Séminaire Lelong.
Analyse

René Deheuvels

Espaces fibrés

Séminaire Lelong. Analyse, tome 1 (1957-1958), exp. n° 7, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1957-1958__1__A4_0>

ESPACES FIBRÉS

par René DEHEUVELS

1. Espaces fibrés au sens large.

Soient Y et X deux espaces topologiques munis éventuellement de structures (de variété différentiable, de variété analytique) et π une application continue ouverte (permise) de Y sur X, appelée Projection.

Si on appelle fibre au-dessus de $x \in X$, l'ensemble $\pi^{-1} x = Y_x$, on peut considérer que la décomposition de Y en fibres par π définit sur Y une "structure d'espace fibré" de base $X = Y/\pi$. Cette définition est très large, mais elle permet de définir les notions :

a. de morphisme d'un fibré Y dans un autre Y' : c'est une application continue Φ (permise) qui respecte les fibres et définit donc une application continue φ de $X = Y/\pi$ dans $X' = Y'/\pi'$; $\pi'\Phi = \varphi\pi$;

b. d'isomorphisme Φ de deux fibrés : Φ est bijectif, Φ et Φ^{-1} sont des morphismes ;

c. de produit de deux fibrés de même base X, Y_1 et Y_2. C'est le fibré $Y_1 \vee Y_2$: sous-ensemble du produit ensembliste : $Y_1 \times Y_2$ formé des couples (y_1 , y_2) tels que : $\pi_1 y_1 = \pi_2 y_2$, muni de l'application : $\pi(y_1 , y_2) = \pi_1 y_1 = \pi_2 y_2$ et des structures induites.

La fibre $(Y_1 \vee Y_2)_x$ est le produit $Y_{1,x} \times Y_{2,x}$ des fibres de Y_1 et Y_2 au-dessous de x ;

d. d'image réciproque d'un fibré Y' de base X' par une application continue φ de X dans X'. C'est le fibré $Y = \varphi^{-1}(Y')$ ainsi défini : Y est formé des points (x , y') du produit $X \times Y'$ tels que $\varphi x = \pi' y'$ muni des deux applications : la projection $\pi(x , y') = x$ sur X, et le morphisme $\Phi(x , y') = y'$ dans Y'.

La fibre $Y_x = Y'_{\varphi x}$.

e. de <u>section</u> d'un espace fibré Y au-dessus d'une partie A de sa base X : c'est une application continue (permise) γ de A dans Y telle que $\pi \circ \gamma$ soit l'identité sur A. L'ensemble des sections au-dessus de A est habituellement noté Γ_A.

f. <u>de loi de composition sur un fibré</u> Y, c'est un morphisme

$$Y \vee Y \to Y \qquad \text{(loi interne)}$$

ou :

$$L \vee Y \to Y \qquad \text{(loi externe) (}L\text{ fibré)}$$

induisant l'identité sur la base commune X.

EXEMPLE 1. - Y sera dit "fibré en groupes" dans le premier cas, si, sur chaque fibre la loi de composition est une loi de groupe, et si, en outre :

a. (Y^{-1}) varie continûment avec y,

b. il existe une section continue sur tout X qui, à chaque $x \in X$ fait correspondre l'élément neutre de la fibre $\pi^{-1} x$.

EXEMPLE 2.—Si L est fibré en groupes et Y muni de la loi externe : $L \vee Y \to Y$ telle que L_x agisse comme groupe d'opérateurs sur Y_x, Y est muni d'un "espace fibré en groupes d'opérateurs".

On peut obtenir ainsi des structures plus riches que celle d'espace fibré en se restreignant aux espaces fibrés avec opérateurs et en imposant aux morphismes de commuter avec les opérateurs (voir plus loin).

Parmi les espaces fibrés au sens large, les <u>faisceaux</u> sont ceux pour lesquels π est un <u>homéomorphisme local</u>.

Un espace fibré Y possède un <u>espace directeur</u> F si toutes les fibres sont isomorphes (pour les structures considérées) à un même espace F. Il est dit <u>trivial</u> si $Y = X \times F$ muni de la projection canonique sur X, et <u>localement trivial</u> si chaque point possède un voisinage U tel que l'espace fibré $\pi^{-1} U$ soit isomorphe à un fibré trivial : $U \times F$.

L'image réciproque d'un fibré d'espace directeur F a pour espace directeur F ; l'image réciproque d'un fibré localement trivial est localement triviale.

2. Espaces fibrés localement isomorphes.

L'étude d'un espace fibré au sens large comporte d'abord l'étude des singularités ponctuelles de la fibration. Si l'on se restreint aux problèmes purement globaux il est naturel d'éliminer la possibilité de singularités en supposant la fibration localement triviale.

