SÉMINAIRE SCHWARTZ

BERNARD MALGRANGE

Noyaux valeurs principales (fin)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n^{o} 6, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A6_0>

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

8 décembre 1959

NOYAUX VALEURS PRINCIPALES (fin)

par Bernard MALGRANGE

1. Dérivées des noyaux valeurs principales (v. p.).

Partons d'une fonction $k \in L^{\infty}(\Sigma_q)$, considérée dans le dernier exposé.

Comme dans l'exposé précédent, nous désignons par θk le noyau $k(x , x - y)$. On va calculer le noyau $\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta k)$.

D'une façon générale, soit $K(x , y)$ un noyau, et désignons par θK le noyau $K(x , x - y)$. Alors on a :

$$\frac{\partial \theta K}{\partial x_i} = \frac{\partial K}{\partial x_i}(x , x - y) + \text{ le noyau } \left\{ \varphi \longrightarrow \theta K \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\} .$$

En effet, cette formule est vraie pour une fonction $K(x , y)$ de classe C^{∞}, comme on le voit immédiatement en appliquant la formule de changement de variable. On voit que la formule reste valable quand $K(x , y)$ est une distribution en approchant $K(x , y)$ par les fonctions de classe C^{∞}.

THÉORÈME 1. - *Si* k *et* $\frac{\partial k}{\partial x_i} \in L^{\infty}(\Sigma_q)$, $1 < q < \infty$ *alors, pour chaque* p *avec* $q' \leq p < \infty$, θk *est de type* $H^{p,1} \longrightarrow H^{p,1}$, *et de type* $H^{p,-1} \longrightarrow H^{p,-1}$.

DÉMONSTRATION. - Il résulte aussitôt du théorème de l'exposé 5 et de la formule précédente que θk est de type $H^{p,1} \longrightarrow H^{p,1}$ pour $q' \leq p < \infty$.

Pour démontrer que θk est de type $H^{p,-1} \longrightarrow H^{p,-1}$, prenons $\varphi \in \mathcal{D}$. Ecrivons

$$\varphi = \varphi_0 + \Sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$$

avec $\varphi_i \in H^{p,0}$ et $\|\varphi_i\|_{p,0} \leq C \|\varphi\|_{p,-1}$.

Soit α_m une suite régularisante. Alors $\alpha_m * \varphi_i \in H^{p,\infty}$ et $\frac{\partial \alpha_m * \varphi_i}{\partial x_i} \in H^{p,\infty}$.

Par conséquent, on a pour $\psi \in H^{p',1}$

$$|\langle \theta k(\frac{\partial \alpha_m * \varphi_i}{\partial x_i}) , \psi \rangle| = |- \langle \theta k(\alpha_m * \varphi_i) , \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle - \langle \frac{\partial \theta k}{\partial x_i}(\alpha_m * \varphi_i) , \psi \rangle|$$

$$\leq c' \|\varphi_i\|_{p,0} \|\psi\|_{p',1}$$

$$\leqslant c'' \|\varphi\|_{p,-1} \|\psi\|_{p',1}$$

Comme

$$\theta k(\alpha_m * \psi_0) + \sum \theta k \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_m * \psi_i) = \theta k(\alpha_m * \varphi)$$

tend vers $\theta k(\varphi)$ on a

$$|\langle \theta k(\varphi) , \psi \rangle| \leqslant c \|\varphi\|_{p,-1} \|\psi\|_{p',1} \quad .$$

Il résulte de cette inégalité que θk est de type $H^{p,-1} \longrightarrow H^{p,-1}$, d'où le théorème.

Soit ${}^t\theta k$ le noyau transposé de θk. Ce noyau est défini par :

$${}^t\theta k(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \text{ (dans } \mathcal{D}' \text{) } \int_{|x-y|>\varepsilon} K(y , y - x) \varphi(y) \, dy + a(x) \varphi(x) \quad .$$

Par transposition, on voit que, sous les hypothèses du théorème, ${}^t\theta k$ est de type $H^{p,\ell} \longrightarrow H^{p,\ell}$ pour $|\ell| \leqslant 1$ et $1 < p \leqslant q$.

REMARQUE. - On démontre de même le résultat suivant : si k et ses dérivées d'ordre $\leqslant m$ sont dans $L^{\infty}(\Sigma_q)$ alors θk (resp. ${}^t\theta k$) est de type $H^{p,\ell} \longrightarrow H^{p,\ell}$ pour $|\ell| \leqslant m$ et $q' \leqslant p < \infty$ (resp. $1 < p \leqslant q$).

