

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

JAAK PEETRE

Comparaison d'opérateurs différentiels

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 16, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A11_0

© Séminaire Lelong. Analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)

28 avril 1959

Année 1958/59

-:-:-:-

COMPARAISON D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

par Jaak PEETRE

Le but de cet exposé est de donner quelques compléments à un théorème de HÖRMANDER relatif à la comparaison d'opérateurs différentiels. Les résultats principaux ont été énoncés dans une note aux Comptes Rendus [7].

NOTATIONS. - Nous allons considérer des opérateurs différentiels P de la forme $P = \sum_{\alpha} a^{\alpha} D_{\alpha}$, où $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k$ est un indice multiple,

$$D_{\alpha} = D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_k} \quad (D_{\ell} = (\sqrt{-1})^{-1} \partial / \partial x_{\ell}) .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, désignons par a_x^{α} la valeur de a^{α} au point x .

Posons $P_x = \sum_{\alpha} a_x^{\alpha} D_{\alpha}$. P_x est un opérateur différentiel à coefficients constants. Pour $\psi \in \mathcal{D}$, espace des fonctions indéfiniment dérivables, on a $P\psi = \sum_{\alpha} (|\alpha|!)^{-1} D_{\alpha} \psi P^{\alpha}$ (formule de LEIBNIZ), où les P^{α} sont définis par la relation $\widehat{P_x^{\alpha}} = (\partial / \partial \xi)^{\alpha} \widehat{P_x}$, $\widehat{P_x^{\alpha}}$ étant la transformée de FOURIER de

P_x^{α} , $\widehat{P_x^{\alpha}} = \sum_{\beta} a_x^{\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\beta-\alpha} .$ Faisons en outre la convention d'écrire M, N, \dots au lieu de P, Q, \dots quand il s'agit d'opérateurs différentiels à coefficients constants.

1. Généralités sur la comparaison d'opérateurs différentiels.

Soient Ω , un ouvert non-vidé de \mathbb{R}^n , P et Q , des opérateurs différentiels sur Ω , et \mathcal{X}, \mathcal{Y} et \mathcal{Z} , des espaces de distributions sur Ω , nous allons considérer des relations du type suivant :

$$f \in \mathcal{X} \text{ et } Pf \in \mathcal{Y} \text{ entraînent } Qf \in \mathcal{Z} .$$

Par abus de langage, nous dirons qu'une telle relation est une relation de comparaison pour les opérateurs P et Q . On sait que les relations de comparaison sont extrêmement importantes dans toutes les questions de régularité et d'existence de la théorie des opérateurs différentiels.

EXEMPLES. - Dans sa thèse [2], HÖRMANDER a étudié systématiquement des relations

de comparaison dans le cas d'opérateurs différentiels à coefficients constants. En particulier, il traite les exemples suivants.

1° $\mathcal{X} = L_0^2(\Omega)$, $\mathcal{Y} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{Z} = L^2(\Omega)$: HÖRMANDER démontre que, pour que $f \in L_0^2(\Omega)$ et $Mf \in L^2(\Omega)$ entraînent $Nf \in L^2(\Omega)$ pour un ouvert Ω , il faut qu'il existe un nombre γ tel que

$$(1) \quad |\widehat{N}(\xi)|^2 < \gamma \sum_{\alpha} |\widehat{M}^{\alpha}(\xi)|^2$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Inversement, si cette relation est satisfaite $f \in L_0^2(\Omega)$ et $Mf \in L^2(\Omega)$ entraînent $Nf \in L^2(\Omega)$ pour tout ouvert Ω relativement compact de \mathbb{R}^n .

2° $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{Z} = L^2(\Omega)$. Ici on peut démontrer que si $f \in L^2(\Omega)$ et $Mf \in L^2(\Omega)$ entraînent $Nf \in L^2(\Omega)$ pour un ouvert Ω , alors N est (sauf pour $n = 1$) nécessairement de la forme $aM + b$ avec a et b constants.

Le cas suivant est peu traité dans la littérature :

3° $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{Z} = L_{loc}^2(\Omega)$. Evidemment, pour $f \in L^2(\Omega)$ et $Mf \in L^2(\Omega)$ entraînent $Nf \in L_{loc}^2(\Omega)$, il faut que (1) soit satisfaite. HÖRMANDER a déterminé les M tels qu'il n'y ait pas d'autres N possédant cette propriété (ce problème est lié au problème de déterminer tous les opérateurs différentiels à coefficients constants hypoelliptiques).