Soit Y un espace fibré localement trivial de base X connexe : on peut dire qu'il est localement isomorphe au fibré trivial $X \times F$. Soient plus généralement Y un fibré (au sens large) localement isomorphe à un fibré Z, $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de la base X tel que, pour chaque U_i, on ait un isomorphisme $\psi_i : Y/U_i \to Z/U_i$, $u_{ji} = \psi_j \circ \psi_i^{-1}$ est un automorphisme de Z/U_{ij} $(U_{ij} = U_i \cap U_j)$, et vérifie :

$$(1) \qquad u_{ki} = u_{kj} \circ u_{ji} \qquad u_{ii} = \text{identité}.$$

Réciproquement la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X, et d'automorphismes u_{ji} de Z/U_{ij}, vérifiant (1) permet de construire un fibré Y localement isomorphe au fibré Z en recollant les morceaux Z/U_i de la façon suivante :

Dans l'espace $\sum Z/U_i$, identifions $y \in Z/U_i$ et $z \in Z/U_j$, si $z = u_{ji}\, y$, et munissons l'espace quotient Y obtenu de la projection naturelle sur X : la cohérence des identifications résulte de (1).

3. Faisceau d'automorphismes d'un espace fibré.

En tout point $x \in X$ de la base d'un fibré, un germe d'automorphisme de Y sera une classe d'automorphismes des fibrés Y/U, U voisinage ouvert quelconque de x, deux automorphismes de Y/U_1 et Y/U_2 de la classe coïncidant sur un même ouvert V : $U_1 \cap U_2 \supset V \ni x$. Les germes d'automorphismes de Y forment naturellement un faisceau de groupes et un automorphisme du fibré Y au-dessus d'un ouvert O peut être considéré comme une section de ce faisceau.

La collection des u_{ji} du paragraphe précédent est un 1-cocycle de Čech défini sur le recouvrement U_i à valeurs dans le faisceau des automorphismes de Z.

Si ce cocycle est un cobord, c'est-à-dire s'il existe sur chaque U_i un automorphisme α_i de Z/U_i tel que $u_{ji} = \alpha_j^{-1}\, \alpha_i$, alors Y est globalement isomorphe à Z, et réciproquement (car $\psi_j \cdot \psi_i^{-1} = \alpha_j^{-1} \cdot \alpha_i$ entraîne $\alpha_j\, \psi_j = \alpha_i\, \psi_i$: les $\alpha_i \psi_i$ se recollent pour donner un isomorphisme global).

Si deux cocycles, sur un même recouvrement $\{U_i\}$, définissant les fibrés Y et Y' sont homologues, c'est-à-dire s'il existe sur chaque U_i un automorphisme α_i de Z/U_i tel que: $u'_{ji} = \alpha_j^{-1} u_{ji} \alpha_i$, Y et Y' sont globalement isomorphes car

$$\psi_j^{-1}(\alpha_j \ \psi'_j) = \psi_i^{-1}(\alpha_i \ \psi'_i)$$

Les $\psi_i^{-1}(\alpha_i \psi'_i)$ se recollent pour donner un isomorphisme global de Y' sur Y.

Les classes d'espaces fibrés localement isomorphes à un fibré donné Z (équivalents s'ils sont globalement isomorphes) sont donc en correspondance biunivoque avec le premier ensemble de cohomologie de Čech à valeurs dans le faisceau des automorphismes de Z.

4. Espaces fibrés avec faisceau structural.

Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes opérant (à gauche ou à droite) fidèlement sur le fibré Y (l'application canonique de $\mathcal{G}$ dans le faisceau $\mathcal{F}$ de tous les automorphismes de Y est biunivoque).

Le couple $(\mathcal{G}, Y)$ [ou $(Y, \mathcal{G})$ si $\mathcal{G}$ opère à droite] est appelé espace fibré avec faisceau structural. Nous supposerons, pour fixer les notations, que $\mathcal{G}$ opère à gauche (on peut toujours se ramener à ce cas).

Un isomorphisme de $(\mathcal{G}, Y)$ sur $(\mathcal{G}', Y')$, fibrés de même base X, est un isomorphisme φ de Y sur Y' qui induit un isomorphisme Φ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}'$ par :

$$\varphi g \varphi^{-1} = \Phi g \in \mathcal{G}' \qquad \text{si } g \in \mathcal{G}$$

On a donc :

$$\varphi(g \vee y) = \Phi g \vee \varphi y .$$

Deux isomorphismes φ et ψ de $(\mathcal{G}, Y)$ sur $(\mathcal{G}', Y')$ sont équivalents, s'ils ne diffèrent que par des opérations de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, c'est-à-dire s'il existe : $g \in \mathcal{G}$ et $g' \in \mathcal{G}'$ tels que :

$$\psi = g' \varphi g \quad \text{et l'on écrit} \quad \psi \sim \varphi$$

(c'est bien une relation d'équivalence).

La condition d'équivalence peut encore s'écrire : $\psi \varphi^{-1} \in \mathcal{G}$ ou $\varphi \psi^{-1} \in \mathcal{G}'$.

En effet :

$$\psi\varphi^{-1} = g'\varphi g\varphi^{-1} \quad \text{et} \quad \varphi g\varphi^{-1} = \Phi g \in \mathcal{G}' .$$

Réciproquement, si

$$\psi\varphi^{-1} = g' , \qquad \psi = g'\varphi$$

Si

$$\psi = g'\varphi g , \qquad \Psi = G'\Phi G$$

où G et G' sont les automorphismes intérieurs de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ définis par g et g'.

