Séminaire Lelong.
Analyse

François Norguet

Faisceaux et espaces annelés

Séminaire Lelong. Analyse, tome 1 (1957-1958), exp. n° 10, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1957-1958__1__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)
Année 1957/58
-:-:-:-

11 février 1958

(texte remis en décembre 1958)

FAISCEAUX ET ESPACES ANNELÉS

par François NORGUET

Dans le texte qui suit, et qui résume l'exposé oral, on suppose le lecteur familiarisé avec les notions générales concernant la théorie des faisceaux. Celles-ci sont bien connues et largement diffusées dans la littérature ([1] , [3] , [5]). Le but de cette rédaction est de fixer la terminologie utilisée dans l'exposé 11 de ce Séminaire et de préciser les notions moins classiques dans la théorie des faisceaux. Le contenu de cet exposé est très voisin de celui de la première moitié du mémoire de GRAUERT et REMMERT [2] , dont on entreprend ici l'étude, et dont les résultats essentiels feront l'objet de l'exposé 11.

Les anneaux considérés seront toujours des anneaux commutatifs avec élément unité, les modules seront unitaires, et les homomorphismes d'anneaux seront unitaires.

Dans cet exposé, seront considérées les catégories suivantes :

i. la catégorie $C_{X,a}$ des faisceaux d'anneaux sur un espace topologique X ;

ii. A étant un faisceau d'anneaux sur X , la catégorie $C^*_{X,A}$ (resp. $C_{X,A}$) des préfaisceaux (resp. faisceaux) de A-modules sur X ;

iii. la catégorie $C_{t,a}$ dont les objets sont les couples (X , A) où X est un espace topologique, et A un faisceau d'anneaux sur X .

Dans les catégories $C_{X,a}$, $C^*_{X,A}$ et $C_{X,A}$, la définition des morphismes est bien connue ; dans la catégorie $C_{t,a}$, un morphisme de (X , A) dans (Y , B) est un couple (f , g) où f est une application continue de X dans Y , et g une application continue de la partie de l'espace étalé associé à B , qui se projette sur $f(X)$, dans l'espace étalé associé à A (g étant assujettie en outre à certaines conditions connues).

1. Foncteurs dans les catégories $C_{X,A}$ et $C^*_{X,A}$.

Ces catégories sont abéliennes (au sens précisé dans l'exposé 9) ; tout faisceau appartenant à $C_{X,A}$ est sous-faisceau d'un faisceau injectif ; les sommes directes infinies et les produits directs infinis existent dans $C_{X,A}$. Le produit tensoriel dans $C_{X,A}$ est un foncteur additif, covariant par rapport à chaque facteur, et commutant avec la somme directe ; $M \otimes N$ est, par rapport à M, un foncteur exact à droite.

Le foncteur $P_{X,A}$ de $C_{X,A}$ dans $C^*_{X,A}$ qui à tout faisceau associe le préfaisceau correspondant, est exact à gauche. Le foncteur $Q_{X,A}$ de $C^*_{X,A}$ dans $C_{X,A}$, qui à tout préfaisceau associe un faisceau par le procédé connu de limite inductive, est exact. Le foncteur composé $Q_{X,A} \cdot P_{X,A}$ de $C_{X,A}$ dans $C_{X,A}$ est isomorphe au foncteur identité dans la catégorie de foncteurs $F(C_{X,A} , C_{X,A})$. Dans la catégorie $F(C^*_{X,A} , C^*_{X,A})$, il existe un morphisme canonique Φ du foncteur identité en le foncteur $P_{X,A} \cdot Q_{X,A}$; pour que $\Phi(M)$ soit un isomorphisme dans $C^*_{X,A}$, il faut et il suffit que $M \in P_{X,A}(C_{X,A})$.

Le faisceau A est un foncteur de la catégorie $\mathcal{X}$ des ouverts U de X (ordonnés par inclusion) dans la catégorie des anneaux ; on pose

$$\Gamma_X(A) = \Gamma(X , A) = A(X) \quad ;$$

un préfaisceau M appartenant à $C^*_{X,A}$ est un foncteur de $\mathcal{X}$ dans une catégorie abélienne ; le foncteur $\Gamma^*_{X,A}$ de $C^*_{X,A}$ dans la catégorie des $\Gamma(X , A)$-modules, défini par $\Gamma^*_{X,A}(M) = M(X)$, est exact ; le foncteur composé $\Gamma_{X,A} = \Gamma^*_{X,A} \cdot P_{X,A}$ de $C_{X,A}$ dans la catégorie des $\Gamma(X , A)$-modules, est exact à gauche.

