Séminaire Lelong.
Analyse

François Norguet

Images de faisceaux analytiques cohérents

Séminaire Lelong. Analyse, tome 1 (1957-1958), exp. n° 11, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1957-1958__1__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris 11-01

-:-:-:-

Séminaire d'ANALYSE 4 mars 1958

(P. LELONG)

Année 1957/58

-:-:-:-

IMAGES DE FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS

[d'après H. GRAUERT et R. REMMERT]

par François NORGUET

I. Résultats préliminaires. Enoncé des théorèmes fondamentaux.

1. Notion d'espace analytique complexe.

a. Catégorie des espaces annelés complexes. - On appelle catégorie des espaces annelés complexes, la catégorie des espaces annelés obtenue en prenant pour foncteur fondamental T le foncteur qui associe : à tout espace topologique X, le même espace muni du faisceau A_X des germes de fonctions continues sur X, à valeurs complexes ; à toute application continue f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y, le morphisme (f , g_f) de (Y , A_Y) dans (X , A_X) pour lequel g_f associe, à tout germe de fonction continue à valeurs complexes sur $f(X)$, son image réciproque par f.

EXEMPLES.- Tout domaine X de C^n, muni du faisceau $A(X)$ des germes de fonctions holomorphes dans X, est un espace annelé complexe. Un ensemble analytique dans X est, par définition, un ensemble distingué dans l'espace annelé $(X , A(X))$. Un tel ensemble analytique Y, muni du faisceau $A(Y)$ induit sur Y par $A(X)$, est un espace annelé complexe.

b. Catégorie des espaces analytiques complexes. - On appelle espace analytique complexe, tout espace annelé complexe séparé (X , A) dont chaque point x admet un voisinage U tel que la restriction à U de l'espace annelé (X , A) soit isomorphe à un ensemble analytique Y dans un domaine de C^n, muni du faisceau $A(Y)$ défini ci-dessus. On appelle catégorie des espaces analytiques complexes la sous-catégorie de la catégorie des espaces annelés complexes, dont les éléments sont les morphismes admettant pour unités à gauche et à droite des espaces analytiques complexes. Cette sous-catégorie est stable relativement au produit topologique dans la catégorie des espaces annelés complexes. C'est la seule catégorie considérée dans cet exposé ; de plus, les espaces analytiques complexes considérés sont supposés paracompacts. Un morphisme d'espaces analytiques complexes est appelé morphisme analytique. Un ensemble distingué dans unespace analytique complexe est appelé ensemble analytique. Un faisceau de A-modules sur un espace analytique (X , A) est appelé faisceau analytique ; il est dit analytique cohérent s'il est un faisceau cohérent de A-modules. Un élément de A est appelé germe de fonction analytique sur X ; une section du faisceau A, au-dessus d'un ouvert U de X, est appelée fonction analytique sur U.

c. Espaces analytiques holomorphiquement complets. - Un espace analytique (X , A) est dit holomorphiquement complet si :

i. pour tout point x de X, il existe un nombre fini de fonctions analytiques dans X, qui admettent x comme zéro isolé commun.

ii. pour tout ensemble M, infini et discret, de points de X, sans point d'accumulation dans X, il existe une fonction analytique dans X, non bornée sur M.

Un recouvrement, localement fini, de X, par des ouverts sur chacun desquels la restriction de (X , A) est un espace analytique holomorphiquement complet, est appelé recouvrement de Stein de X. Tout espace analytique admet un recouvrement de Stein arbitrairement fin.

2. Rappel de théorèmes sur les faisceaux analytiques cohérents.

THÉORÈME 1. - Si (X , A) est un espace analytique, le faisceau A est analytique cohérent ; la somme directe A^p est un faisceau analytique cohérent, pour tout entier p fini positif.

THÉORÈME 2. - Le faisceau d'idéaux associé à un ensemble analytique dans un espace analytique (X , A) est un faisceau analytique cohérent.

THÉORÈME 3. - Soit M un sous-faisceau analytique de A^p sur un espace analytique (X , A) ; si tout point x de X admet un voisinage U tel que la restriction de M à U soit de type (A), alors M est analytique cohérent.

THÉORÈME 4. (Théorèmes A et B de CARTAN et SERRE). - Tout faisceau analytique cohérent sur un espace analytique holomorphiquement complet est de type (C).

THÉORÈME 5. - Soit M un faisceau analytique cohérent sur un espace analytique (X , A) holomorphiquement complet. Si des sections s_i de M au-dessus de X, en nombre fini, sont telles que, pour tout point x de X, le A_x-module M_x

soit engendré par les éléments $s_i(x)$, alors les s_i engendrent le $H^o(X , A)$-module $H^o(X , M)$.

THÉORÈME 6. - Soit M un faisceau analytique cohérent sur un espace analytique (X , A) holomorphiquement complet, et soit U un ouvert de X , holomorphiquement complet et relativement compact ; alors le $H^o(\overline{U} , A)$-module $H^o(\overline{U} , M)$ est de type fini ($\overline{U}$ désignant l'adhérence de U).

THÉORÈME 7. - Tout recouvrement de Stein $\mathcal{U}$ d'un espace analytique (X , A) est, pour tout faisceau analytique cohérent M sur X , un recouvrement de Leray. Donc $H^q(X , M)$ est isomorphe à $H^q(\mathcal{U}, M)$ pour tout $q \geqslant 0$. Il en résulte que, si X admet un recouvrement de Stein formé de k ouverts, $H^q(X , M)$ est nul pour tout faisceau analytique cohérent M sur X , et tout $q \geqslant k$.