$(\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)$ <u>sera dit localement isomorphe</u> à $(\underset{\sim}{\mathcal{G}}, Y)$, s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$, $i \in I$ de la base commune X, et pour chaque U_i un isomorphisme :

$$\varphi_i : (\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)|U_i \to (\underset{\sim}{\mathcal{G}}, Y)|U_i$$

tels que, sur chaque intersection

$$U_{ij} = U_i \cap U_j : \quad \varphi_i \sim \varphi_j'$$

(ce qui s'exprime par : $\varphi_i^{-1}\varphi_j \in \mathcal{H}$ sur U_{ij}).

Désignons par φ la collection $\{\varphi_i , U_i\}$ et appelons φ <u>un isomorphisme local de</u> $(\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)$ sur $(\underset{\sim}{\mathcal{G}}, Y)$: φ détermine le cocycle de Čech $V_{ij} = \varphi^{-1}\varphi_j$ à valeurs dans $\mathcal{H}$, (et un cocycle de Čech V_{ij} à valeurs dans les automorphismes intérieurs de $\mathcal{H}$).

Réciproquement, la donnée d'un 1-cocycle de Čech $\{V_{ij}\}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ définit un fibré $(\underset{\sim}{\mathcal{G}}, Y)$ localement isomorphe à $(\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)$.

(Y est défini par recollement au moyen du cocycle V_{ij} à partir de Z, et $\mathcal{G}$ est défini par recollement au moyen du cocycle associé $\{V_{ij}\}$ à partir de $\mathcal{H}$).

La définition d'un isomorphisme local nous conduit à considérer comme <u>équivalents</u> les isomorphismes locaux $\varphi = \{\varphi_i , U_i\}$ et $\psi = \{\psi_k , V_k\}$ de $(\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)$ sur $(\underset{\sim}{\mathcal{G}}, Y)$ tels que sur chaque intersection $U_i \cap V_k$: $\varphi_i \sim \psi_k$ ce qui exprime que la réunion des familles $\{\varphi_i , U_i\}$ et $\{\psi_k , V_k\}$ est encore un isomorphisme local. Cette équivalence revient à ne faire jouer aucun rôle au recouvrement U_i, sous réserve qu'il soit assez fin.

Deux isomorphismes locaux équivalents φ et ψ définis sur le même recouvrement $\{U_i\}$ ont des cocycles de Čech homologues. En effet, pour chaque

U_i : $\varphi_i^{-1}\psi_i = \alpha_i \in \mathcal{H}$ et si $v_{ij} = \varphi_i^{-1}\varphi_j$ et $w_{ij} = \psi_i^{-1}\psi_j$, on a la relation :

$$v_{ij} = \alpha_i^{-1} w_{ij} \alpha_j$$

$(\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)$ étant fixé, $(\underset{\sim}{\mathcal{G}}, Y, \varphi)$ désigne l'ensemble formé d'un fibré Y à faisceau structural $\mathcal{G}$ et d'un isomorphisme local φ de $(\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)$ sur $(\underset{\sim}{\mathcal{G}}, Y)$ et est appelé espace fibré localement isomorphe à $(\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)$ (l'isomorphisme local est donné dans la structure).

$(\underset{\sim}{\mathcal{G}}, Y, \varphi)$ et $(\mathcal{G}', Y', \varphi')$ sont dits équivalents, s'il existe un isomorphisme Θ de $(\underset{\sim}{\mathcal{G}}, Y)$ sur $(\mathcal{G}', Y')$ tel que $\Theta\varphi$ et φ' soient équivalents. Il est alors facile de voir que les classes d'équivalence des fibrés localement isomorphes à $(\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)$ sont en correspondance biunivoque avec l'ensemble de cohomologie de Čech : $H^1(X ; \mathcal{H})$.

5. Espaces fibrés avec espace fibré structural, avec groupe structural.

Soit E un espace fibré en groupes, de base X , qui opère continûment et fidèlement dans le fibré donné Y de même base X : $E \vee Y \to Y$. Le faisceau $\mathcal{E}$ des sections de E est donc un faisceau d'automorphismes de Y .

L'ensemble $(\underset{\sim}{E}, Y)$ est un espace fibré avec espace fibré structural (cette notion englobe la précédente, puisque E peut être un faisceau). En particulier, si E est un fibré trivial : $E = X \times G$, où G est un groupe topologique, G est dit groupe structural du fibré Y et $(\underset{\sim}{E}, Y)$ se note $(\underset{\sim}{G}, Y)$.