Les considérations ci-dessus s'étendent immédiatement au cas de plusieurs opérateurs. Il faut alors remplacer \mathcal{Y} par une suite $\{\mathcal{Y}_i\}$ d'espaces de distributions et P par une suite $\{P_i\}$ d'opérateurs différentiels.

2. Généralisation d'un théorème de HÖRMANDER. Cas des coefficients constants.

Dans ce numéro et le suivant, nous étudierons une généralisation du théorème de HÖRMANDER, cité au 1° d'abord pour le cas des coefficients constants, puis pour le cas des coefficients "variables".

Soit s un nombre réel, nous désignerons par H^s l'espace des distributions telles qu'on ait à la fois $f \in \mathcal{S}'$ et $(1 + \Delta)^{s/2} f \in L^2$; ($\Delta = D_1^2 + \dots + D_n^2 =$ Laplacien). Nous désignerons par $f \rightarrow \|f\|_s$ la norme :

$$\|f\|_s = \left(\int |(1 + \Delta)^{s/2} f|^2 dx \right)^{1/2} .$$

Pour $s = 0$, nous écrirons $\|f\|$ au lieu de $\|f\|_0$.

On a alors le

THEOREME 1. - Soient M et N, des opérateurs différentiels à coefficients constants ; les conditions suivantes sont équivalentes :

- i. Il existe un nombre s, tel que $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^s$ entraînent $Nf \in H^s$.
- ii. Pour tout s, f $\in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^s$ entraînent $Nf \in H^s$.
- iii. Il existe un nombre γ tel que

$$|\widehat{N}(\xi)|^2 \leq \gamma \sum_{\alpha} |\widehat{M}^{\alpha}(\xi)|^2$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Plus généralement, on a le

THEOREME 2. - Etant donnés M et N, des opérateurs différentiels à coefficients constants, et ρ et σ , des nombres réels, alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- i. Il existe un nombre s, tel que $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^{s+\rho}$ entraînent $Nf \in H^{s+\sigma}$.
- ii. Pour tout s, f $\in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^{s+\rho}$ entraînent $Nf \in H^{s+\sigma}$.
- iii. Il existe un nombre γ tel que

$$(1 + |\xi|^2)^{\sigma} |\widehat{N}(\xi)|^2 \leq \gamma (1 + |\xi|^2)^{\rho} \sum_{\alpha} |\widehat{M}^{\alpha}(\xi)|^2$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Suivant HÖRMANDER [2], nous dirons, dans le cas du théorème 1, que M est plus fort que N et, dans le cas du théorème 2, que (M, ρ) est plus fort que (N, σ) .

DEMONSTRATION du théorème 2. --

ii. \rightarrow i. évident.

i. \rightarrow ii. Soit s un nombre tel que $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^{s+\rho}$ entraînent $Nf \in H^{s+\sigma}$ et soit t un nombre autre que s. Nous allons démontrer qu'alors $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^{t+\rho}$ entraînent $Nf \in H^{t+\sigma}$. Posons $g = (1 + \Delta)^{(t-s)/2} f$. Soit w une fonction dans \mathcal{D} qui équivaut à 1 dans un voisinage du support de f. On écrit

$$Mg = Mw + M(1 - w)g.$$

On a $Mg \in H^{s+p}$ et g est indéfiniment différentiable en dehors du support de f ; on en déduit $Mwg \in H^{s+p}$, d'où $Nwg \in H^{s+\sigma}$. Or on a

$$Nf = (1 + \Delta)^{(s-t)/2} Nwg + (1 + \Delta)^{(s-t)/2} N(1-w)g.$$

Le premier terme appartient à $H^{t+\sigma}$; le deuxième est indéfiniment différentiable dans un voisinage du support de f . Donc on a $Nf \in H^{t+\sigma}$.