THÉORÈME 8. - Si f est une application analytique d'un espace analytique X dans un espace analytique Y , et si M est un faisceau analytique cohérent sur X , simple d'espèce (B) relativement à f , alors $H^q(X , M)$ est isomorphe à $H^q(Y , f_!(M))$ pour tout $q \geqslant 0$.

3. Caractérisation cohomologique des faisceaux analytiques cohérents (*) .

Remarque préliminaire. - Soit U un ouvert de C^n , A le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans U , M un sous-faisceau analytique de A^q ; $H^o(U , A^q)$ et $H^o(U , M)$ sont des C-espaces vectoriels ; $H^o(U , A^q)$, muni de la topologie de la convergence compacte, est complet ; c'est donc un espace de Fréchet (espace vectoriel localement convexe, métrisable et complet) ; $H^o(U , M)$ est muni d'une topologie naturelle, comme sous-espace vectoriel de $H^o(U , A^q)$; c'est un sous-espace fermé de $H^o(U , A^q)$, car tout sous-module de A^q est fermé pour la convergence uniforme dans un voisinage de x (H. CARTAN [1] , Appendice I) ; c'est donc aussi un espace de Fréchet.

LEMME 1. - Soit M un sous-faisceau analytique de A^q dans le polydisque

$$Z = \{|z_i| < \rho_i\} \ , \ 1 \leq i \leq n$$

de C^n , tel que $H^1(U_j , M) = 0$ pour tout ouvert

(*) Le lemme 3 a été énoncé et démontré par H. GRAUERT et R. REMMERT ; la démonstration qui suit est due à Mr H. CARTAN, ainsi que le théorème 9 .

$$U_j = \{0 < |z_j| < r_j \quad , \quad |z_i| < r_i\} \; , \quad 1 \leq i \leq n \; , \; i \neq j \; , \quad U_j \subset Z \; .$$

<u>Alors à tout polydisque</u>

$$Z' = \{|z_i| < r_i\} \; , \quad r_i \leq \rho_i \; , \quad 1 \leq i \leq n$$

<u>correspond un polydisque</u>

$$Z'' = \{|z_i| \leq \varepsilon_i\} \; , \quad \varepsilon_i < r_i \; , \quad 1 \leq i \leq n$$

<u>jouissant de la propriété suivante</u> :

<u>Toute section de</u> M <u>au-dessus de</u> Z' <u>peut être approchée uniformément dans</u> Z'' <u>par des sections de</u> M <u>au-dessus de</u> Z .

DÉMONSTRATION du lemme 1. - Il suffit de démontrer la proposition suivante : Soit une suite $r_i < \rho_i$, $1 \leq i \leq n$ et une suite $r_i' < r_i$, $2 \leq i \leq n$. Il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que toute section de M au-dessus de

$$\{|z_i| < r_i\} \; , \quad 1 \leq i \leq n$$

puisse être uniformément approchée, au-dessus de

$$\{|z_1| \leq \varepsilon_1 \quad , \quad |z_i| \leq r_i'\} \; , \quad 2 \leq i \leq n$$

par des sections de M au-dessus de

$$\{|z_1| < \rho_1 \quad , \quad |z_i| < r_i\} \; , \quad 2 \leq i \leq n \; .$$

DÉMONSTRATION de cette proposition. - Pour établir la proposition indiquée, soit

i. $\Delta = \{0 < |z_1| < r_1 \quad , \quad |z_i| < r_i\} \; , \quad 2 \leq i \leq n$,

intersection de

$$\Delta' = \{|z_i| < r_i\} \qquad\qquad 1 \leq i \leq n$$

et de

$$\Delta'' = \{0 < |z_1| < \rho_1 \quad , \quad |z_i| < r_i\} \; , \quad 2 \leq i \leq n \; .$$

Puisque $H^1(\Delta , M) = H^1(\Delta' , M) = H^1(\Delta'', M) = 0$, toute section f de M au-dessus de Δ est la somme d'une section f' de M au-dessus de Δ' et d'une section f'' de M au-dessus de Δ''.

Donc l'application $H^0(\Delta', M) \times H^0(\Delta'', M) \longrightarrow H^0(\Delta , M) : (f' , f'') \longrightarrow f' + f''$ est un homomorphisme d'espaces de Fréchet, qui est surjectif. D'après un théorème de Banach, c'est une application ouverte.

Considérons toutes les $f' \in H^0(\Delta', M)$ telles que

$$|f'(z)| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad |z_i| \leqslant r'_i \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ , \quad r'_1 < r_1 \ .$$

Quand f'' décrit $H^0(\Delta'', M)$, $f' + f''$ engendre un voisinage de zéro dans $H^0(\Delta, M)$. Donc il existe $\eta > 0$ et un compact

$$\Delta_0 = \{u_1 \leqslant |z_1| \leqslant u'_1 \ , \quad |z_i| \leqslant u_i\} \ , \quad 0 < u_1 < u'_1 < r_1 \ , \ u_i < r_i \ , \quad 2 \leqslant i \leqslant n$$

tel que toute $f \in H^0(\Delta, M)$ et vérifiant $|f(z)| \leqslant \eta$ sur Δ_0 s'écrive sous la forme $f' + f''$ où $|f'(z)| \leqslant 1$ pour $|z_i| \leqslant r'_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit $\frac{1}{\eta} = m$; <u>toute</u> $f \in H^0(\Delta, M)$, <u>telle que</u> $|f| \leqslant 1$ <u>sur</u> Δ_0, <u>s'écrit sous la forme</u> $f' + f''$ <u>où</u> $f' \in H^0(\Delta', M)$, $f'' \in H^0(\Delta'', M)$, <u>et</u> $|f'(z)| \leqslant m$ <u>pour</u> $|z_i| \leqslant r'_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

ii. Soit alors f une section quelconque de M au-dessus de Δ', et $K = \sup_{z \in \Delta_0} |f(z)|$; pour $k \geqslant 0$, $\frac{1}{K}\left(\frac{u_1}{z_1}\right)^k f \in H^0(\Delta, M)$ et vérifie $\left|\frac{1}{K}\left(\frac{u_1}{z_1}\right)^k f\right| \leqslant 1$ sur Δ_0. D'après le résultat de i., il existe des sections $f' \in H^0(\Delta', M)$, $f'' \in H^0(\Delta'', M)$ telles que $\frac{1}{K}\left(\frac{u_1}{z_1}\right)^k f = f' + f''$ sur Δ et

$$|f'| \leqslant m \quad \text{pour} \quad |z_i| \leqslant r'_i \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ .$$