Les notions d'isomorphismes, d'isomorphismes équivalents, locaux, se définissent comme précédemment, et ne font intervenir que le faisceau $\mathcal{E}$ des sections de E . En particulier $(\underset{\sim}{E}, Y, \varphi)$ et $(\underset{\sim}{E}', Y', \varphi')$ localement isomorphes à $(\underset{\sim}{H}, Z)$ sont équivalents si et seulement si $(\mathcal{E}, Y, \varphi)$ et $(\mathcal{E}', Y', \varphi')$, localement isomorphes à $(\underset{\sim}{\mathcal{H}}, Z)$, le sont. Les classes d'équivalence des $(\underset{\sim}{E}, Y, \varphi)$ sont donc en correspondance biunivoque avec $H^1(X , \mathcal{H})$.

6. Espaces fibrés principaux.

Etant donné un espace fibré $(\underset{\sim}{E}, Y)$ de fibré structural E , les classes d'équivalence des fibrés qui lui sont localement isomorphes se déterminent uniquement à l'aide de E . On peut donc choisir, pour étudier cette classification, le plus simple parmi les fibrés Y qui admettent E comme fibré structural, c'est-à-dire E lui-même.

DÉFINITION. - Un fibré $(\underset{\sim}{F}, Y)$ localement isomorphe à $(\underset{\sim}{E}, E)$ est appelé fibré E-principal à gauche.

Remarquons bien que F est un espace fibré en groupes localement isomorphe à E , tandis que Y n'est pas fibré en groupes.

Mais E peut opérer sur lui-même à gauche et à droite, et nous n'avons utilisé dans la définition que les translations à gauche. Nous allons exploiter, maintenant, les opérations à droite.

THÉORÈME 1. - On peut faire opérer E à droite sur le fibré E-principal à gauche $(\underset{\sim}{F}, Y)$ de telle sorte que l'isomorphisme local φ de $(\underset{\sim}{E}, E)$ sur $(\underset{\sim}{F}, Y)$ soit permis pour les opérations à droite de E : φ est donc un isomorphisme local de $(\underset{\sim}{E}, E, \underset{\sim}{E})$ sur $(\underset{\sim}{F}, Y, \underset{\sim}{E})$ induisant l'identité sur le fibré opérant à droite. Les opérations à gauche et à droite sont compatibles (elles commutent).

PREUVE. - Définissons $(\varphi_i\, a) \vee b$ par $(\varphi_i\, a) \vee b = \varphi_i(a \vee b)$ sur U_i $(a, b \in E, \ \varphi_i\, a \in Y)$. Sur l'intersection $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $\varphi_i^{-1}\varphi_j = u_{ij}$ est une section de E , et

$$\varphi_j(a \vee b) = \varphi_i\, u_{ij}(a \vee b) = \varphi_i(u_{ij} \vee a \vee b) = \varphi_i(u_{ij} \vee a) \vee b = (\varphi_j\, a) \vee b \ .$$

La définition est donc cohérente. Les propriétés de continuité et de fidélité des opérations à droite sont évidentes ainsi que la compatibilité.

THÉORÈME 2. - Deux isomorphismes φ et φ' de $(\underset{\sim}{E}, E)$ sur un fibré E-principal à gauche $(\underset{\sim}{F}, Y)$ sont toujours équivalents.

PREUVE. - Il faut prouver que $\varphi'^{-1}\varphi$ est une section de E , et nous allons, pour cela, nous servir du théorème précédent.

Si $b \in E$, soient $x = \pi b$, et e_x l'élément neutre de $\pi^{-1} x$,

$$\varphi'^{-1}\varphi\, b = \varphi'^{-1}\varphi(e_x \vee b) = \varphi'^{-1}\varphi(e_x) \vee b = a_x \vee b$$

où $x \to a_x = \varphi'^{-1}\varphi(e_x)$ est une section continue de E .

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Soient $(\underset{\sim}{F}, Y)$ et $(\underset{\sim}{F'}, Y')$ deux espaces fibrés E-principaux à gauche. S'ils sont isomorphes, ils sont équivalents.

PREUVE. - L'énoncé signifie que, si θ est un isomorphisme de $(\underset{\sim}{F}, Y)$ sur $(\underset{\sim}{F'}, Y')$ et φ et φ' les isomorphismes locaux de $(\underset{\sim}{E}, E)$ sur $(\underset{\sim}{F}, Y)$ et $(\underset{\sim}{F'}, Y')$, $\theta\varphi$ est équivalent à φ'. Or, sur l'intersection $U_i \cap V_k$, $\theta\varphi_i$ et φ'_k sont deux isomorphismes de $(\underset{\sim}{E}, E)|U_i \cap V_k$ sur $(\underset{\sim}{F'}, Y')|U_i \cap V_k$ et sont donc équivalents d'après le théorème précédent.

THÉORÈME 3. - Réciproquement, si φ est un isomorphisme local de $(E, \underset{\sim}{E})$ sur $(Y, \underset{\sim}{E})$ induisant l'identité sur le fibré structural à droite $\underset{\sim}{E}$, il définit canoniquement un fibré structural F opérant à gauche sur Y et un isomorphisme local de $(\underset{\sim}{E}, E)$ sur $(\underset{\sim}{F}, Y)$ qui fait de $(\underset{\sim}{F}, Y)$ un espace fibré E-principal à gauche. Les opérations à gauche et à droite sont compatibles.

