(\theta)$, d'où :

PROPOSITION 3. - L'application $\underset{\sim}{Z}^0(X , A) \to A$ qui associe, à chaque élément de $\underset{\sim}{Z}^0(X , A)$ sa valeur constante est un isomorphisme.

Le A-module $\underset{\sim}{C}(X , A)$ muni de la différentielle extérieure est un module gradué à dérivation. On désignera par

$$\underset{\sim}{H}^*(X , A) = \sum_{r \geq 0} \underset{\sim}{H}^r(X , A)$$

le module de cohomologie dérivé.

PROPOSITION 4. - Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme C^∞ birégulier de la variété X sur la variété Y . Si (θ , ω) est un (A , r)-couple sur Y ayant pour ensembles de singularités $e(\omega)$ et $e(\theta)$, alors $(f^* \theta , f^* \omega)$ est un (A , r)-couple sur X ayant pour ensembles de singularités $f^{-1} e(\omega)$ et $f^{-1} e(\theta)$; de plus, si c est une chaîne admissible pour $(f^* \theta , f^* \omega)$, la chaîne fc est admissible pour (θ , ω) et $R[(f^* \theta , f^* \omega) , c] = R[(\theta , \omega) , fc]$.

3. Le Lemme de Poincaré.

LEMME 1 (Lemme de Poincaré). - Soit U une boule ouverte de R^n , pour tout $r \geq 1$, et tout $[\theta , \omega] \in \underset{\sim}{Z}^r(U , A)$, il existe $[\eta , \xi] \in \underset{\sim}{C}^{r-1}(U , A)$ tel que $d[\eta , \xi] = [\theta , \omega]$.

DÉMONSTRATION. (voir [2]). - D'après la proposition 4, on peut supposer que $e(\omega)$ est porté par un polyèdre euclidien de dimension $n - r$; on adapte ensuite la démonstration du lemme de Poincaré par la méthode homotopique.

4. Faisceau des germes de A-couples. - Désignons par $\underset{\sim}{C}_U^r$ le module des classes de (A , r)-couples sur tout ouvert U de X appartenant à un système fondamental d'ouverts de X ; la restriction d'un (A , r)-couple défini sur U à un ouvert $V \subset U$ est un (A , r)-couple sur V, d'où un homomorphisme $\underset{\sim}{C}_U^r \to \underset{\sim}{C}_V^r$ qui est réflexif et transitif. L'ensemble des $\underset{\sim}{C}_U^r$ définit donc un préfaisceau dont le faisceau associé sera désigné par $\underset{\sim}{C}^r$. Soit $\underset{\sim}{C} = \sum_{r \geq 0} \underset{\sim}{C}^r$; l'opérateur différentielle extérieure définit un endomorphisme du faisceau $\underset{\sim}{C}$ qu'on note encore d et qui est tel que $dd = 0$. Tout élément de $\underset{\sim}{C}$ est appelé un germe de A-couple. L'ensemble $\underset{\sim}{C}$ est donc un faisceau gradué à dérivation.

LEMME 2. - *L'inclusion étant désignée par i, la suite de faisceaux et d'homomorphismes suivants est une résolution du faisceau constant A :*

(1) $$0 \to A \xrightarrow{i} \underset{\sim}{C}^0 \xrightarrow{d} \underset{\sim}{C}^1 \xrightarrow{d} \underset{\sim}{C}^2 \to \dots$$

DÉMONSTRATION. - L'inclusion i est définie ainsi : en tout point $x \in X$, elle applique tout nombre $a \in A$ sur tout germe de $(A , 0)$-couple fermé en x qui prend la valeur a ; un tel germe est défini par un $(A , 0)$-couple $(\theta , 0)$ au voisinage de x tel que $\theta(y) = a$ pour y voisin de x.

Tout germe de (A , r)-couple fermé, pour $r \geq 1$, est la différentielle extérieure d'un germe de $(A , r - 1)$-couple, d'après le lemme 1 ; donc, le noyau de $d : \underset{\sim}{C}^r \to \underset{\sim}{C}^{r+1}$ est l'image de $d : \underset{\sim}{C}^{r-1} \to \underset{\sim}{C}^r$ pour $r \geq 1$.