Alors $f - K\left(\frac{z_1}{u_1}\right)^k f'$, section de M au-dessus de Δ', et $K\left(\frac{z_1}{u_1}\right)^k f''$, section de M au-dessus de Δ'', coïncident au-dessus de Δ, définissant une section f^* de M au-dessus de

$$\Delta' \cup \Delta'' = \{|z_1| < \rho_1 \ , \quad |z_i| < r_i\} \ , \quad 2 \leqslant i \leqslant n \ ,$$

telle que

$$|f - f^*| = \left|K\left(\frac{z_1}{u_1}\right)^k f'\right| \leqslant m\, K\left|\frac{z_1}{u_1}\right|^k \quad \text{pour} \quad |z_i| \leqslant r'_i \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ .$$

Soit $\varepsilon_1 = \inf\left(\frac{u_1}{2} \ , \ r'_1\right)$; alors on a :

$$|f - f^*| \leqslant \frac{mK}{2^k} \quad \text{pour} \quad |z_1| \leqslant \varepsilon_1 \ , \quad |z_i| \leqslant r'_i \ , \quad 2 \leqslant i \leqslant n \ .$$

Le lemme est démontré.

LEMME 2. - Soient G un domaine de C^m, et M un sous-faisceau analytique de A^q. Si, pour tout domaine U holomorphiquement complet contenu dans G, $H^1(U, M) = 0$, alors M est cohérent dans G.

DÉMONSTRATION du lemme 2.

i. Soient x un point de G, et Z_x un polydisque compact de centre x et de rayon r contenu dans G. Tout élément de M_x peut être approché arbitrairement, et uniformément dans un certain voisinage de x, par des sections de M au-dessus de Z_x, en vertu du lemme 1. Or le sous-module M'_x de A^p_x, engendré par les sections de M au-dessus de Z_x, est fermé pour la convergence uniforme dans un voisinage fixe de x. Donc tout élément de M_x appartient à M'_x, et $M_x = M'_x$. Ainsi, le A_x-module M_x est engendré par les sections de M au-dessus de Z_x.

ii. Soit y un point de G, tel que le polydisque compact Z_y, de centre y, de rayon r, soit contenu dans G ; le A_y-module M_y est engendré par les sections de M au-dessus de Z_y. Or, si y décrit un voisinage V assez petit de x, l'intersection des polydisques Z_y contient V ; donc, M est engendré, dans V, par ses sections au-dessus de V, c'est-à-dire est de type (A) dans V. D'après le théorème 3 sur les faisceaux analytiques cohérents, M est cohérent dans G.

LEMME 3. - Soient (X, A) un espace analytique, M un sous-faisceau analytique de A^q. Si, pour tout domaine U, holomorphiquement complet de X, $H^1(U, M) = 0$, alors M est cohérent.

DÉMONSTRATION du lemme 3. - Soient x un point de X, et V un voisinage de X, muni de la restriction $A|V$ du faisceau A, et identifié à un ensemble analytique dans un domaine G de C^n, muni du faisceau $A(V)$ des germes de fonction holomorphes induites sur V par les fonctions holomorphes dans G. Soit N le prolongement trivial de $M|V$ dans G ; c'est un sous-faisceau analytique de $A^q(G)$; soit W un domaine holomorphiquement complet contenu dans G ; $H^1(W, N) = H^1(W \cap V, M|V)$; $B \cap V$ est un ensemble ouvert de X, holomorphiquement complet ; donc $H^1(W \cap V, M|V) = 0$ et par suite $H^1(W, N) = 0$; d'après le lemme 2, N est cohérent dans G ; son image inverse $M|V$ est donc un faisceau cohérent dans V.

THÉORÈME 9. - Soit M un sous-faisceau analytique d'un faisceau analytique cohérent N sur un espace analytique (X, A). Si $H^1(U, M) = 0$ pour tout

<u>ouvert</u> U <u>holomorphiquement complet de</u> X , M <u>est cohérent.</u>

DÉMONSTRATION. - Localement, on a une suite exacte

$$0 \to I \to A^p \to N \to 0 \quad ,$$

et la suite exacte $0 \to M \to N$ permet de construire le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I & \to & A^p & \to & N & \to & 0 \\ & & \uparrow\downarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & I & \to & M' & \to & M & \to & 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où les lignes et les colonnes sont exactes.

A^p et N étant cohérents, I est cohérent ; donc, pour U holomorphiquement complet, on a la suite exacte :

$$0 \to H^1(U, M') \to H^1(U, M) \to 0$$

puisque $H^q(U, I) = 0$ pour $q > 0$; comme $H^1(U, M) = 0$ par hypothèse, $H^1(U, M') = 0$; mais M' est un sous-faisceau de A^q ; d'après le lemme 3 , M' est cohérent ; M , quotient de M' par le faisceau cohérent I , est cohérent.