PREUVE. - Sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$, soit $u_{ij}(x) = \varphi_i^{-1}\ \varphi_j(e_x)$: c'est une section de E. Le cocycle $\{\mathcal{U}_{ij}\}$ associé, formé d'automorphismes intérieurs de E, définit par recollement le fibré F localement isomorphe à E et l'on a :

$$\varphi_i^{-1}\ \varphi_j(b) = \varphi_i^{-1}\ \varphi_j(e_x \vee b) = u_{ij}(x) \vee b$$

F est obtenu par recollement des $E|U_i$ et si Φ_i est l'isomorphisme de $E|U_i$ sur $F|U_i$: $\Phi_i\, c = \Phi_j\, d$ si $c = \mathcal{U}_{ij}\, d$.

Définissons les opérations de F dans Y par :

$$\Phi_i\, c \vee \varphi_i\, a = \varphi_i(c \vee a)\ .$$

Cette définition est bien cohérente, car si $\Phi_i\, c = \Phi_j\, d$ et $\varphi_i\, a = \varphi_j\, b$:

$$\begin{aligned}\Phi_j\, d \vee \varphi_j\, b &= \Phi_i\, \mathcal{U}_{ij}\, d \vee \varphi_i\, u_{ij}\, b = \varphi_i(\mathcal{U}_{ij}\, d \vee u_{ij}\, b)\\ &= \varphi_i(u_{ij} \vee d \vee u_{ij}^{-1} \vee u_{ij} \vee b) = \varphi_i(u_{ij} \vee d \vee b) = \varphi_j(d \vee b)\end{aligned}$$

φ est donc bien ainsi un isomorphisme local de $(\underset{\sim}{E}, E)$ sur $(\underset{\sim}{F}, Y)$ qui fait de celui-ci un fibré E-principal à gauche.

Les développements précédents nous conduisent naturellement à la définition suivante :

DÉFINITION. - <u>Un fibré</u> $(Y, \underset{\sim}{E})$ <u>localement isomorphe à</u> $(E, \underset{\sim}{E})$, <u>l'isomorphisme local induisant l'identité sur le faisceau structural à droite</u> $\underset{\sim}{E}$, <u>est appelé fibré</u> E-<u>principal à droite</u>.

Les théorèmes 1 et 3 prouvent qu'à tout espace fibré E-principal d'un type (à gauche ou à droite) est canoniquement associé un fibré E-principal symétrique. Il reste à prouver que l'on peut indifféremment considérer l'une ou l'autre des structures de fibrés E-principaux.

THÉORÈME 4. - Soient deux fibrés E-principaux à gauche et à droite : $(\underset{\sim}{F}, Y, \underset{\sim}{E})$ et $(\underset{\sim}{F'}, Y', \underset{\sim}{E})$, les structures à gauche et à droite étant compatibles. L'isomorphisme des fibrés d'un type, à gauche ou à droite, entraîne l'isomorphisme des fibrés de l'autre.

PREUVE. - Soient θ un isomorphisme de $(\underset{\sim}{F}, Y)$ sur $(\underset{\sim}{F'}, Y^{-1})$ et φ et φ' les isomorphismes locaux de $(\underset{\sim}{E}, E)$ sur $(\underset{\sim}{F}, Y)$ et $(\underset{\sim}{F'}, Y')$. D'après le corollaire du théorème 2, $\theta\varphi$ est équivalent à φ', donc :

$$\theta(\varphi_i\, y \vee b) = \theta.\varphi_i(y \vee b) = \varphi'_k(u_{ki} \vee y \vee b) = \varphi'_k(u_{ki} \vee y) \vee b$$
$$= \theta.\varphi_i(y) \vee b .$$

Réciproquement, soit θ un isomorphisme de $(Y, \underset{\sim}{E})$ sur $(Y', \underset{\sim}{E})$. Il faut construire, à partir de θ un isomorphisme Θ de F sur F', c'est-à-dire définir, pour tout élément $\Phi_i\, c$ de F un élément $\Phi'_k\, d$ de F', qui sera $\Theta\Phi_i\, c$, tel que :

$$\theta(\Phi_i\, c \vee \varphi_i\, b) = \theta\varphi_i(c \vee b) = \Phi'_k\, d \vee \theta\varphi_i\, b = \Theta\Phi_i\, c \vee \theta\varphi_i\, b .$$

Ce qui transforme en :

$$\theta\varphi_i(c \vee b) = \Phi'_k\, d \vee \varphi'_k\, \varphi'^{-1}_k\, \theta\varphi_i\, b = \varphi'_k(d \vee \varphi'^{-1}_k\, \theta\varphi_i\, b)$$

soit

$$\varphi'^{-1}_k\, \theta\varphi_i(c \vee b) = d \vee \varphi'^{-1}_k\, \theta\varphi_i\, b$$

Utilisons le fait que θ est un isomorphisme des fibrés à droite en posant :

$$a_{ki}(x) = \varphi'^{-1}_k\, \theta\varphi_i(e_x) \quad \text{(section de } E \text{ au-dessus de } U_i \cap V_k)$$

$$a_{ki}\, c\, b = d\, a_{ki}\, b \qquad \text{soit : } d = a_{ki}\, c\, a_{ki}^{-1}$$

En appelant α_{ki} l'automorphisme intérieur : $c \to a_{ki}\, c\, a_{ki}^{-1}$ de $E|U_i \cap V_k$, on voit que :

$$\Phi'_k\, d = \Theta\, \Phi_i\, c = \Phi'_k\, \alpha_{ki}\, c \;.$$

On vérifie aisément que cette définition est cohérente, et qu'elle détermine un isomorphisme de $(\underset{\sim}{F} , Y)$ sur $(\underset{\sim}{F}' , Y')$ compatible avec θ .