Soient $H^p_{X,A}$ les foncteurs dérivés de $\Gamma_{X,A}$; si M est un faisceau appartenant à $C_{X,A}$, $H^p_{X,A}(M) = H^p(X , M)$ est appelé p-ième module de cohomologie de X, à coefficients dans M ; $H^p = 0$ si $p < 0$, $H^0 = \Gamma$ et toute suite exacte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

dans $C_{X,A}$ donne naissance à la suite exacte de cohomologie

$$\dots \to H^p(X , M') \to H^p(X , M) \to H^p(X , M'') \to H^{p+1}(X , M') \to \dots \quad .$$

Si U est un ouvert de X, la restriction $M|U$ de M à U est un faisceau appartenant à $C_{U,A|U}$. Le foncteur $\mathcal{P}^p_{X,A}(M)$, défini sur $\mathcal{X}$, qui à tout ouvert U de X associe le $\Gamma(U , A|U)$-module $H^p(U , M|U) = H^p(U , M)$, est un préfaisceau appartenant à $C^{*}_{X,A}$, appelé p-ième préfaisceau de cohomologie de X , à coefficients dans M . Les foncteurs $\mathcal{P}^{p}_{X,A}$ de $C_{X,A}$ dans $C^{*}_{X,A}$ sont les foncteurs dérivés de $P_{X,A}$, et vérifient $H^{p}_{X,A} = \Gamma^{*}_{X,A} \cdot \mathcal{P}^{p}_{X,A}$ puisque le foncteur $\Gamma^{*}_{X,A}$ est exact. Les foncteurs $\mathcal{H}^{p}_{X,A} = Q_{X,A} \cdot \mathcal{P}^{p}_{X,A}$ de $C_{X,A}$ dans $C_{X,A}$ sont les foncteurs dérivés de $Q_{X,A} \cdot P_{X,A}$ (isomorphe au foncteur identité dans $F(C_{X,A} , C_{X,A})$) puisque le foncteur $Q_{X,A}$ est exact ; ils sont donc nuls pour $p \neq 0$, et $\mathcal{H}^{o}_{X,A}$ est le foncteur identité de $C_{X,A}$ dans $C_{X,A}$.

2. Les images de faisceaux.

a. Les images directes.

DÉFINITION. - Soit, dans la catégorie $C_{t,a}$, un morphisme (f , g) de (X , A) dans (Y , B) . L'application f détermine un foncteur f^{*} de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}$; si M est un faisceau appartenant à $C_{X,A}$, le foncteur composé $M.f^{*}$ est, grâce à l'application g , un faisceau appartenant à $C_{Y,B}$; le foncteur $(f , g)_{!}$ de $C_{X,A}$ dans $C_{Y,B}$, défini par $(f , g)_{!}(M) = M.f^{*}$, est un foncteur covariant exact à gauche ; $(f , g)_{!}(M)$ est appelé faisceau image directe de M par (f , g) . Le foncteur composé $\mathcal{P}^{p}_{X,A}(M).f^{*}$ est un préfaisceau appartenant à $C^{*}_{Y,B}$; les foncteurs $(f , g)_{p!}$ de $C_{X,A}$ dans $C_{Y,B}$, définis par

$$(f , g)_{p!}(M) = Q_{Y,B}(\mathcal{P}^{p}_{X,A}(M).f^{*}) \quad ,$$

sont les foncteurs dérivés de $(f , g)_{!}$; $(f , g)_{p!}(M)$ est appelé p-ième faisceau image directe de M par l'application (f , g) .

PROPRIÉTÉS.

