Bernard Malgrange

Sur les équations de convolution

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. nº 15, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A10_0>

SUR LES ÉQUATIONS DE CONVOLUTION

par Bernard MALGRANGE

Je me propose essentiellement de donner une démonstration simplifiée du théorème suivant, que j'ai établi dans ma thèse [5] :

THÉORÈME 1. Soit, dans R^n, μ une distribution à support compact [7]. L'ensemble des distributions f vérifiant $\mu * f = 0$ est engendré (topologiquement) par les exponentielles-polynômes qu'il contient.

1. Réduction du problème.

NOTATIONS. - $x = (x_1, \dots, x_n)$ désigne le point courant de R^n ; $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, avec $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ le point courant de C^n ; $x\zeta = \Sigma x_j \zeta_j$.

Soient $\mu \in \mathcal{E}'$ une distribution à support compact sur R^n et $\hat{\mu}(\zeta) = \int \mu(x)\, e^{-ix\zeta}\, dx$ (dx = mesure de Lebesgue sur R^n) sa transformée de Fourier ; $\hat{\mu}(\zeta)$ est une fonction holomorphe de $\zeta \in C^n$. Nous allons montrer que le théorème 1 résulte du lemme suivant (c'est une amélioration de la proposition 4, chapitre 2, de [5] ; elle a été proposée par J.-P. KAHANE dans [3]) :

LEMME fondamental. - Soient P un polynôme et ν une distribution $\in \mathcal{E}'$ telle que $\hat{\nu}(\zeta)/\hat{\mu}(\zeta)$ n'ait pas de pôles dans C^n ; il existe $\nu_P \in \mathcal{E}'$ tel que :

$$(P\mu) * \nu = \mu * \nu_P \quad .$$

(Ce lemme sera démontré au paragraphe 2).

Supposons, en effet $\mu \neq 0$ (sinon le théorème est trivial), et soit ν' une fonction indéfiniment dérivable à support compact orthogonale à toutes les exponentielles-polynômes φ vérifiant $\mu * \varphi = 0$; et désignons par ν la symétrique de ν' par rapport à l'origine. D'après le théorème de Hahn-Banach, tout revient à prouver que l'on a $\langle \nu, f \rangle = 0$ pour tout f vérifiant $\mu * f = 0$. comme la même égalité sera encore vraie pour les translatées de f, il revient au même de prouver que l'on a $\nu * f = 0$. Pour cela, nous utiliserons le fait élémentaire suivant (dont on trouvera une démonstration, par exemple dans [5], Introduction) :

L'hypothèse faite sur ν' est équivalente à l'hypothèse suivante : $\hat{\nu}(\zeta)/\hat{\mu}(\zeta)$ n'a pas de pôles dans $\mathbb{C}^n$.

Appliquons maintenant le lemme fondamental ; pour tout polynôme P , on a

$$(P\mu) * \nu * f = \nu_P * \mu * f = 0 \quad .$$

Posons $g = \nu * f$; d'après l'égalité précédente, le résultat découlera du lemme suivant :

LEMME 1. - *L'ensemble des distributions g vérifiant, pour tout polynôme P , l'équation $(P\mu) * g = 0$, est réduit à $\{0\}$.*

Par régularisation il suffit de montrer que l'ensemble V des fonctions indéfiniment dérivables vérifiant les mêmes équations est réduit à $\{0\}$. Or, V possède les propriétés suivantes :

a. V est un sous-espace fermé invariant par translation de l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment dérivables (évident).

b. V est un idéal (pour la multiplication ordinaire) de $\mathcal{E}$: en effet, V étant fermé, il suffit de montrer qu'il est invariant pour la multiplication par les polynômes ; pour établir ce point, il suffit de montrer que l'ensemble des équations $(P\mu) * g = 0$ équivaut à l'ensemble des équations $\mu * (Pg) = 0$; or, ce dernier point résulte facilement de l'application récurrente de la formule :

$$x_j(\mu * g) = (x_j \mu) * g + \mu * (x_j g)$$

De (a) et (b) résulte que l'on a nécessairement $V = \mathcal{E}$ ou $V = \{0\}$; comme $\mu \neq 0$, on a $V \neq \mathcal{E}$, donc $V = \{0\}$, ce qui démontre le lemme et le théorème.