COROLLAIRE 1. - Les classes d'<u>équivalence</u> des fibrés E-principaux à gauche coïncident avec les classes d'isomorphismes des fibrés E-principaux à gauche d'après le théorème 2 et avec les classes d'isomorphismes des fibrés E-principaux à droite d'après le théorème 4.

COROLLAIRE 2. - Le fibré E-principal à gauche $(\underset{\sim}{F} , Y)$ est isomorphe à $(\underset{\sim}{E} , E)$ si et seulement si le fibré Y possède une section sur tout X .

PREUVE. - Si φ est un isomorphisme de $(\underset{\sim}{E} , E)$ sur $(\underset{\sim}{F} , Y)$, $x \to \varphi(e_x)$ est une section de Y , et réciproquement, si $x \to y_x$ est une section de Y , $b_x \to y_x \vee b_x$ est un isomorphisme des fibrés E-principaux à droite associés $(E , \underset{\sim}{E}) \to (Y , \underset{\sim}{E})$.

7. <u>Espace fibré principal associé à un fibré</u> (F , Y , φ) <u>localement isomorphe à</u> (E , Z) .

Dans le paragraphe qui précède, nous avons étudié les propriétés des fibrés principaux indépendamment des autres fibrés. Nous allons maintenant voir leur relation.

Définissons d'abord une opération : le E-<u>produit</u>. Soient $(\underset{\sim}{A} , S , \underset{\sim}{E})$ un E-fibré à droite et $(\underset{\sim}{E} , T , \underset{\sim}{B})$ un E-fibré à gauche. $S \vee_E T$ est un fibré du type $(\underset{\sim}{A} , S \vee_E T , \underset{\sim}{B})$ ainsi défini :

$S \vee_E T$ est l'espace quotient de $S \vee T$ par la relation d'équivalence $s\, c \vee t \sim s \vee c\, t$ si $c \in E$ (c'est une relation <u>ouverte</u>) muni d'opérateurs : $a(s \vee_E t) = as \vee t \bmod E$ et $(s \vee_E t)b = s \vee tb \bmod E$.

LEMME 1. - Etant donné un fibré : $(\underset{\sim}{E} , Z , \underset{\sim}{B})$, l'application canonique θ :

$$E \vee_E Z \to Z$$

qui, à $c \vee_E z$ fait correspondre cz , est un isomorphisme de $(\underset{\sim}{E} , E \vee_E Z , \underset{\sim}{B})$ sur $(\underset{\sim}{E} , Z , \underset{\sim}{B})$.

PREUVE. - L'application Θ est continue et ouverte. Elle est biunivoque car l'application $\gamma : z \to e_{\pi z} \vee_E z$ de Z dans $E \vee_E Z$ est telle que $\Theta\gamma$ et $\gamma\Theta$ soient l'identité : $\gamma = \Theta^{-1}$. C'est donc un isomorphisme puisqu'elle respecte les opérations à gauche de E et à droite de B .

LEMME 2. - Soient deux fibrés $(\underset{\sim}{F}, Y, \varphi)$ et $(\underset{\sim}{G}, T, \psi)$, φ et ψ les isomorphismes locaux de $(\underset{\sim}{E}, Z)$ sur $(\underset{\sim}{F}, Y)$ et $(\underset{\sim}{G}, T)$. Si les cocycles de φ et ψ sont identiques, $\psi\psi^{-1}$ est un isomorphisme de $(\underset{\sim}{F}, Y)$ sur $(\underset{\sim}{G}, T)$.

PREUVE. - Sur le recouvrement commun aux cocycles de φ et ψ , si $\theta_i = \psi_i \varphi_i^{-1}$ et $\theta_j = \psi_j \varphi_j^{-1}$, sur $U_i \cap U_j$, on a :

$$\theta_j = \psi_j \varphi_j^{-1} = \psi_j(\psi_i^{-1} \psi_j \varphi_j^{-1} \varphi_j) \varphi_i^{-1} = \psi_i \varphi_i^{-1} = \theta_i$$

Les θ_i se raccordent. De même pour les $\Theta_i = \Psi_i \Phi_i^{-1}$ de F sur G .