3. Le faisceau distingué sur le produit d'un espace analytique et d'un espace projectif.

a. DÉFINITION du faisceau distingué. - Soit $Y \times P^n$ l'espace analytique, produit d'un espace analytique (Y , B) et de l'espace projectif complexe P^n à n dimensions ; on a défini un fibré distingué F_o sur P^n ; on désignera encore par F_o le fibré sur $Y \times P^n$, image inverse de F_o par la projection de $Y \times P^n$ sur P^n. On appellera faisceau distingué sur $Y \times P^n$ le faisceau F des germes de sections holomorphes de F_o ; c'est un faisceau libre.

b. PROPRIÉTÉ du faisceau distingué. - Si f désigne la projection de $Y \times P^n$ sur Y , il existe un isomorphisme naturel de $f_!(A^q \otimes \overset{k}{F})$ sur $A^{q(k+1)}$; il en résulte que le faisceau $f_!(A^q \otimes \overset{k}{F})$ est libre.

(On rappelle que A^q désigne la somme directe de q faisceaux identiques à A , et $\overset{k}{F}$ le produit tensoriel de k faisceaux identiques à F).

4. Enoncé des théorèmes fondamentaux de Grauert et Remmert (valables pour $n \geq 1$, $m \geq 0$). Les notations sont celles de 3 .

THÉORÈME I_n. - *Si* M *est un faisceau analytique cohérent sur* $Y \times P^n$ *, et* Q *un domaine relativement compact de* Y *, il existe un entier* $k_o(Q, M)$ *tel que le faisceau analytique cohérent* $M \otimes F^{-k} | Q \times P^n$ *soit simple relativement à la projection de* $Q \times P^n$ *sur* Q *, pour tout entier* $k \geqslant k_o$.

THÉORÈME II_n^m. - *Si* M *est un faisceau analytique cohérent sur* $Y \times P^n$ *,* $f_{m!}(M)$ *est un faisceau analytique cohérent sur* Y .

THÉORÈME III_n. - *Si* M *est un faisceau analytique cohérent sur* $Y \times P^n$ *, et* Q *un domaine relativement compact et holomorphiquement complet de* Y *, il existe un entier* $k_o(Q, M)$ *tel que le faisceau* $M \otimes F^{-k} | Q \times P^n$ *soit de type* (C) *pour tout entier* $k \geqslant k_o$.

Le théorème III_n est une conséquence facile des précédents et des théorèmes A et B relatifs à un espace analytique holomorphiquement complet. Cet exposé sera consacré à la démonstration des théorèmes I_n et II_n^m. Dans une première partie, seront démontrés, pour $n = 1$, le théorème I_n et un cas particulier II'_n de II_n^o :

THÉORÈME II'_n. - *Si* M *est un faisceau analytique cohérent sur* $Y \times P^n$ *, et* Q *un domaine relativement compact de* Y *, il existe un entier* $\ell_o(Q, M)$ *tel que* $f_!(M \otimes F^{-\ell})$ *soit cohérent sur* Q *, pour tout entier* $\ell \geqslant \ell_o$.

Pour démontrer le théorème I_1 , on démontrera le théorème suivant, dont il est une conséquence immédiate :

THÉORÈME I'_1. - *Soit* M *un faisceau analytique cohérent sur* $Y \times P^1$ *; pour tout point* y *de* Y *, il existe un voisinage* V *de* y *et un entier* $k_o \geqslant 0$ *, tels que :*

a. *si* $k \geqslant k_o$ *, il existe un nombre fini de sections de* $M \otimes F^{-k}$ *au-dessus de* $V \times P^1$ *, qui engendrent ce faisceau au-dessus de* $V \times P^1$.

b. *si* W *est un domaine holomorphiquement complet contenu dans* V *, la restriction de* $M \otimes F^{-k}$ *à* $W \times P^1$ *est un faisceau de type* (B) *pour tout entier* $k \geqslant k_o$.

Dans une seconde partie, les théorèmes I_n et II_n^m seront établis à l'aide d'un raisonnement par récurrence, utilisant de façon essentielle les éclatements de Hopf.

5. Modification des variétés, éclatements de Hopf.

On exposera seulement le processus de modification de P^n par éclatement en un point. Soit 0 l'origine de C^n ; P^{n-1} étant le quotient de $C^n - \{0\}$ par le groupe des homothéties de C^n, on a une application canonique de $C^n - \{0\}$ sur P^{n-1}, dont on désignera par G le graphe dans l'espace produit $X = C^n \times P^{n-1}$. Si $z_1 , z_2 , \dots , z_n$ sont les coordonnées dans C^n, et $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ des coordonnées homogènes dans P^{n-1}, on peut, dans un ouvert de X où x_1 ne s'annule pas, prendre pour coordonnées locales

$$z_1 , z_2 , \dots , z_n , x_2/x_1 , x_3/x_1 , \dots , x_n/x_1 ,$$

soit

$$z_1 , z_2 , \dots , z_n , y_2 , y_3 , \dots , y_n ,$$

qui munissent X d'une structure de variété analytique complexe à $2n - 1$ dimensions. Dans $(C^n - \{0\}) \times P^{n-1}$, G est défini par les équations $z_i = z_1 \times y_i$, $2 \leq i \leq n$; dans $C^n \times P^{n-1}$, ces $n - 1$ équations définissent une variété analytique X' à n dimensions, et $X' = G \cup (\{0\} \times P^{n-1})$. La composition des applications canoniques g de X sur C^n et f de X' dans X définit une application canonique h de X' sur C^n, vérifiant les propriétés suivantes :

i. $h^{-1}(0)$ est canoniquement isomorphe à P^{n-1} ;

ii. la restriction de h à G est un isomorphisme de G sur $C^n - \{0\}$;

iii. $h^{-1}(0)$ est une variété analytique non singulière de X', d'équation $z_1 = 0$, si l'on prend $z_1 , y_2 , \dots , y_n$ comme coordonnées dans X' ;

iv. h est propre (l'image réciproque d'un compact est un compact).