2. Démonstration du lemme fondamental.

Commençons par rappeler un lemme classique (en le précisant un peu) :

LEMME 2. - *Étant donnés deux nombres > 0 , A et B , on peut trouver $C > 0$ et $D > 0$ tels que toute fonction holomorphe f de $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant :*

$$f(0) = 1 \ ; \quad |f(\lambda)| \leq Ae^{B|\lambda|}$$

possède les propriétés suivantes :

Soient λ_j les zéros de f , rangés par valeur absolue croissante (j entier

> 0), et

$$f(\lambda) = e^{a\lambda} \prod (1 - \lambda/\lambda_j) \, e^{\lambda/\lambda_j}$$

le développement en produit canonique de f ; on a :

a. $p/|\lambda_p| \leqslant C$ pour tout p.

b. $|a| \leqslant D$.

La seconde inégalité résulte immédiatement de la formule $a = f'(0)$; pour démontrer la première, appliquons l'inégalité de Poisson-Jensen : si dans le disque ouvert de rayon r, f a q zéros $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, on a :

$$\left|\frac{r^q}{\lambda_1 \ldots \lambda_q}\right| \leqslant \max_{|\lambda|=r} \left|\frac{f(\lambda)}{f(0)}\right| \leqslant Ae^{Br}$$

La même inégalité subsiste évidemment si l'on enlève au premier membre des facteurs r/λ_j $(j \leqslant q)$ ou si l'on y ajoute des facteurs r/λ_j $(j > q)$; pour tout entier p, on a donc

$$\frac{r^p}{|\lambda_1 \ldots \lambda_p|} \leqslant Ae^{Br}$$

et a fortiori :

$$\frac{r^p}{|\lambda_p|^p} \leqslant Ae^{Br}$$

En choisissant $r = p/B$, on obtient le résultat cherché.

Le lemme suivant est une variante d'un résultat dû à L. SCHWARTZ [8].

LEMME 3. Etant donné quatre nombres > 0, A, A', B, B', il existe $A'' > 0$ tel que tout couple f, g de fonctions entières de λ vérifiant :

$|f(\lambda)| \leqslant Ae^{B|\lambda|}$; $|g(\lambda)| \leqslant A'e^{B'|\Im\lambda|}$; $f(0) = 1$; $g(\lambda)/f(\lambda)$ sans pôles, vérifie aussi :

$$\left|\frac{f'(\lambda)\, g(\lambda)}{f(\lambda)}\right| \leqslant A''(1 + |\lambda|^2)\, e^{B'|\Im\lambda|}$$

Posons en effet $f(\lambda) = e^{a\lambda} \prod (1 - \lambda/\lambda_j)\, e^{\lambda/\lambda_j}$; on a :

$$\frac{f'(\lambda)\, g(\lambda)}{f(\lambda)} = a g(\lambda) + g(\lambda) \sum (1/(\lambda - \lambda_j) + 1/\lambda_j)$$

la série qui figure au second membre étant absolument convergente pour $\lambda \neq \lambda_j$; une transformation immédiate permet d'écrire :

$$\frac{f'(\lambda)\, g(\lambda)}{f(\lambda)} = a\, g(\lambda) - \lambda g(\lambda) \sum \frac{1}{\lambda_j^2} + \lambda^2 \sum \frac{g(\lambda)}{\lambda_j^2(\lambda - \lambda_j)}$$