Ces deux lemmes permettent de prouver aisément le

THÉORÈME. - A tout 1-cocycle de Čech $\{v_{ij}\}$ à valeurs dans le fibré en groupes E correspond le fibré principal à droite P construit par recollement à partir de E et du cocycle $\{v_{ij}\}$. <u>L'opérateur</u> $P \vee_E$ <u>exprime complètement la construction par recollement à partir d'un</u> <u>E-fibré à gauche et du cocycle</u> $\{v_{ij}\}$: P détermine un isomorphisme local canonique ψ de cocycle $\{v_{ij}\}$ de $(\underset{\sim}{E}, Z)$ sur $(P \vee_E E', P \vee_E Z)$ où E' désigne E agissant sur lui-même par automorphismes intérieurs. Sur l'ouvert U_i du recouvrement de $\{v_{ij}\}$:

$$\psi_i : z \to e_{\pi z} \vee_E z \to p_i(e_{\pi z}) \vee_E z = \psi_i(z)$$

$$\Psi_i : a \to e_{\pi a} \vee_E a \to p_i(e_{\pi a}) \vee_E a = \Psi_i(a)$$

A tout fibré $(\underset{\sim}{F}, Y, \varphi)$ localement isomorphe à $(\underset{\sim}{E}, Z)$; on peut donc associer, par φ , un fibré E-principal à droite P et $(\underset{\sim}{F}, Y, \varphi)$ est canoniquement isomorphe à $(P \vee_E E', P \vee_E Z, \psi)$.

Deux fibrés localement isomorphes à $(\underset{\sim}{E}, Z)$ sont équivalents si et seulement si leurs fibrés principaux associés sont isomorphes.

8. <u>Règle de calcul des opérations à gauche</u>.

$P \vee_E E'$ opère dans $P \vee_E Z$ par : $(p \vee a).(p \vee z) = p \vee az$.

Le calcul d'un produit tel que $(r \vee a).(p \vee z)$ s'obtient en rendant d'abord égaux les coefficients de P, par exemple en cherchant l'unique élément $b \in E$ tel que $r\,b = p$, d'où :

$$(r \vee a).(p \vee z) = (rb \vee b^{-1}\,a\,b)(p \vee z) = (p \vee b^{-1}\,a\,b)(p \vee z) = p \vee b^{-1}\,a\,b\,z\,.$$

A un isomorphisme près, le théorème précédent montre que l'on peut toujours écrire un fibré $(F\,,\,Y\,,\,\varphi)$ localement isomorphe à $(E\,,\,Z)$ en mettant en évidence le fibré principal associé P, sous la forme $(P \vee_E E'\,,\,P \vee_E Z)$.

REMARQUES.

a. Chaque élément p de P définit un homéomorphisme de la fibre de Z située au-dessus de $x = \pi p$ sur la fibre de $P \vee_E Z$ au-dessus de x par : $z \to p \vee_E z$, et toute section σ de P au-dessus d'un ouvert O de X définit un homéomorphisme de $Z|O$ sur $P \vee_E Z|O$:

$$z \to \sigma(\pi z) \vee_E z\,.$$

b. De même, chaque élément z de Z définit une application continue ouverte de la fibre de P au-dessus de $x = \pi z$ dans la fibre de $P \vee_E Z$:

$$p \to p \vee_E z$$

qui n'est pas en général biunivoque.

c. Enfin, un morphisme f de $(P\,,\,\underset{\sim}{E})$ dans $(\underset{\sim}{E}\,,\,Z)$ définit une section σ de $P \vee_E Z$ et réciproquement . sur $f : p \to Z$ est donné, on pose : $\sigma_x = p \vee_E f(p)$ qui est indépendant de p, car $pa \vee_E f(pa) = pa \vee_E a^{-1} f(p) = p \vee_E f(p)$

Réciproquement, si σ est donnée, à $p \in P$, on fait correspondre l'unique z tel que $p \vee_E z = \sigma_x$.

9. <u>Extension et restriction du fibré structural.</u>

Soient H un sous-fibré en groupes d'un fibré en groupes E $(H \subset E)$, P un fibré E-principal, Q un fibré H-principal.

Un morphisme biunivoque de $(Q\,,\,\underset{\sim}{H})$ dans $(P\,,\,\underset{\sim}{H})$ est dit une <u>extension</u> de Q par P ou une <u>restriction</u> de P par Q.

<u>Le morphisme s'étend alors à un isomorphisme de</u> $Q \vee_H E$ <u>sur</u> $P = P \vee_E E$ qui applique $q \vee_H a$ sur $q \vee_E a$, <u>et de</u> $Q \vee_H Z$ <u>sur</u> $P \vee_E Z$, pour tout E-fibré

(E , Z) , qui applique $q \vee_H z$ sur $q \vee_E z$.

Etant donné un fibré $P_o \vee_E Z$, on dira que l'on peut restreindre son fibré structural à H , si l'une des conditions suivantes équivalentes est réalisée :

1° Si h est l'application canonique :

$$H^1(X , \mathcal{H}) \longrightarrow H^1(X ; \mathcal{E})$$

la classe du fibré $P_o \vee_E Z$ dans $H^1(X , \mathcal{E})$ appartient à l'image de h (comme h n'est pas, en général, biunivoque, cette classe est, en général, l'image de plusieurs classes de $H^1(X ; \mathcal{H})$).