Plus généralement, si W est une variété analytique complexe de dimension n, et p un point de W, si on choisit un système de coordonnées locales au voisinage de p, et si l'on effectue l'opération précédente, le résultat ne dépend pas du choix des coordonnées locales. Prenons pour W l'espace P^n ; nous obtenons une variété analytique que nous désignerons par P^n_σ, et une application analytique π' de P^n_σ sur P^n ; $\sigma = \pi'^{-1}(p)$ est canoniquement isomorphe à P^{n-1}, donc à l'espace des droites de P^n passant par p, et π' est un isomorphisme sauf sur σ. En outre, l'application ρ' de P^n_σ sur σ, qui applique tout point de σ identiquement sur lui-même, et tout point de $P^n - \{p\}$ sur la droite qui le joint à p, considérée comme point de σ, munit P^n_σ d'une structure d'espace fibré, de base σ, de fibre P^1.

Si Y est un espace analytique, i l'application identique de Y sur lui-même, on pose :

$$\pi = i \times \pi' : \ Y \times P^n_\sigma \longrightarrow Y \times P^n$$

$$\rho = i \times \rho' : \ Y \times P^n_\sigma \longrightarrow Y \times \sigma$$

Pour établir par récurrence les théorèmes I_n et II^m_n, on considèrera le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & Y \times \sigma \arrow[dr, "\ell"] & \\ Y \times \sigma \arrow[r, "j"] & Y \times P^n_\sigma \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & & Y \times P^n \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

où j désigne l'inclusion, f la projection de $Y \times P^n$ sur Y, ℓ la projection de $Y \times \sigma$, isomorphe à $Y \times P^{n-1}$, sur Y.

II. Démonstration des théorèmes I_1 et II'_1

1. Un lemme sur les matrices holomorphes inversibles.

a. Recouvrement de $V \times P^1$ par deux ouverts holomorphiquement complets. - Soit y un point de Y, U' et V deux voisinages holomorphiquement complets de y, tels que V soit relativement compact dans U'. Soit z une coordonnée non homogène dans P^1, ε et ε' deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$.

On pose

$K'_1 = \{|z| < 1 + \varepsilon'\}$; $K'_2 = \{|z| > 1 - \varepsilon'\}$; $U'_i = U' \times K'_i$, $i = 1, 2$; $U'_{12} = U'_1 \cap U'_2$.

$K_1 = \{|z| < 1 + \varepsilon\}$; $K_2 = \{|z| > 1 - \varepsilon\}$; $U_i = V \times K_i$, $i = 1, 2$; $U_{12} = U_1 \cap U_2$.

Soit p_1 le point de coordonnée 0 dans P^1, et
soit p_2 le point de coordonnée ∞ dans P^1.

b. Enoncé du lemme.

NOTATIONS. - Si $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une (n, n)-matrice holomorphe dans le domaine D, on pose $|\mathcal{A}|_D = \sup\limits_{\substack{x \in D \\ 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}(x)|$; on a évidemment $|\mathcal{A}.\mathcal{B}|_D \leq n |\mathcal{A}|_D . |\mathcal{B}|_D$; on désigne par 1_n la (n, n)-matrice unité.

LEMME. - <u>Pour tout entier</u> $n > 0$, <u>il existe un nombre réel</u> $\varepsilon(n) > 0$ <u>tel que</u> : <u>pour toute</u> (n , n)-<u>matrice</u> $\mathcal{A}$, <u>holomorphe et vérifiant</u> $|\mathcal{A} - 1_n|_{\bar{U}_{12}} < \varepsilon$, <u>il existe deux notions inversibles</u> $\mathcal{A}_1$ <u>et</u> $\mathcal{A}_2$, <u>holomorphes dans</u> U_1 <u>et</u> U_2 <u>respectivement, telles que</u> $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1)^{-1}\mathcal{A}_2$ <u>dans</u> U_{12} .

c. <u>Préliminaire à la démonstration du lemme</u>. - <u>Il</u> existe un nombre réel $K \geqslant 1$, tel que : pour toute matrice $\mathcal{L}$, holomorphe sur $\bar{U}_{12}$, il existe une matrice $\mathcal{L}_i$, holomorphe sur $\bar{U}_i$, et vérifiant :

i. $|\mathcal{L}_i|_{\bar{U}_i} \leq K|\mathcal{L}|_{\bar{U}_{12}}$

ii. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1$ sur $\bar{U}_{12}$

On le montre en développant les éléments de $\mathcal{L}$ en série de Laurent dans $K_1 \cap K_2$. Alors on détermine $\varepsilon(n) > 0$ de telle sorte que :

i. $4n^2 K \varepsilon(x) < 1$

ii. toute (n , n)-matrice $\mathcal{B}_i$, holomorphe et vérifiant $|\mathcal{B}_i - 1|_{\bar{U}_i} < K\varepsilon$, admet une inverse $(\mathcal{B}_i)^{-1}$ vérifiant $|(\mathcal{B}_i)^{-1}|_{\bar{U}_{12}} < 2$. On suppose $|\mathcal{A} - 1|_{\bar{U}_{12}} < \varepsilon$.

d. DÉMONSTRATION du lemme. - On définit 3 suites $\mathcal{L}^j$, $\mathcal{L}_1^j$ et $\mathcal{L}_2^j$ de matrices de la façon suivante :

i. $\mathcal{L}^o$ est définie sur $\bar{U}_{12}$ par $\mathcal{A} = 1 + \mathcal{L}^o$, et, par hypothèse $|\mathcal{L}^o|_{\bar{U}_{12}} < \varepsilon$.