1. Les foncteurs $(f , g)_{p!}$ sont nuls pour $p < 0$, $(f , g)_{o!} = (f , g)_{!}$ et toute suite exacte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

dans $C_{X,A}$ donne naissance à la suite exacte des images directes

$$\dots \to (f , g)_{p!}(M') \to (f , g)_{p!}(M) \to (f , g)_{p!}(M'') \to (f , g)_{(p+1)!}(M') \to \dots$$

ii. Il existe un morphisme canonique du foncteur composé $H^p_{Y,B}\cdot(f , g)_!$ en le foncteur $H^p_{X,A}$ (abus de langage justifié puisque tout $\Gamma(X , A)$-module peut être considéré, grâce à g , comme un $\Gamma(Y , B)$-module) ; ce morphisme est un isomorphisme pour $p = 0$.

iii. Si (h , k) est un morphisme de (Y , B) dans (Z , C) , il existe un morphisme canonique du foncteur $(h , k)_{p!}\cdot(f , g)_!$ en le foncteur $((h , k)\cdot(f , g))_{p!}$; ce morphisme est un isomorphisme pour $p = 0$.

iv. Si (f , g) est l'application identique de (X , A) sur (X , A) , les foncteurs $(f , g)_{p!}$ sont identiques aux foncteurs $\mathcal{H}^p_{X,A}$, nuls pour $p \neq 0$; $(f , g)_!$ est le foncteur identité de $C_{X,A}$ dans $C_{X,A}$.

b. L'image inverse.

Soit (f , g) un morphisme de (X , A) dans (Y , B) ; si M est un faisceau appartenant à $C_{Y,B}$, on définit de façon naturelle son image inverse $(f , g)^!(M)$ dans $C_{X,A}$; $(f , g)^!$ est un foncteur covariant, exact à droite, de $C_{Y,B}$ dans $C_{X,A}$; il commute avec le produit tensoriel et la somme directe dans chacune de ces catégories.

c. Relations entre les deux images.

i. Il existe un morphisme canonique du foncteur $(f , g)^!\cdot(f , g)_!$ en le foncteur identité de $C_{X,A}$ dans $C_{X,A}$, et un morphisme canonique du foncteur $(f , g)_!\cdot(f , g)^!$ en le foncteur identité de $C_{Y,B}$ dans $C_{Y,B}$.

ii. Soient (f , g) un morphisme de (X , A) dans (Y , B) , et (h , k) un morphisme de (Y , B) dans (Z , C) ; on désignera (f , g) par f et (h , k) par h . Alors soit M un faisceau appartenant à $C_{X,A}$; soient : α_0 le morphisme canonique de $f^!(f_!(M))$ dans M (existant en vertu de (i)), α_1 le morphisme canonique de $h^!(h_!(f_!(M)))$ dans $f_!(M)$, et α_2 le morphisme canonique de $(h.f)^!((h.f)_!(M))$ dans M ; ces morphismes vérifient

$\alpha_2 = \alpha_0 . f^!(\alpha_1)$ dans la catégorie $C_{X,A}$.

3. Faisceaux, dans $C_{X,A}$, vérifiant des conditions spéciales.

a. Conditions globales.

DÉFINITIONS.- Un faisceau M appartenant à $C_{X,A}$ est dit :

i. de type (A) si, en chaque point x de X , l'image de $H^0(X , M)$ dans le A_x-module M_x engendre ce module ;

ii. de <u>type (B)</u> si $H^p(X, M) = 0$ pour $p \neq 0$;

iii. de <u>type (C)</u> s'il est en même temps de type (A) et de type (B) ;

iv. <u>globalement de type fini</u> s'il existe un nombre fini de sections dans $H^0(X, M)$ qui engendrent le A_x-module M_x en chaque point x de X.

PROPRIÉTÉ. - Pour que M soit <u>globalement de type fini</u>, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un quotient d'une somme directe A^p.

b. <u>Faisceaux flasques</u>.

DÉFINITION. - Un faisceau M est dit <u>flasque</u>, si pour tout ouvert U de X, l'application canonique de $\Gamma(X, M)$ dans $\Gamma(U, M)$ est surjective.

PROPRIÉTÉS.

i. Le fait pour un faisceau d'être flasque est une propriété <u>locale</u>.

ii. L'image directe d'un faisceau flasque par une application continue est un faisceau flasque ;

iii. Tout faisceau est un sous-faisceau d'un faisceau flasque.

iv. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte dans $C_{X,A}$ et si M' est flasque, $0 \to P_{X,A}(M') \to P_{X,A}(M) \to P_{X,A}(M'') \to 0$ est une suite exacte dans $C_{X,A}$; si, de plus, M est flasque, alors M'' est flasque.

c. <u>Faisceaux libres</u>.