D'après la proposition 3, l'image de $i : A \to \underset{\sim}{C}^0$ est le noyau de $d : \underset{\sim}{C}^0 \to \underset{\sim}{C}^1$.

Ces deux derniers résultats montrent que la suite (1) est exacte, donc est une résolution du faisceau A.

LEMME 3. - *Pour $p > 0$ et $r \geq 0$, on a : $H^p(X , \underset{\sim}{C}^r) = 0$.*

DÉMONSTRATION. - Considérons un recouvrement localement fini de X, de nerf $\underset{\sim}{N}$, par des ouverts U_i tels que toute intersection non vide des U_i puisse être différentiablement rétractée en un point. D'après J. LERAY et A. WEIL, un tel recouvrement existe et possède la propriété suivante :

$$H^p(X , \underset{\sim}{C}^r) \to H^p(\underset{\sim}{N} , \underset{\sim}{C}^r) \quad .$$

On montre que, pour $p > 0$ et $r \geq 0$, on a : $H^p(\underset{\sim}{N} , \underset{\sim}{C}^r) = 0$ en construisant, pour tout $f \in Z^p(\underset{\sim}{N} , \underset{\sim}{C}^r)$, une cochaîne $g \in C^{p-1}(\underset{\sim}{N} , \underset{\sim}{C}^r)$ telle que $f = dg$ (voir [2]).

5. Le théorème fondamental.

THÉORÈME 1. - Soit X une variété différentiable, de classe C^∞, paracompacte, de dimension n et soit A un sous-anneau unitaire de R. Alors, il existe un isomorphisme canonique du A-module de cohomologie $\underset{\sim}{H}^*(X, A)$ des A-couples de X sur le module de cohomologie $H^*(X, A)$ de X à coefficients dans A.

Cela résulte d'un théorème général de théorie des faisceaux, compte tenu des lemmes 2 et 3.

Soit Z_m l'anneau des entiers modulo m, désignons par $\underset{\sim}{C}(X, Z_m)$ le complexe défini par les quotients $\underset{\sim}{C}^r(X, Z)/\underset{\sim}{C}^r(X, mZ)$ et par $\underset{\sim}{H}^*(X, Z_m)$ le module de cohomologie associée. En utilisant un lemme des cinq, on obtient le corollaire suivant du théorème 1 :

COROLLAIRE. - Il existe un isomorphisme canonique : $\underset{\sim}{H}^r(X, Z_m) \simeq H^r(X, Z_m)$.

6. Représentants particuliers de classes de cohomologie.

THÉORÈME 2. - Toute classe de cohomologie de $\underset{\sim}{H}^r(X, A)$ a un représentant $[\theta, \omega]$ dans lequel θ est C^∞ et fermée sur X tout entière.

DÉMONSTRATION. - Soit $[\theta, \omega]$ un représentant de $u \in \underset{\sim}{H}^r(X, A)$ et soit (θ, ω) un représentant de la classe $[\theta, \omega]$. Soit $\hat{c}$ une classe d'homologie de dimension r ; si c_1 et c_2 sont deux cycles de cette classe, tous deux admissibles pour (θ, ω), on a :

$$\int_{c_1} \theta = \int_{c_2} \theta \quad ,$$

en effet : $c_1 - c_2 = \partial v$; puisque $[\theta, \omega] \in \underset{\sim}{Z}^r(X, A)$ et que $|\partial v| \cap e(\theta) = \emptyset$, on a, d'après la proposition 2 :

$$\int_{\partial v} \theta = 0 \quad ,$$

donc :

$$\int_{c_1} \theta = \int_{c_2} \theta \quad .$$

D'après le théorème de de Rham, il existe une r-forme θ_1 C^∞ fermée sur X telle que :

$$\int_{c_1} \theta_1 = \int_{c_1} \theta$$

pour tout cycle admissible c_1 de dimension r. La r-forme $\lambda = \theta - \theta_1$ est C^∞ et fermée sur $X - e(\theta)$ et a toutes ses périodes nulles ; alors, d'après le théorème de de Rham, il existe une $(r - 1)$-forme μ telle que $\lambda = d\mu$ sur $X - e(\theta)$. On a :