ii. Si $\mathcal{L}^j$ est définie et holomorphe sur $\bar{U}_{12}$, et vérifie $|\mathcal{L}^j|_{\bar{U}_{12}} < \frac{\varepsilon}{2^j}$, on détermine $\mathcal{L}_i^j$, holomorphe sur $\bar{U}_i$, de telle sorte que :

α) $|\mathcal{L}_i^j|_{\bar{U}_i} \leqslant K|\mathcal{L}^j|_{\bar{U}_{12}}$

β) $\mathcal{L}^j = \mathcal{L}_2^j - \mathcal{L}_1^j$ sur $\bar{U}_{12}$

Alors $1 + \mathcal{L}_2^j$ est inversible sur $\bar{U}_2$, car

$$|1 - (1 + \mathcal{L}_2^j)|_{\bar{U}_2} = |\mathcal{L}_2^j|_{\bar{U}_2} \leq K|\mathcal{L}^j|_{\bar{U}_2} < \frac{K\varepsilon}{2^j} < K\varepsilon ;$$

on a de plus

$$|(1 + \mathcal{L}_2^j)^{-1}|_{\bar{U}_{12}} < 2$$

iii. Si $\mathcal{L}^j$, $\mathcal{L}_1^j$ et $\mathcal{L}_2^j$ sont définis comme précédemment, on détermine $\mathcal{L}^{j+1}$ sur $\bar{U}_{12}$ par :

$$1 + \mathcal{L}^{j+1} = (1 + \mathcal{L}_1^j)(1 + \mathcal{L}^j)(1 + \mathcal{L}_2^j)^{-1} .$$

Il en résulte que :

$$1 + \mathcal{L}^{j+1} = (1 + \mathcal{L}_1^j + \mathcal{L}^j + \mathcal{L}_1^j \mathcal{L}^j)(1 + \mathcal{L}_2^j)^{-1}$$
$$= (1 + \mathcal{L}_2^j)(1 + \mathcal{L}_2^j)^{-1} + \mathcal{L}_1^j \mathcal{L}^j (1 + \mathcal{L}_2^j)^{-1} = 1 + \mathcal{L}_1^j \mathcal{L}^j (1 + \mathcal{L}_2^j)^{-1}$$

soit

$$\mathcal{L}^{j+1} = \mathcal{L}_1^j \mathcal{L}^j (1 + \mathcal{L}_2^j)^{-1}$$

d'où

$$|\mathcal{L}^{j+1}|_{\overline{U}_{12}} \leq 2n^2 K \, (|\mathcal{L}^j|_{\overline{U}_{12}})^2 < \frac{2n^2 K \varepsilon^2}{2^{2j}} < \frac{\varepsilon}{2^{2j+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} .$$

La relation de définition de $\mathcal{L}^{j+1}$ s'écrit encore :

$$1 + \mathcal{L}^{j+1} = \mathcal{a}_1^j \, \mathcal{G}(\mathcal{a}_2^j)^{-1} \quad \text{où } \mathcal{a}_i^j = \prod_{0 \leq h < j} (1 + \mathcal{L}_i^h) .$$

Quand j tend vers $+\infty$, $\mathcal{a}_i^j$ tend vers une matrice $\mathcal{a}_i$ holomorphe et inversible dans U_i, $\mathcal{L}^{j+1}$ tend vers 0, donc $1 = \mathcal{a}_1 \, \mathcal{G}(\mathcal{a}_2)^{-1}$.

C.Q.F.D.

2. <u>Démonstration du théorème</u> I_1'.

Les hypothèses sont celles de 1. a.

a. <u>Résolution du problème, correspondant à la partie a. du théorème, pour</u> $\overline{U}_1$ <u>et</u> $\overline{U}_2$. - $(U_i')_{i=1,2}$ est un recouvrement de Stein de $U' \times P^1$. D'après le théorème A, $H^o(U_i', M)$ engendre le faisceau M au-dessus de U_i'. Comme $\overline{U}_i$ est compact dans U_i', M est engendré, au-dessus de $\overline{U}_i$, par les éléments d'une $(t, 1)$-matrice $s_i = (s_i^j)_{1 \leq j \leq t}$ d'éléments de $H^o(\overline{U}_i, M)$, en vertu du théorème 6 sur les faisceaux analytiques cohérents ; en vertu du théorème 5, il existe deux (t, t)-matrices $a_i = (a_i^{j,h})_{\substack{1 \leq j \leq t \\ 1 \leq h \leq t}}$, $i = 1, 2$, holomorphes sur $\widehat{U}_{12}$, telles que $s_1 = a_2 \, s_2$ et $s_2 = a_1 \, s_1$.

b. <u>Prolongement approché de</u> s_1 <u>au-dessus de</u> $\overline{V} \times (\overline{K}_2 - \{p_2\})$ <u>et de</u> s_2 <u>au-dessus de</u> $\overline{V} \times (\overline{K}_1 - \{p_1\})$. - Soit δ un nombre positif.

En développant les éléments a_i^{jh} de a_i en séries de Laurent dans la couronne $\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2$, on obtient des fonctions $a_i'^{jh}$, éléments de **matrices** a_i', vérifiant les conditions suivantes :

i. a'_i est méromorphe sur $\bar{U}_i$

ii. $|a_i - a'_i|_{\bar{U}_{12}} < \delta$

iii. les éléments de a'_i n'admettent pour pôle que p_i, à un ordre majoré par $k_1(\delta)$.

Soit

$$s'_1 = a'_2\, s_2 \ , \quad s'_2 = a'_1\, s_1 \ .$$

Les éléments de s'_1 (resp. s'_2) sont des sections de M au-dessus de

$$\bar{V} \times (\bar{K}_2 - \{p_2\}) \quad (\text{resp. } \bar{V} \times (\bar{K}_1 - \{p_1\})) \ .$$

c. Compensation des pôles des éléments de s'_i. - Si $k \geqslant 2k_1$, $F^{\bar{k}}$ possède une section holomorphe f^k, qui ne s'annule qu'en p_1 et p_2, à un ordre au moins égal à k_1.