DÉFINITION. - Un faisceau M est dit <u>libre</u> s'il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X tel que $M|U_i$ soit, pour $i \in I$, isomorphe à une somme directe $(A|U_i)^{p_i}$, $p_i \geqslant 1$; p_i est appelé <u>rang</u> de M dans U_i ; si X est connexe, p_i ne dépend pas de i ; sa valeur est appelée <u>rang</u> de M dans X.

PROPRIÉTÉS.

i. Si N est libre, $M \otimes N$ est, par rapport à M, un foncteur exact.

ii. Si (f, g) est un morphisme de (X, A) dans (Y, B), et si M est un faisceau libre dans $C_{Y,B}$, alors $(f, g)^!(M)$ est un faisceau libre dans $C_{X,A}$.

d. Faisceaux de type fini, faisceaux pseudo-cohérents et faisceaux cohérents.

DÉFINITIONS. - Un faisceau M appartenant à $C_{X,A}$ est dit :

i. de type fini si chaque point x de X admet un voisinage ouvert U tel que $M|U$ soit globalement de type fini (i.e. soit isomorphe à un quotient d'une somme directe $(A|U)^p$) ;

ii. pseudo-cohérent si chaque point x de X admet un voisinage ouvert U tel que $M|U$ soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme d'une somme directe $(A|U)^p$ dans une somme directe $(A|U)^q$;

iii. cohérent s'il est de type fini, et si, pour tout ouvert U de X, le noyau de tout homomorphisme d'une somme directe $(A|U)^p$ dans M est un faisceau de type fini dans $C_{U,A|U}$.

PROPRIÉTÉS.

i. Tout faisceau cohérent est pseudo-cohérent ; si le faisceau A est cohérent, les faisceaux cohérents dans $C_{X,A}$ sont les faisceaux pseudo-cohérents ; si A est cohérent, tout faisceau libre dans $C_{X,A}$ est cohérent, et les sous-faisceaux cohérents d'une somme directe A^p sont ceux de type fini.

ii. Si deux faisceaux sont cohérents dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

de faisceaux appartenant à $C_{X,A}$, le troisième est aussi cohérent ; il en résulte que l'image, le noyau et le conoyau d'un homomorphisme de faisceaux cohérents dans $C_{X,A}$ sont des faisceaux cohérents.

iii. Soit une suite exacte infinie

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_k \longrightarrow M_{k+1} \longrightarrow \dots$$

de faisceaux dans $C_{X,A}$; si les faisceaux M_{3i+1} et M_{3i+2} sont cohérents pour $i \geqslant 0$, les faisceaux M_{3i} sont cohérents pour $i \geqslant 0$; si les faisceaux M_{3i} et M_{3i+2} sont cohérents pour $i \geqslant 0$, les faisceaux M_{3i+1} sont cohérents pour $i \geqslant 0$.

iv. Une somme directe finie, un produit tensoriel de faisceaux cohérents sont des faisceaux cohérents.

v. L'annulateur d'un faisceau cohérent est un faisceau cohérent.

vi. Si (f , g) est un morphisme de (X , A) dans (Y , B) , et si A est cohérent, l'image inverse d'un faisceau cohérent dans $C_{Y,B}$ est un faisceau cohérent dans $C_{X,A}$.

e. <u>Faisceaux simples respectivement à un morphisme</u>.

DÉFINITIONS. - Soit (f , g) un morphisme de (X , A) dans (Y , B) ; un faisceau M appartenant à $C_{X,A}$ est dit :

i. <u>simple d'espèce</u> (A) relativement à (f , g) si le morphisme canonique de $(f , g)^!((f , g)_!(M))$ dans M est un épimorphisme ;

ii. <u>simple d'espèce</u> (B) relativement à (f , g) si $(f , g)_{p!}(M) = 0$ pour $p \neq 0$;

iii. <u>simple</u> relativement à (f , g) s'il est en même temps simple d'espèce (A) et simple d'espèce (B) relativement à (f , g) .