ii. \rightarrow iii. - En appliquant le théorème du graphe fermé, on voit qu'il existe, pour tout ouvert Ω relativement compact de \mathbb{R}^n et tout s , un nombre C tel que

$$\|Nf\|_{s+\sigma} \leq C (\|Mf\|_{s+p} + \|f\|_{s+p})$$

pour toute $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Prenons s tel que $s+p \geq 0$ et $s+\sigma \geq 0$. Remplaçons f par $e^{\sqrt{-1} \cdot \xi} f$ où $f \neq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$. Un calcul facile montre alors qu'on a

$$\begin{aligned} C_1 (1 + |\xi|^2)^{s+\sigma} \int_{|\xi'| \leq 1} \left| \sum_{\alpha} (|\alpha|!)^{-1} \hat{M}^{\alpha}(\xi) \xi'_{\alpha} \right|^2 |\hat{f}(\xi')|^2 d\xi' &\leq \\ &\leq C_2 C^2 (1 + |\xi|^2)^{s+p} \int_{|\xi'| \leq 1} (1 + |\xi'|^2)^{s+p} \left| \sum_{\alpha} (|\alpha|!)^{-1} \hat{M}^{\alpha}(\xi) \xi'_{\alpha} \right|^2 \\ &|\hat{f}(\xi')|^2 d\xi' + \int_{|\xi'| \leq 1} (1 + |\xi'|^2)^{s+p} |\hat{f}(\xi')|^2 d\xi', \end{aligned}$$

d'où on déduit l'inégalité désirée :

$$(1 + |\xi|^2)^{\sigma} |\hat{N}(\xi)|^2 \leq \gamma (1 + |\xi|^2)^p \sum_{\alpha} |\hat{M}^{\alpha}(\xi)|^2.$$

(iii) \Rightarrow (ii). Nous allons nous appuyer sur le lemme suivant.

LEMME 1. - (Inégalités de HÖRMANDER-LERAY). - Soit M un opérateur différentiel à coefficients constants. Pour tout ouvert Ω relativement compact de \mathbb{R}^n , il existe un nombre C tel que

$$\|M^{\alpha} f\| \leq C \|Mf\|$$

pour toute $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, quel que soit α .

Autrement dit, $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in L^2$ entraînent $M^{\alpha} f \in L^2$. En appliquant la partie (i) \Rightarrow (ii) du théorème 2 (déjà connue), on arrive ainsi au

LEMME 2. - Soit M un opérateur différentiel à coefficients constants. Alors,

pour tout s , $f \in \mathcal{C}'$ et $Mf \in H^s$ entraînent $M^\alpha f \in H^s$, quel que soit α .
 , Soit maintenant $f \in \mathcal{C}'$ et $Mf \in H^{s+\rho}$. On a donc aussi $M^\alpha f \in H^{s+\rho}$.
 L'hypothèse (iii), combinée avec le théorème de PLANCHEREL, montre alors qu'on a $Mf \in H^{s+\sigma}$.

Il nous reste à démontrer les inégalités de HÖRMANDER-LERAY.

DÉMONSTRATION du lemme 1. - Nous nous appuyerons sur le résultat suivant, pour la première fois utilisée par MALGRANGE [5], conséquence du principe de maximum pour les fonctions holomorphes. (Pour la démonstration, voir par exemple HÖRMANDER [3].)

LEMME 3. - Soit $\varphi(t)$ une fonction holomorphe et $p(t)$ un polynôme de degré m . Alors, on a

$$|p^k(0) \varphi(0)| \leq (m!/(m-k)!)(2\pi)^{-1} \int_{|t|=1} |p(t) \varphi(t)|^2 |dt|^{1/2}$$

($p^k(t)$ est la dérivée d'ordre k de $p(t)$).

Nous appliquons le lemme 3 avec

$$p(t) = \widehat{M}(\xi + te_1)$$

et

$$\varphi(t) = \widehat{f}(\xi + te_1)$$

($e_1 = (1, 0, \dots, 0)$). On obtient alors

$$|\widehat{M}^1(\xi) \widehat{f}(\xi)|^2 \leq (m!/(m-k)!)^2 (2\pi)^{-1} \int_{|t|=1} |\widehat{M}(\xi + te_1)|^2 |\widehat{f}(\xi + te_1)|^2 |dt|$$

d'où d'après le théorème de PLANCHEREL

$$\|M^1 f\| \leq (m!/(m-k)!) \sup_{|t|=1} \|e^{\sqrt{-1} tx^1} Mf\|.$$

Parce que Ω est relativement compact par hypothèse, ceci entraîne l'inégalité :

$$\|M^1 f\| \leq C \|Mf\|,$$

d'où le lemme par récurrence sur l'ordre de dérivation.