2° Le cocycle de $P_o \vee_E Z$ est homologue (dans $\mathcal{E}$) à un cocycle à valeurs dans $\mathcal{H}$.

3° Il existe au moins un fibré E-équivalent à $P_o \vee_E Z$, de fibré principal P isomorphe à P_o dont le cocycle est à valeurs dans $\mathcal{H}$. Si Q est le fibré H-principal construit à partir du cocycle de P , il est clair que $Q \subset P$ et $P = Q \vee_H E$.

4° P_o est une extension d'un fibré H-principal Q .

REMARQUE. - $H \subset E$ opérant à droite dans un fibré E-principal R quelconque, soient R/H le fibré quotient et E/H le fibré des classes à gauche mod H , admettant la section canonique : $x \longrightarrow e_x$ (classe de l'élément neutre), <u>invariante par</u> H . L'application : $r \longrightarrow r \vee_E e_{\pi r}$ de R/H sur $R \vee_E (E/H)$ est un isomorphisme canonique.

5° Le fibré P_o/H admet une section.

En effet, si P_o est isomorphe à $Q \vee_H E$, P_o/H est isomorphe à $Q \vee_H E/H$ qui admet la section $x \longrightarrow q \vee_H e_x$ (indépendant de q).

Réciproquement, l'existence d'une section est équivalente à celle d'un H-morphisme de P_o dans (donc sur) E/H .

L'image réciproque de la section e est un fibré H-principal $Q \subset P$.

THÉORÈME. - Soient P un fibré E-principal et H un sous-fibré en groupes de E . $P \vee_E E'$ opère à gauche dans P .

Si Q et Q_1 sont deux fibrés H-principaux contenus dans P et isomorphes, leur isomorphisme s'étend à un automorphisme de P , section de $P \vee_E E'$. Deux H-restrictions de P sont donc isomorphes si et seulement si les sections de P/H

qu'elles déterminent se déduisent l'une de l'autre par l'opération à gauche (dans P/H) d'une section de $P \vee_E E'$.

PREUVE. - Identifions $Q \vee_H E$ à P et $Q \vee_H H$ à Q , et considérons l'isomorphisme donné de $Q \vee_H H$ sur Q_1 :

$$q \vee_H e \longrightarrow q \vee_H a_{x,q} \quad \text{où} \quad a_{x,q} \in E \text{ est uniquement déterminé.}$$

$$qh \vee_H e \longrightarrow qh \vee_H a_{x,qh} = q \vee_H h\, a_{x,qh} = (q \vee_H a_{x,q})h = q \vee_H a_{x,q}\, h$$

d'où :

$$a_{x,qh} = h^{-1}\, a_{x,q}\, h$$

ce qui définit un h-morphisme de Q dans E' , donc une section σ de $Q \vee_H E' = P \vee_E E$

$$\sigma_x = q \vee_H a_{x,q} \quad \text{(qui est bien indépendant de } q),$$

et l'automorphisme suivant de P :

$$q \vee_H b \longrightarrow \sigma_x.(q \vee_H b) = (q \vee_H a_{x,q}).(q \vee_H b) = q \vee_H a_{x,q}.b$$

Le reste s'en déduit immédiatement.

EXEMPLES.

1. THÉORÈME. - Restriction du fibré structural par relèvement : Soit H un sous-fibré en groupes localement trivial du fibré en groupes E sur X , (c'est-à-dire tel que le fibré $E \longrightarrow E/H$ soit "à sections locales" σ_i , il est alors localement isomorphe au fibré $E/H \vee H \longrightarrow E/H$ par : $a = \sigma_i(\dot{a})\, h \longleftrightarrow \dot{a}\ h$).

Si P est un fibré E-principal, h l'application : $P \longrightarrow P/H$, et f l'application : $P/H \longrightarrow X$, soient $E_1 = f^{-1}(E) = P/H \vee E$ et $H_1 = f^{-1}(H) = P/H \vee H$, $E_1 \supset H_1$ sont des fibrés en groupes sur P/H et l'image réciproque : $f^{-1}(P) = P/H$, P est un fibré E_1-principal sur P/H .

$f^{-1}(P)$ peut être restreint à H_1 car il contient le fibré $(P \longrightarrow P/H)$ par $p \longrightarrow p \vee p$, qui est H_1-principal.

PREUVE. - Tous les produits $\vee$ de l'énoncé sont naturellement pris par rapport à X et $f^{-1}(E)$ par exemple est muni de la projection : $p \vee a \longrightarrow \dot{p}$ sur P/H . Le relèvement de la carte locale de P et l'hypothèse sur H montrent bien que P est H_1-principal au-dessus de P/H .

2. Le théorème suivant est classique : si g est un sous-groupe du groupe topologique G tel que G/g soit homéomorphe à R^n , tout fibré de groupe structural G peut être restreint à g , si la base est localement compacte et paracompacte.