L'application $\varphi_k : M \longrightarrow M \otimes F^{\bar{k}} : s(x) \longrightarrow s(x) \otimes f^k(x)$ transforme les éléments de s'_i en sections de $M \otimes F^{\bar{k}}$ au-dessus de $\bar{U} - U_i$; nous désignerons encore par s_i et s'_i les transformés de s_i et s'_i ; comme φ_k est bijective hors des points p_o et p_1, les éléments de s_i engendrent $M \otimes F^{\bar{k}}$ dans $\bar{U}_i - \{p_i\}$; s'_i est un prolongement approché de s_i au-dessus de $U - U_i$, et l'on a :

$$s'_1 - s_1 = a'_2\, s_2 - a_2\, s_2 = (a'_2 - a_2)\, s_2 = (a'_2 - a_2) a_1\, s_1$$

$$s'_2 - s_2 = a'_1\, s_1 - a_1\, s_1 = (a'_1 - a_1) s_1$$

où $|a'_1 - a_1|_{\bar{U}_{12}} < \delta$ et $|(a'_2 - a_2)a_1|_{\bar{U}_{12}} < t|a_1|_{\bar{U}_{12}}\,\delta$.

d. Remplacement des sections approximatives par de vraies sections. - Posons

$$\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s'_2 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{S}_2 = \begin{pmatrix} s'_1 \\ s_2 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{A} = 1_{2t} - \begin{pmatrix} (a_2 - a'_2)a_1 & 0 \\ a_1 - a'_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Alors

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{A}\mathcal{S}_1 \ , \quad \text{où } |\mathcal{A} - 1|_{\bar{U}_{12}} < \sup(\delta\ , \ t|a_1|_{\bar{U}_{12}}\,\delta) \ .$$

Soit $\varepsilon > 0$, tel que le lemme sur les matrices holomorphes s'applique ; on choisit δ tel que $\sup(\delta\ , \ t|a_1|_{\bar{U}_{12}}\,\delta) < \varepsilon$; il existe alors une matrice $\mathcal{A}_i$ inversible, holomorphe dans U_i, telle que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2^{-1}\mathcal{A}_1$ dans U_{12}.

Alors on pose $\mathcal{S}'_i = \mathcal{a}_i \mathcal{S}_i$ dans U_i ; comme $\mathcal{S}'_1 = \mathcal{S}'_2$ dans U_{12}, on a ainsi défini sur un ensemble $\mathcal{S}$ de section de $M \otimes \overset{k}{F^-}$ au-dessus de $V \times P^1$, coïncidant avec $\mathcal{S}'_i$ dans ${}_kU_i$. Comme les matrices $\hat{\mathcal{a}}_i$ sont inversibles, ces sections engendrent $M \otimes F^-$ hors des points p_o et p_1.

e. Répétition du processus précédent. - On effectue la même construction avec des points singuliers p'_o et p'_1 différents de p_o et p_1, et pour $k \geqslant 2k_2$. Alors, pour $k \geqslant k_o = 2 \max(k_1, k_2)$, la réunion des sections construites au cours des deux processus engendre $M \otimes \overset{k}{F^-}$ sur $V \times P^1$.

f. Démonstration de la seconde partie de théorème I'_1. - Soit W un sous-domaine holomorphiquement complet de V. Pour prouver que $M \otimes \overset{k}{F^-}|W \times P^1$ est de type (B), il suffit de prouver que $H^1(W \times P^1, M \otimes \overset{k}{F^-}) = 0$, puisque $(W_i) = (W \times K_i)_{i=1,2}$ est un recouvrement de Stein de $W \times P^1$. Soit $W_{12} = W_1 \cap W_2$, et $\sigma \in H^o(W_{12}, M \otimes \overset{k}{F^-})$. En vertu du théorème 5 sur les faisceaux analytiques cohérents, $\mathcal{S}$ engendre $H^o(W_{12}, M \otimes \overset{k}{F^-})$.

Donc $\sigma = \sum_{1 \leq j \leq 2t} f^j \sigma^j$ où $\sigma^j \in \mathcal{S}$ et $f^j \in H^o(W_{12}, A)$.

En développant les f^j en série de Laurent, on obtient $f^j = f^j_2 - f^j_1$ où f^j_i est holomorphe dans W_i ; alors $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ où

$$\sigma_i = \sum_{1 \leq j \leq 2t} f^j_i \sigma^j \in H^o(W_i, M \otimes \overset{k}{F^-}) .$$

3. Le théorème II'_1.

a. Démonstration du théorème. - Le problème est de nature locale sur Y : il suffit de montrer que, pour tout point y de Y, il existe un voisinage V de y et un entier positif $\ell_o(V, M)$ tel que le faisceau $f_!(M \otimes \overset{\ell}{F^-})$ soit cohérent dans V pour $\ell \geqslant \ell_o(V, M)$. On choisit V comme dans 1. a. Alors, d'après la première partie du théorème I'_1, il existe un nombre fini de sections $s_1, \ldots, s_q$ de $M \otimes \overset{k_o}{F^-}$ au-dessus de $V \times P^1$, qui engendrent $M \otimes \overset{k_o}{F^-}$ dans $V \times P^1$ pour $k \geqslant k_o(V, M)$; le morphisme $A^q(V \times P^1) \to M \otimes \overset{k_o}{F^-}|V \times P^1$ engendré par ces sections est un épimorphisme ; soit N son noyau. La suite exacte :

$$0 \to N \to A^q \to M \otimes \overset{k_o}{F^-} \to 0$$

donne naissance à une suite exacte

$$0 \to N \otimes F^{-k} \to A^q \otimes F^{-k} \to M \otimes F^{-(k_0+k)} \to 0 \quad \text{pour} \quad k \geqslant 0 ,$$

puisque le faisceau F^{-k} est libre.