$$(\theta, \omega) = (\theta_1 + d\mu, \omega) \sim (\theta_1, \omega - \mu) \quad ,$$

en effet :

$$R[(\theta_1 + d\mu , \omega) , c_1] = \int_{c_1} \theta_1 + d\mu - \int_{c_1} \omega$$

pour tout c_1 admissible ; mais, $|c_1| \cap e(\mu) = \emptyset$ donc : $\int_{c_1} d\mu = \int_{\partial c_1} \mu$ d'après la formule de Stokes, donc :

$$R[(\theta_1 + d\mu , \omega) , c_1] = \int_{c_1} \theta_1 - \int_{\partial c_1} \omega - \mu = R[(\theta_1 , \omega - \mu) , c_1]$$

La classe de couples $[\theta , \omega]$ est donc égale à $[\theta_1 , \omega - \mu]$ ou θ_1 est C^∞ et fermée sur X.

7. Homologie et couples de formes différentielles.

THÉORÈME 3. - Supposons X orientée ; soit $[\theta , \omega]$ un représentant d'un élément de $H^r(X , A)$ pour lequel la forme θ est C^∞ sur X ; alors, $e(\omega)$ est le support d'un $(n - r)$-cycle singulier localement fini appartenant à la classe d'homologie duale, dans la dualité des variétés, de la classe de cohomologie définie par $[\theta , \omega]$ dans le théorème fondamental.

Schéma de la démonstration. - Soit R un recouvrement ouvert de X suffisamment fin pour que, sur chaque ouvert U_i de R, il existe une forme φ_i telle que $\theta = d\varphi_i$ (lemme de Poincaré). Soit σ un r-simplexe singulier, petit d'ordre R dont le bord ne rencontre pas $e(\omega)$.

(1) La classe de cohomologie c du cocycle qui, à chaque σ associe l'entier $R[(\theta , \omega) , \sigma]$ est l'image, par l'isomorphisme canonique du théorème 1, de la classe de cohomologie de $[\theta , \omega]$;

(2) Le résidu

$$[R(\theta , \omega) , \sigma] = - \int_{\partial\sigma} \omega - \varphi_i$$

est localement constant, i. e. invariant par une petite déformation de σ, cela permet d'affecter, à chaque $(n - r)$-face F du polyèdre $e(\omega)$ un entier n_F de sorte que $R[(\theta , \omega) , \sigma]$ soit égal au coefficient d'enlacement de $\sum_F n_F F$ et du bord du simplexe σ. D'après le choix de n_F, la chaîne $\sum_F n_F F$ est un cycle.

(3) On montre, à l'aide du lemme 2.8 de [4] que la classe d'homologie de $\sum_F n_F F$ est égale à la classe c.

D'où le théorème.

Il résulte alors, du théorème de dualité des variétés et du théorème 3, le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Si X est orientée, il existe un isomorphisme canonique k : ${}^*H_{n-r}(X , A) \to \underset{\sim}{H}^r(X , A)$ où ${}^*H_{n-r}(X , A)$ est le module d'homologie des chaînes singulières localement finies de dimension $n - r$.

7. Produits dans $\underset{\sim}{H}^*(X , A)$. - Soit h l'isomorphisme du théorème 1 et soient a_1 et a_2 deux éléments de $\underset{\sim}{H}^p(X , A)$ et $\underset{\sim}{H}^q(X , A)$ respectivement. Par définition le produit $a_1\, a_2$ est $h^{-1}[ha_1 \cup ha_2]$ où $\cup$ désigne le cup-produit.

Avec cette convention $\underset{\sim}{H}^*(X , A)$ devient une algèbre et h un isomorphisme d'algèbre.

De plus, à l'intersection de deux classes d'homologie correspond, par k, le produit de leurs images par k.

8. Cas des variétés riemanniennes compactes ; usage des formes harmoniques. - Supposons que X soit une variété riemannienne compacte ; alors, d'après le théorème de Hodge, il existe un isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel des formes harmoniques de degré r et l'espace de cohomologie réelle de dimension r.

THÉORÈME 5. - Dans les hypothèses ci-dessus, toute classe de $\underset{\sim}{H}^r(X , A)$ peut être représentée par un (A , r)-couple (θ , ω) et un seul tel que θ soit harmonique.