C et D ayant la même signification qu'au lemme précédent,

- le premier terme du second membre est majoré par $D|g(\lambda)|$ (évident) ;
- le second est majoré par $C_1 |\lambda g(\lambda)|$, avec $C_1 = C \sum 1/j^2$ (évident) ;
- le troisième est majoré par $C_1 |\lambda|^2 \max\limits_{|\lambda' - \lambda| \leq 1} |g(\lambda')|$

(en vertu de l'inégalité élémentaire suivante, cas particulier de Poisson-Jensen : si α est un zéro de g, on a : $\left|\frac{g(\lambda)}{\lambda - \alpha}\right| \leq \max\limits_{|\lambda' - \lambda| \leq 1} |g(\lambda')|$), et le lemme résulte aussitôt de ces majorations.

LEMME 3 bis. - Même énoncé, en remplaçant partout $\Im \lambda$ par λ.

(Même démonstration).

Démontrons maintenant le lemme fondamental ; par récurrence, il suffit de prouver que, pour $j = 1, \ldots, n$, il existe $\nu_j \in \mathcal{E}'$ vérifiant :

$$(x_j \mu) * \nu = \mu * \nu_j \quad ;$$

en posant $\hat{\mu} = M$, $\hat{\nu} = N$, cela revient à démontrer :

$$\frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M} \in \hat{\mathcal{E}}' \quad ;$$

d'après le théorème de Paley-Wiener, cela équivaut à la propriété suivante :

$\frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M}$ est une fonction entière de type exponentiel, à croissance polynomiale dans le domaine réel.

Un raisonnement facile de régularisation (que nous omettrons) montre que l'on peut supposer, par exemple, que ν est une fonction intégrable et, par conséquent, qu'il existe $A' > 0$ et $B' > 0$ tels que

$$|N(\zeta)| \leq A' e^{B'|\eta|} \qquad (|\zeta|^2 = \sum |\zeta_j|^2 \ ; \ |\eta|^2 = \sum |\eta_j|^2)$$

Par ailleurs M est de type exponentiel, donc il existe A et B tels que

$|M(\zeta)| \leqslant Ae^{B|\zeta|}$.

Supposons (en faisant au besoin une translation pour nous ramener à ce cas) que l'on a : $M(0) \neq 0$; en multipliant au besoin M par une constante, on peut supposer $M(0) = 1$; pour tout vecteur complexe ζ , avec $|\zeta| = 1$, posons

$$f_\zeta(\lambda) = M(\lambda\zeta) \quad \text{et} \quad g_\zeta(\lambda) = N(\lambda\zeta) \quad (\lambda \in C) \quad ;$$

appliquons le lemme 3 bis à f_ζ et g_ζ ; après quelques transformations évidentes, on trouve :

pour tout $\zeta \in C^n$:

$$\left|\sum_j \zeta_j \frac{\partial M}{\partial \zeta_j}(\zeta) \frac{N(\zeta)}{M(\zeta)}\right| \leqslant A''|\zeta|(1 + |\zeta|^2)\, e^{B'|\zeta|}$$

Par conséquent, $\sum \zeta_j \frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M}$ est de type exponentiel.

Appliquons maintenant le lemme 3 à f_ζ et g_ζ , pour ζ réel (en nous restreignant aux λ réels) ; on trouve, pour tout $\xi \in R^n$:

$$\left|\sum_j \xi_j \frac{\partial M}{\partial \xi_j}(\xi) \frac{N(\xi)}{M(\xi)}\right| \leqslant A''|\xi|(1 + |\xi|^2) \quad .$$

Par conséquent, $\sum \zeta_j \frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M}$ est à croissance polynomiale dans le domaine réel, donc est dans $\hat{\mathcal{E}}'$.

Recommençons les opérations précédentes en changeant d'origine : pour tout $a \in R^n$ vérifiant $M(a) \neq 0$, on aura :

$$\sum (\zeta_j - a_j) \frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M} \in \hat{\mathcal{E}}'$$

et, par conséquent, pour $j = 1 , \dots , n$: $\frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M} \in \hat{\mathcal{E}}'$ ce qui démontre le lemme fondamental.