PROPRIÉTÉS relatives aux faisceaux <u>simples d'espèce</u> (A) :

i. Si Y est un point, les faisceaux de $C_{X,A}$ simples d'espèces (A) relativement à (f , g) sont les faisceaux de type (A) .

ii. Si $(f , g)_!(M)$ est de type (A) , et si M est simple d'espèce (A) relativement à (f , g) , alors M est de type (A) .

iii. Dans la situation de 2.c.ii. , si $(f , g)_!(M)$ est simple de type (A) relativement à (h , k) , alors les morphismes α_0 et α_2 ont des images isomorphes dans $C_{X,A}$; si M est simple de type (A) relativement à $(h , k).(f , g)$, M est simple de type (A) relativement à (f , g) .

PROPRIÉTÉS relatives aux faisceaux <u>simples d'espèce</u> (B) :

i. Si chaque point y de Y admet une base (U_i) de voisinages ouverts tels que les faisceaux $M|f^*(U_i)$ soient de type (B) , alors M est simple d'espèce (B) relativement à (f , g) . Si en particulier Y est un point, les faisceaux simples d'espèce (B) relativement à (f , g) sont les faisceaux de type (B) .

ii. Pour que M soit simple d'espèce (B) relativement à (f , g) , il faut et il suffit que, pour toute résolution flasque de M

$$0 \to M \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to \dots \to M_i \to \dots ,$$

$$0 \to (f , g)_!(M) \to (f , g)_!(M_0) \to \dots \to (f , g)_!(M_i) \to \dots$$

soit une résolution flasque de $(f , g)_!(M)$.

iii. Dans la situation de 2.a.iii. , si M est simple d'espèce (B) relativement à (f , g) , le morphisme canonique de $(h , k)_{p!}((f , g)_!(M))$ dans $((h , k).(f , g))_{p!}(M)$ (dans la catégorie $C_{Z,C}$) est un isomorphisme pour tout p ; il en résulte que, si M est simple d'espèce (B) relativement à (f , g) , la condition nécessaire et suffisante pour que M soit simple d'espèce (B) relativement à $(h , k).(f , g)$ est que $(f , g)_!(M)$ soit simple d'espèce (B) relativement à (h , k) .

iv. Si M est simple d'espèce (B) relativement à (f , g) , l'homomorphisme canonique de $H^p(Y , (f , g)_!(M))$ dans $H^p(X , A)$ est un isomorphisme pour tout p .

PROPRIÉTÉS relatives aux faisceaux <u>simples</u> :

i. Si Y est un point, les faisceaux simples relativement à (f , g) sont les faisceaux de type (C) .

ii. La notion de simplicité est transitive.

4. <u>Catégorie d'espaces annelés.</u>

a. <u>Données fondamentales pour la définition d'une catégorie d'espaces annelés.</u>

Soit T un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie $C_{t,a}$, tel que $T(X)$ soit un objet (X , A_X) de $C_{t,a}$; à tout espace topologique est donc associé un faisceau d'anneaux A_X sur cet espace, et, à toute application continue f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y , un morphisme (dans $C_{t,a}$) (f , g_f) de (X , A_X) dans (Y , A_Y) .

b. <u>Catégorie d'espaces annelés.</u>

Le foncteur T étant fixé, un espace annelé (relativement à T) sur l'espace topologique X est un objet (X , A) de $C_{t,a}$ tel que A soit un sous-faisceau de A_X (dans la catégorie $C_{X,a}$) ; un morphisme d'un espace annelé (X , A) dans un espace annelé (Y , B) est une application continue f de X dans Y , telle que $g_f(p^{-1}(f(X))) \subset A$, p désignant la projection sur Y de l'espace étalé associé à B ; la classe des morphismes d'espaces annelés (relativement à T) constitue une catégorie C_T . Si le foncteur T vérifie certaines conditions, qui seront en particulier réalisées pour la catégorie des espaces annelés complexes (cf. exposé 11) et si

i. (X , A) est un espace annelé, $(U , A|U)$ est, pour tout ouvert U de X , un espace annelé appelé restriction de l'espace annelé (X , A) à U ;

ii. (X , A) et (Y , B) sont deux espaces annelés, on définit un espace annelé $(X , A) \times (Y , B)$ sur le produit topologique $X \times Y$; c'est le couple $(X \times Y , C)$ où C est le sous-faisceau maximal (dans $C_{X\times Y,a}$) de $A_{X\times Y}$, tel que la projection canonique p (resp. q) de $X \times Y$ sur X (resp. Y) soit un morphisme (dans C_T) de $(X \times Y , C)$ dans (X , A) (resp. (Y , B)) ; $(X \times Y , C)$ est appelé produit topologique des espaces annelés (X , A) et (Y , B).

c. Faisceaux sur les espaces annelés.