2. Calcul symbolique approximatif des noyaux v. p. (Préliminaires).

On va d'abord définir les espaces $\mathcal{B}^s(F)$ où F est un espace de Banach et $s \geqslant 0$. Pour $0 < s < 1$, $k \in \mathcal{B}^s(F)$ signifie que $k \in L^{\infty}(F)$, et que $\frac{k(x+y) - k(x)}{|y|^s}$ est un ensemble borné dans $L^{\infty}(F)$ (pour $y \in \underset{\sim}{R}^n$). Pour un entier $s \geqslant 0$, $k \in \mathcal{B}^s(F)$ signifie que k et ses dérivées d'ordre $\leqslant s$ appartiennent au $L^{\infty}(F)$. Enfin si $s \in R$, $s \geqslant 0$, écrivons $s = [s] + \{s\}$, $[s]$ désignant la partie entière de s. $k \in \mathcal{B}^s(F)$ signifie que $k \in \mathcal{B}^{[s]}(F)$ et les dérivées d'ordre $[s]$ de k sont dans $\mathcal{B}^{\{s\}}(F)$. Sur $\mathcal{B}^s(F)$ on a la norme :

$$\|f\|_{\infty, s} = \sum_{|k| \leqslant [s]} \|D^k f\|_{L^{\infty}(F)} + \sum_{|k|=[s]} \sup_y \left\| \frac{D^k[f(x+y) - f(x)]}{|y|^{\{s\}}} \right\|$$

(la dernière somme étant remplacée par 0 si s est entier).

Soit Ω la sphère unité. Soit

$$\mathcal{B}^s(\mathcal{D}_{\Omega}) = \bigcap_m \mathcal{B}^s(\mathcal{D}^m_{\Omega}) \quad ,$$

et soit $\mathcal{B}^s(\Sigma)$ défini par l'isomorphisme canonique $\Sigma \to \mathcal{D}_\Omega$ (cf. exposé 4, p. 3).

LEMME. - Soit $k \in \mathcal{B}^s(\mathcal{D}_\Omega)$, $s \geqslant 0$. On peut écrire

$$k(x , \omega) = \sum a_\ell(x)\, b_\ell(\omega)$$

avec

$$\sum \|a_\ell\|_{\infty, s}\, \|b_\ell\|_{\mathcal{D}^m(\Omega)} < +\infty \qquad (\ m \ \text{entier} \geqslant 0\ ) .$$

DÉMONSTRATION. - En utilisant une partition d'unité, on peut se restreindre au cas de $\mathcal{B}^s(\mathcal{D}_K)$ ou K est un compact dans R^{n-1} , donc au cas de $\mathcal{B}^s(\mathcal{D}_{T^{n-1}})$, T^{n-1} étant le tore de dimension $n - 1 = n'$. On a

$$k(x , y) = \sum C_q(x)\, e^{iq.y}$$

ou $q = (q_1 , \dots , q_{n'}) \in \mathbb{Z}^{n'}$, $y = (y_1 , \dots , y_{n'})$, $q.y = \sum q_i y_i$ et

$$C_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n'}} \int k(x , y)\, e^{-iq.y}\, dy \quad .$$

Montrons que cette décomposition répond à la question.

Par les formules

$$D_x^k\, C_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n'}} \frac{i^{|\ell|}}{q^\ell} \int D_x^k\, D_y^\ell\, k(x , y)\, e^{-iq.y}\, dy , \quad k = 0 , \dots , [s]$$

$$D_x^{[s]} \frac{C_q(x+h) - C_q(x)}{|h|^{\{s\}}} = \frac{1}{(2\pi)^{n'}} \frac{i^{|\ell|}}{q^\ell} \int \left\{ D_y^\ell\, D^{[s]} \frac{k(x+h),y) - k(x,y)}{|h|^{\{s\}}} \right\} e^{-iq.y}\, dy \quad .$$

On voit, en prenant D^ℓ jusqu'à l'ordre p , que

(a) $$\|C_q\|_{\infty, s} \leqslant \frac{\text{Constante}}{1 + (|q_1| + \dots + |q_{n'}|)^p}$$

Posons

$$a_q(x) = 1 + \{|q_1| + \dots + |q_{n'}|\}^m\, C_q(x)$$

$$b_q(y) = \frac{e^{-iq.y}}{1 + (|q_1| + \dots + |q_{n'}|)^m}$$

$\{b_q(y)\}$ est bornée dans $\mathcal{D}^m$. Par (a), on voit, en prenant p assez grand (par exemple $p = n$) , que

$$\sum \|a_q(x)\|_{\infty, s} < \infty \quad .$$

Par conséquent :

$$\sum \|a_q(x)\|_{\mathcal{D},s} \|b_q(y)\|_{\mathcal{D}^m(T^{n'})} < +\infty \quad .$$

COMPLÉMENT au lemme (qui sera utilisé accessoirement dans l'exposé 7). - En fait, la démonstration précédente montre que l'on peut prendre des a_ℓ et b_ℓ vérifiant

$$\sum \|a_\ell\|_{\mathcal{D},s} \|b_\ell\|_{\mathcal{D}^m(\Omega)} \leq C_{m,s} \|k\|_{\mathcal{B}^s[\mathcal{D}_\Omega^{m+n}]}$$

($C_{m,s}$ ne dépendant que de m et s).

Le lemme précédent est démontré dans [1] par décomposition en harmoniques sphériques. La démonstration que nous donnons ici est inspirée de celle du "théorème des noyaux" [3], auquel le lemme précédent est étroitement lié (cf. [2] ou [3]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[3] Séminaire SCHWARTZ, t. 1, 1953/54 : Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications. - Paris, Secrétariat mathématique, 1954.