3. Généralisation d'un théorème de HÖRMANDER. Cas des coefficients "variables".

Nous allons maintenant formuler, pour un cas d'opérateurs différentiels à coefficients "variables", un théorème de comparaison qui généralise, dans une

certaines mesures, les résultats du numéro précédent. Nous allons considérer des opérateurs différentiels P de la forme

$$P = \sum_j a^j M_j ,$$

où les M_j (en nombre fini) sont des opérateurs à coefficients constants et a^j des fonctions indéfiniment différentiables.

En outre, nous faisons l'hypothèse suivante :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'opérateur P_x est plus fort que chacun des M_j .

Alors on a le

THEOREME 3. - Tout $x \in \mathbb{R}^n$ admet un voisinage ouvert Ω_x tel que, quel que soit s , $f \in \mathcal{E}'_{\Omega_x}$ et $Pf \in H^s$ entraînent $M_i f \in H^s$ pour tout i .

Supposons maintenant que Q soit un opérateur différentiel de la forme

$$Q = \sum_j b^j N_j ,$$

où les N_j sont tels que chaque (N_j, θ) est moins fort que le M_j correspondant, pour un θ convenable, et les b^j sont des fonctions indéfiniment différentiables.

Alors, le résultat suivant découle aisément du théorème 3.

COROLLAIRE. - Si $f \in \mathcal{E}'_{\Omega_x}$ et $Pf \in H^s$, alors $Qf \in H^{s+\theta}$.

Principe de démonstration du théorème 3. Le plan de démonstration est classique :

a. On fabrique des inégalités "a priori". On prend $s \geq 0$.

Tout $x \in \mathbb{R}^n$ admet un voisinage ouvert Ω_x tel qu'il existe des constantes C et C_s (C ne dépend pas de s) pour lesquelles,

$$\sum_j \|M_j f\|_s \leq C \|Pf\|_s + C_s \sum_j \|M_j f\|_{\sup(s-1, 0)} .$$

Il s'agit de faire une étude assez fine des multiplicateurs de H^s et des inégalités de HÖRMANDER-LERAY.

b. On effectue une régularisation. Etant donnée $f \in \mathcal{E}'_{\Omega_x}$ avec $Pf \in H^s$ et $M_j f \in H^{\sup(s-1, 0)}$, on remplace f par $\delta_i * f$, où (δ_i) est une suite de fonctions dans \mathcal{D} qui converge vers δ (fonction de Dirac) d'une manière convenable. En appliquant un lemme (classique) de FRIEDRICHS [1], on

déduit $M_j f \in H^s$.

(a) et (b) donnent le théorème 3 pour le cas des distributions d'ordre suffisamment grand. Il nous reste donc à passer aux distributions d'ordre quelconque.

c) On fait un relèvement sur l'exposant s . - Supposons que $f \in \mathcal{E}'_{\Omega_x}$ et $Pf \in H^s$ et $M_j f \in H^t$. Prenons un nombre entier pair N avec $t + N \geq 0$ et posons $g = (1 + \Delta)^{-N/2} f$. On peut maintenant raisonner comme dans la démonstration du théorème 2, sauf qu'il faut faire plus attention au fait que P n'est pas invariant par les translations de \mathbb{R}^n (d'où la nécessité de prendre N pair!).

APPLICATION : Hypoellipticité. - Si les M_j sont tels qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que, pour chaque j et chaque $\alpha \neq 0$, (M_j^α, k) est moins fort que $\{M_j\}$, alors le théorème 3, combiné avec la formule de LEIBNIZ, montre que P est hypoelliptique.

On retrouve ainsi un théorème de HÖRMANDER [4] et MALGRANGE [6] (voir aussi l'exposé de ZERNER [8]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FRIEDRICHS (K. O.). - On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 6, 1953, p. 299-326.
- [2] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 161-248 (Thèse Sc. math.).
- [3] HÖRMANDER (Lars). - Local and global properties of fundamental solutions, Math. Scand., t. 5, 1957, p. 27-39.
- [4] HÖRMANDER (Lars). - On interior regularity of the solutions of partial differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 11, 1958, p. 197-218.
- [5] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 271-355 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).
- [6] MALGRANGE (Bernard). - Plongement des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 101-112.
- [7] PEETRE (Jaak). - Une classe d'opérateurs différentiels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1102-1103.
- [8] ZERNER (Martin). - Equations aux dérivées partielles dont les solutions sont indéfiniment dérivables (hypoellipticité), Séminaire Lelong, t. 2, 1958/59, n° 12.