Un faisceau sur l'espace annelé (X , A) est, par définition, un faisceau dans la catégorie $C_{X,A}$; si les conditions précédentes sont réalisées, et si M est un faisceau sur l'espace annelé (X , A), $M|U$ est, pour tout ouvert U de X, un faisceau sur la restriction à U de l'espace annelé (X , A). Un morphisme f d'un espace annelé (X , A) dans un espace annelé (Y , B) détermine un morphisme (f , g_f) (dans $C_{t,a}$) de (X , A) dans (Y , B), donc permet l'application de la théorie des images de faisceaux ; on appliquera toujours cette théorie en remplaçant, pour l'écriture, (f , g_f) par f.

5. Géométrie sur un espace annelé.

Sur tout espace topologique, on connaît la notion de germe de sous-ensemble ; on définit l'intersection et la réunion de deux germes en un point ainsi que la relation d'inclusion des germes.

Soit (X , A) un espace annelé, A étant un faisceau d'anneaux locaux noethériens ; si U est un ouvert de X, et s un élément de $\Gamma(U , A)$, on appelle ensemble distingué (principal) défini par s (dans U) l'ensemble des points x de U pour lesquels $s(x)$ est non inversible dans l'anneau local A_x ; plus généralement, si $(s_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\Gamma(U , A)$, on appelle ensemble distingué défini par cette famille (dans U) l'intersection des ensembles distingués (principaux) définis par les s_i pour $i \in I$.

Soit x un point de X, $(f_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de A_x ; on appelle germe d'ensemble distingué défini par cette famille, le germe de sous-ensemble E_x défini de la manière suivante : soient U un voisinage de x, et $(s_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\Gamma(U , A)$, tels que $s_i(x) = f_i$ pour tout $i \in I$; alors E_x est le germe de sous-ensemble défini en x par l'ensemble distingué défini dans U par la famille $(s_i)_{i \in I}$. Un germe de sous-ensemble au point x est dit germe d'ensemble distingué s'il est le germe d'ensemble distingué défini par une famille finie d'éléments de A_x .

Un sous-ensemble E de X est dit ensemble distingué s'il est fermé et si, pour tout point x de X, le germe de sous-ensemble défini par E en x est un germe d'ensemble distingué.

Soit E_x un germe d'ensemble distingué au point x, et soit $I(E_x)$ l'ensemble des éléments f de A_x tels que le germe d'ensemble distingué (principal) défini par f au point x contienne E_x ; $I(E_x)$ est un idéal de l'anneau A_x, appelé idéal associé au germe d'ensemble distingué E_x. Inversement, soit I un idéal de A_x ; puisque l'anneau A_x est noethérien, I est engendré par une famille finie $(f_i)_{i \in I}$ de ses éléments ; le germe E_x d'ensemble distingué défini par cette famille ne dépend que de I, non de la famille de générateurs $(f_i)_{i \in I}$; E_x est appelé germe d'ensemble distingué défini par l'idéal I.
Si E_x est un germe d'ensemble distingué au point x, le germe d'ensemble distingué défini par l'idéal $I(E_x)$ est E_x ; il en résulte que l'application de l'ensemble des germes d'ensembles distingués en x dans l'ensemble des idéaux de A_x, qui à tout germe E_x fait correspondre l'idéal $I(E_x)$, est injective ; elle est de plus décroissante ; comme A_x est noethérien, il en résulte que toute suite strictement décroissante de germes d'ensembles distingués au point x est finie.