3. Compléments.

a. Le "théorème des supports" (1). - Pour prouver, dans la démonstration précédente, que les $\frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M}$ sont de type exponentiel, on aurait pu, à la place du lemme 3 bis, utiliser le théorème classique suivant, dû à LINDELÖF (au moins lorsque $n = 1$; l'extension à n quelconque est facile ; voir, par exemple [5]) : une fonction

(1) Ce point ne figurait pas dans l'exposé oral.

entière, quotient de deux fonctions de type exponentiel est elle-même de type exponentiel.

Cependant, par la méthode employée ici, nous obtenons le résultat plus précis suivant (qui ne peut pas être obtenu par le théorème de Lindelöf : les majorations du type d'un quotient qui seraient nécessaires, sont fausses) :

Premier complément au lemme fondamental. - L'enveloppe convexe du support de ν_P est contenu dans celle de ν.

Pour démontrer ce point, il suffit de traiter le cas où $P = x_j$; or, supposons que ν soit une fonction intégrable (cas auquel on peut se ramener par régularisation), ayant son support dans une boule de rayon B' centrée à l'origine ; alors, N sera de type exponentiel $\leqslant B'$; mais la démonstration du lemme fondamental montre aussitôt que

$$\hat{\nu}_j = i \frac{\partial M}{\partial \zeta_j} \frac{N}{M}$$

est aussi de type exponentiel $\leqslant B'$; d'après le théorème de Paley-Wiener, ν_j a encore son support dans la boule de centre 0 et de rayon B' ; par translation (dans l'espace des x), on obtient : toute boule contenant le support de ν contient le support de ν_j ; d'où le résultat ([2]).

Remarquons maintenant que le complément précédent est aussi une conséquence immédiate du théorème suivant.

THÉORÈME (des supports) 2. - Soient μ et σ deux distributions à support compact. L'enveloppe convexe du support de $\mu * \sigma$ est égale à la somme (algébrique) des enveloppes convexes des supports de μ et σ (voir [4] et [9]).

Ici, nous allons, au contraire, donner une démonstration très simple du théorème 2 à partir des résultats précédents :

Supposons que μ soit une fonction continue (cas auquel on peut se ramener par régularisation) ; pour tout point $a \in R^n$ tel que $\mu(a) \neq 0$, on peut trouver (théorème de Weierstrass) une suite de polynômes $P_{a,j}$ tels que les $P_{a,j}\,\mu$ convergent vers δ_a (masse $+1$ en a) dans $\mathcal{E}'$ faible : posons $\mu * \sigma = \nu$, et appliquons les résultats précédents : il existe une suite $\nu_{a,j}$ de distributions $\in \mathcal{E}'$ telles que :

i. L'enveloppe convexe du support de $\nu_{a,j}$ est contenue dans celle de $\nu = \mu * \sigma$.

([2]) Le raisonnement précédent, et l'idée d'introduire un lemme 3 bis au lieu d'utiliser le théorème de Lindelöf, sont dûs à J.-P. KAHANE.

ii. $(P_{a,j}\mu) * \nu = \mu * \nu_{a,j}$; d'ou $(P_{a,j}\mu) * \sigma = \nu_{a,j}$.

En passant à la limite, on obtient ceci : pour tout a tel que $\mu(a) \neq 0$, l'enveloppe convexe de $\delta_a * \sigma$ est contenue dans celle de $\mu * \sigma$; comme (par définition du support de μ), l'enveloppe convexe fermée des a est égale à l'enveloppe convexe du support de μ , on obtient finalement :

(enveloppe convexe du support de μ) + (enveloppe convexe du support de σ) $\subset$ (enveloppe convexe du support de $\mu * \sigma$).