DÉMONSTRATION. - Soit a un élément de $\underset{\sim}{H}^r(X , A)$ et soit (θ , ω) un couple tel que $[\theta , \omega]$ appartienne à a et satisfasse aux conditions du théorème 2. Nous avons vu que la classe de cohomologie réelle de θ est bien déterminée ; d'après le théorème de Hodge, il existe une forme harmonique et une seule θ_1 qui lui soit cohomologue :

$$\theta = \theta_1 + d\alpha$$

où α est C^∞ sur X, alors :

$$(\theta , \omega) = (\theta_1 + d\alpha , \omega) \sim (\theta_1 , \omega - \alpha) ,$$

C. Q. F. D.

9. Applications et problème [1]. - J. EELLS représente les classes de Stiefel-Whitney d'une variété riemannienne à l'aide de couples de formes différentielles qu'il construit explicitement (formes généralisées de courbure de Gauss et de courbure géodésique). (Voir [6]; résultat annoncé dans [1] et dans [5]). Voir également A. ARAGNOL [3].

Problème (formulé par ALLENDOERFER) : construire des couples de formes représentant les classes de Pontrjagin d'une variété.

10. Variétés analytiques complexes. - Le théorème 1 est, en particulier, valable pour la structure réelle définie par la structure complexe d'une variété analytique complexe X ; il reste à mettre en évidence les relations entre les propriétés analytiques complexes de la variété X et $H^*(X, A)$. On donnera deux exemples.

Sur une variété analytique complexe X , soit $E^2(X, Z)$ le groupe abélien des classes de $(2, Z)$-couples $[\theta, \omega]$ où θ est une 2-forme holomorphe fermée et ω une 1-forme méromorphe et soit $B^2(X, Z)$ le sous-groupe des classes de couples $[0, df]$ où f est une fonction méromorphe sur X . Alors :

Si X est une variété de Stein, le groupe $E^2(X, Z)/B^2(X, Z)$ est canoniquement isomorphe à $H^2(X, Z)$.

Désignons par $E^{(1,1)}(X, Z)$ le groupe des classes de $(2, Z)$-couples $[\theta, \omega]$ où θ est une forme C^∞ fermée de type $(1, 1)$ et ω une 1-forme semi-méromorphe (i. e. induisant, en chaque point de X le quotient d'un germe de forme C^∞ de type $(1, 0)$ par un germe de fonction holomorphe) sur X . Alors :

Si X est une variété algébrique projective complexe, le sous-groupe $H^{(1,1)}(X, Z)$ de $H^2(X, Z)$ formé des classes de cohomologie entière dont l'image dans la cohomologie complexe est de type $(1, 1)$, est canoniquement isomorphe à un quotient de $E^{(1,1)}(X, Z)$.

La démonstration utilise des résultats classiques sur les diviseurs (J. P. SERRE, S. LEFSCHETZ) et les formes différentielles (J. P. SERRE, W. V. D. HODGE) sur les variétés de Stein et les variétés algébriques respectivement, et procède d'une méthode voisine de celle qui conduit au théorème 3.14 de [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLENDOERFER (C. B.). - Global geometry of imbedded manifolds, Centro intern. Mat. Estivo [1958. Sestrière]. - Roma, Istituto di Matematica dell'Università, 1958 (multigr.).

[2] ALLENDOERFER (C. B.) and EELLS (J., Jr). - On the cohomology of smooth manifolds, Comment. Math. Helvet., t. 32, 1958, p. 165-179.

[3] ARAGNOL (A.). - Classes caractéristiques et formes différentielles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 238, 1954, p. 2387-2389.

[4] DOLBEAULT (P.). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, I, II, Annals of Math., t. 64, 1956, p. 83-130 et t. 65, 1957, p. 282-330.

[5] EELLS (J., Jr). - On characteristic classes and curvature, Intern. Congr. Math. [1958. Edinburgh], Abstracts of short Comm. and scient. Programme, p. 112. - Edinburgh, 1958.

[6] EELLS (J.). - A generalization of the Gauss-Bonnet theorem, Trans. Amer. math. Soc., t. 92, 1959, p. 142-153.