Comme N est cohérent, $f_{m!}(N \otimes F^{-k}) = 0$ pour $k \geqslant k_0(V , N)$ et $m > 1$, en vertu de la seconde partie de théorème I'_1 ; la suite exacte des foncteurs dérivés de $f_!$ se réduit donc à la suite exacte :

$$0 \to f_!(N \otimes F^{-k}) \to f_!(A^q \otimes F^{-k}) \to f_!(M \otimes F^{-(k_0+k)}) \to 0$$

Or :

i. $f_!(A^q \otimes F^{-k})$ est canoniquement isomorphe à $A^{q(k+1)}(V)$; donc $f_!(N \otimes F^{-k})$ est un sous-faisceau analytique de $A^{q(k+1)}(V)$.

ii. D'après la seconde partie du théorème I'_1 , pour tout domaine W , holomorphiquement complet, contenu dans V , $H^1(W \times P^1 , N \otimes F^{-k}) = 0$ pour $k \geqslant k_0(V , N)$; en vertu du même théorème, $N \otimes F^{-k}|W \times P^1$ est simple d'espèce (B) relativement à f ;

donc

$$H^1(W , f_!(N \otimes F^{-k})) = H^1(W \times P^1 , N \otimes F^{-k}) = 0 \quad \text{pour} \quad k \geqslant k_0(V , N) .$$

En vertu de la caractérisation cohomologique des faisceaux analytiques cohérents, $f_!(N \otimes F^{-k})$ est cohérent ; comme $f_!(A^q \otimes F^{-k})$, isomorphe à $A^{q(k+1)}(V)$, est cohérent, $f_!(M \otimes F^{-(k_0+k)})$ est cohérent.

Il est donc démontré que $f_!(M \otimes F^{-\ell})$ est cohérent pour

$$\ell \geqslant \ell_0(V , M) = k_0(V , M) + k_0(V , N) .$$

b. Corollaire. - Soient Y un espace analytique, G un domaine relativement compact dans C^n , E un ensemble analytique dans $Y \times C^n$, $E \subset Y \times G$, M un faisceau analytique cohérent sur $Y \times C^n$, nul dans $Y \times C^n - E$, f la projection $Y \times C^n \to Y$. Alors $f_!(M)$ est cohérent sur Y et $f_{m!}(M) = 0$ pour $m > 0$.

DÉMONSTRATION. - On plonge C^n dans l'espace de Osgood $\mathcal{O}^n = \underbrace{P^1 \times \dots \times P^1}_{n \text{ fois}}$; on prolonge M trivialement pour obtenir un faisceau $\hat{M}$ cohérent sur $\mathcal{O}^n$. On définit la projection $\lambda : Y \times \mathcal{O}^n \to Y$ en composant les projections :

$$Y \times \mathcal{O}^n \to Y \times \mathcal{O}^{n-1} \to Y \times \mathcal{O}^{n-2} \to \dots \to Y \times \mathcal{O}^1 \to Y ,$$

et on applique n fois le théorème $II_1^!$; $\hat{M}$ n'étant pas modifié par le produit tensoriel par M_0 , $f_!(M) = \lambda_!(\hat{M})$ est cohérent.

Si Q est un domaine holomorphiquement complet dans Y , $H^p(Q \times C^n , M) = 0$ pour $p > 0$ d'après le théorème B ; cela entraîne que M est simple d'espèce (B) relativement à f .

III. Démonstration des théorèmes I_n et II_n^m par récurrence.

On utilise le diagramme déjà construit :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & & Y \times \sigma \arrow[dr, "g"] & \\ Y \times \sigma \arrow[r, "i"] & Y \times P^n_\sigma \arrow[urr, "\rho"] \arrow[drr, "\pi"'] & & & Y \\ & & & Y \times P^n \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Pour étudier un faisceau $M \otimes F^{\overline{k}}$ sur $Y \times P^n$ (théorèmes d'ordre n), on relève ce faisceau par π sur $Y \times P_n^\sigma$, puis on étudie son image par φ (application fibrée localement triviale, donc, localement, théorèmes d'ordre 1) et ensuite par g (théorèmes d'ordre $n - 1$). Ainsi on déduit les théorèmes d'ordre n des théorèmes d'ordre 1 et $n - 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 61, 1944, p. 149-197.

[2] CARTAN (Henri). - Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 28-64.

[3] CARTAN (Henri). - Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles. 1953. - Paris, Masson, 1953 (Centre Belge de Recherches mathématiques) ; p. 41-55.

[4] GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Annalen, t. 129, 1955, p. 233-259.

[5] GRAUERT (H.) et REMMERT (R.). - Faisceaux analytiques cohérents sur le produit d'un espace analytique et d'un espace projectif, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 819-822.

[6] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Über den Begriff des komplexen Raumes, Math. Annalen (à paraître).

[7] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Bilder und Urbilder analytischer Garben (à paraître).

[8] OKA (Kiyoshi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VII : Sur quelques notions arithmétiques, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 1-27.

[9] Séminaire H. CARTAN, t. 4, 1951/52.

[10] Séminaire H. CARTAN, t. 6, 1953/54.

[11] SERRE (Jean-Pierre). - Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles. 1953. - Paris. Masson, 1953 (Centre Belge de Recherches mathématiques) ; p. 57-68.

[12] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[13] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, t. 6, 1955/56, p. 1-42.