L'inclusion opposée étant triviale, le théorème 2 est démontré.

b. Étude de certaines équations avec second membre. - Je me bornerai ici à quelques brèves indications ; rappelons d'abord quelques définitions utilisées dans [5] : pour $s \in R$, $\mathcal{K}^s$ désigne l'espace des distributions φ à support compact "s fois L^2-dérivables" c'est à dire vérifiant :

$$\|\varphi\|_s^2 = \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \,(1 + |\xi|^2)^s \, d\xi < +\infty$$

et $\mathcal{L}^s$ désigne l'espace des distributions f telles que, pour tout α indéfiniment dérivable à support compact, on ait $\alpha f \in \mathcal{K}^s$.
On a alors :

Deuxième complément au lemme fondamental. - Dans les hypothèses du lemme fondamental, il existe une constante k (dépendant de μ et P) telle que l'hypothèse supplémentaire : $\nu \in \mathcal{K}^s$ entraîne : $\nu_P \in \mathcal{K}^{s-k}$.
(Il suffit, pour le voir, de reprendre la démonstration donnée au paragraphe 2).

En raisonnant comme dans [5], chapitre 2, paragraphe 3, on obtient alors :

THÉORÈME 3. - Soient $\mu \in \mathcal{E}'$ et P un polynôme ; il existe $k'(\mu, P)$ tels que, pour tout $g \in \mathcal{L}^s$, il existe $f \in \mathcal{L}^{s-k'}$ vérifiant :

$$\mu * f = (P\mu) * g \quad .$$

EXEMPLE. - Prenons pour μ une somme finie de distributions à supports ponctuels : $\mu = \sum D_j \, \delta_{a_j}$, les a_j étant des points distincts de R^n , et les D_j des opérateurs différentiels $\neq 0$ à coefficients constants, il existe certainement un polynôme P_j tel que $P_j \mu = \delta_{a_j}$ (évident). On retrouve alors un théorème de L. EHRENPREIS [1] (en particulier, le fait que μ possède une solution élémentaire).

REMARQUE 1. - En modifiant un peu le raisonnement cité, on voit que l'on peut prendre $k'(\mu, P) = k(\mu, P)$.

REMARQUE 2. - Il serait très intéressant d'obtenir la meilleure valeur possible pour $k(\mu, P)$. Il me semble très probable que, quels que soient μ et P , tout nombre > 0 convient ; et même (sinon en général, du moins dans des cas assez étendus), $k = 0$. Il est facile de voir que ce dernier résultat équivaudrait à l'inégalité suivante : pour tout compact $K \subset R^n$, il existe $C(\mu, P, K) > 0$ tel que, pour tout φ indéfiniment dérivable à support dans K , on ait :

$$\|(P\mu) * \varphi\|_0 \leqslant C\|\mu * \varphi\|_0$$

Lorsque μ est un polynôme différentiel (i. e. une distribution à support l'origine), cette inégalité a été démontrée par L. HÖRMANDER [2]. Ce résultat a été étendu récemment par l'auteur aux μ sommes finies de distributions à support ponctuel [6] (ce qui améliore le théorème de L. EHRENPREIS dont il a été question plus haut).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] EHRENPREIS (Leon). - Solution of some problems of division, Amer. J. of Math., t. 77, 1955, p. 286-292.

[2] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 160-248.

[3] KAHANE (J.-P.). - Cours professé au Tata Institute. - Bombay, 1957.

[4] LIONS (J.-L.). - Supports dans la transformation de Laplace, J. Anal. math. Jérusalem, t. 2, 1952-53, p. 369-380.

[5] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 271-355. (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[6] MALGRANGE (Bernard). - Sur une inégalité de F. Treves, Math. Z., t. 72, 1959, p. 184-186.

[7] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, 2e éd. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., n° 1091).

[8] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques, Annals of Math., t. 48, 1947, p. 857-929.

[9] TITCHMARSH (E. C.). - Introduction to the theory of Fourier integrals, 2e éd. - Oxford, Clarendon Press, 1948.