L'intersection, la réunion de deux germes d'ensembles distingués sont des germes d'ensembles distingués, et $I(E_x \cup E'_x) = I(E_x) \cap I(E'_x)$. Un germe d'ensemble distingué E_x est dit réductible s'il existe deux germes d'ensembles distingués $E'_x \neq E_x$ et $E''_x \neq E_x$ tels que $E_x = E'_x \cup E''_x$. De la propriété ci-dessus pour les suites décroissantes de germes d'ensembles distingués, résulte que tout germe d'ensemble distingué E_x se décompose de manière unique en la réunion d'une famille finie $(E^i_x)_{i \in I}$ de germes d'ensembles distingués irréductibles, telle que $E^i_x \not\subset E^j_x$ pour $i \neq j$; les germes E^i_x, $i \in I$, sont appelés composantes irréductibles du germe E_x. Pour qu'un germe E_x d'ensemble distingué soit irréductible, il faut et il suffit que l'idéal $I(E_x)$ soit premier.

Soit E un ensemble distingué ; pour tout point x, soit E_x le germe d'ensemble distingué défini par E au point x ; l'ensemble $F(E) = \bigcup_{x \in X} I(E_x)$ est muni naturellement d'une structure d'espace étalé sur X, et définit un faisceau $I(E)$ sur l'espace annelé (X, A) ; le faisceau quotient $A/I(E) = A(E)$ a pour support E ; il munit E d'une structure naturelle d'espace annelé si T vérifie les conditions nécessaires.

6. Calcul de la cohomologie à l'aide d'un recouvrement.

Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de l'espace topologique X, et si M est un faisceau sur l'espace annelé (X, A), on définit les foncteurs de Čech $\check{H}^p_{\mathcal{U}, A}$; $\check{H}^p_{\mathcal{U}, A}(M) = \check{H}^p(\mathcal{U}, M)$ est appelé p-ième module de cohomologie de $\mathcal{U}$, à coefficients dans M. Par passage à la limite dans la famille des recouvrements de X, on obtient les foncteurs $\check{H}^p_{X,A}$; $\check{H}^p_{X,A}(M) = \check{H}^p(X, M)$ est appelé p-ième module de cohomologie de Čech de X, à coeffcients dans M. Il existe un morphisme canonique du foncteur $\check{H}^p_{X,A}$ en le foncteur $H^p_{X,A}$; ce morphisme est bijectif si $p = 0$ ou $p = 1$, injectif si $p = 2$. Si X est paracompact, c'est un isomorphisme quel que soit p ; on convient alors d'écrire H^p au lieu de $\check{H}^p$. Pour tout recouvrement $\mathcal{U}$, il existe un morphisme canonique du foncteur $H^p_{\mathcal{U},A}$ en le foncteur $H^p_{X,A}$. Si $\mathcal{U}$ est localement fini et si tous les faisceaux $M | \bigcap_{j \in J} U_j$, où J est un sous-ensemble fini de I, sont de type (B), le morphisme canonique de $H^p(\mathcal{U}, M)$ dans $H^p(X, M)$ est bijectif. Si I est un ensemble fini de k éléments, $H^p(X, M)$ est donc nul pour $p \geq k$. Dans certains cas, il est possible de déterminer un faisceau M' sur (X, A), tel que $M'|U_i$ et $M|U_i$ soient isomorphes pour tout $i \in I$, et que $H^p(X, M') = 0$ pour $p > 0$.

Un cas particulier de ce problème sera résolu dans l'exposé suivant en multipliant tensoriellement le faisceau M par une puissance tensorielle d'un faisceau distingué F. Ce faisceau F_o est défini de la manière suivante (1) sur l'espace projectif complexe à n dimension P^n ; tout plan analytique E à $n - 1$ dimensions dans P^n définit un diviseur, et donc un espace fibré analytique F_o sur P^n ; cet espace fibré, indépendant du choix de E, est appelé fibré distingué sur P^n. F, faisceau distingué sur P^n, est le faisceau des germes de sections holomorphes de F_o.

(1) Voir [2], [4] (Exposé 18) ou [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[2] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Bilder und Urbilder analytischer Garben, Annals of Math., series 2, t. 68, 1958, p. 393-443.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., 2e série, t. 9, 1957, p. 119-221.

[4] Séminaire H. CARTAN : Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes t. 6, 1953/54.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.