SÉMINAIRE SCHWARTZ

BERNARD MALGRANGE

Multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ (suite)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 3, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A3_0>

18 novembre 1959

MULTIPLICATEURS DE $\mathcal{F}L^p$ (suite)

par Bernard MALGRANGE

1. Le théorème de Sobolev.

Considérons l'espace $\underset{\sim}{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ et un nombre réel γ tel que $0 < \gamma < 1$. La fonction $x \to \frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}}$ est localement intégrable, définit donc une distribution tempérée et on sait que $\mathcal{F}\frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}} = \frac{K}{|\xi|^{\gamma n}}$ (K, une constante).

THÉORÈME (SOBOLEV, [2]). - L'opérateur de convolution $\frac{1}{x^{(1-\gamma)n}} *$ est de type (p, q) dès que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \gamma$ et $1 < p < q < +\infty$ (i. e. lorsque $1 < p < \frac{1}{\gamma}$.)

Deux lemmes seront utiles pour la démonstration :

LEMME 1. - Si $f \in L^p$, on a l'inégalité

$$\left[\int_{\underset{\sim}{R}^n} [|\xi|^n \mathcal{F}f(\xi)]^p \frac{d\xi}{|\xi|^{2n}}\right]^{1/p} \leqslant C\|f\|_{L^p} \quad \text{pour} \quad 1 < p \leqslant 2 \quad .$$

(inégalité démontrée dans l'exposé numéro 1).

LEMME 2 (Marcel RIESZ). - Soient p et p' tels que $1 \leqslant p \leqslant 2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; l'application $\varphi \longrightarrow \mathcal{F}\varphi$ est alors de type (p, p').

En effet, pour $p = 1$ et $p = 2$, le résultat est immédiat ; le cas général résulte ensuite du théorème d'interpolation de Marcel RIESZ.

Donnons le principe de la démonstration du théorème :

a. En raisonnant comme à l'exposé numéro 2, on montre que $\frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}} *$ est de type $(1, \frac{1}{1-\gamma})$ faible.

b. Supposons le théorème acquis pour un couple (p, q) tel que $1 < p < \frac{1}{\gamma}$ et $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \gamma$. Par dualité, le théorème sera vrai pour le couple (q', p') où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ (en effet, cette fois, $\frac{1}{q'} - \frac{1}{p'} = \gamma$ et $1 < q' < \frac{1}{\gamma}$). On a $(p, q) = (q', p')$ si et seulement si $p = \frac{2}{1+\gamma}$, et lorsque p croît de 1 à $\frac{2}{1+\gamma}$, q' décroît de $\frac{1}{\gamma}$ à $\frac{2}{1+\gamma}$; il suffit donc de démontrer le théorème pour $1 < p \leqslant \frac{2}{1+\gamma}$.

c. Démonstration du théorème dans le cas $p = \frac{2}{1+\gamma}$, et donc $q = \frac{2}{1-\gamma}$: il faut montrer que $\left\| \frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}} * \varphi \right\|_q \leqslant C \|\varphi\|_p$.

Puisqu'on a $1 < q' < 2$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, il suffit donc (lemme 2) de démontrer que

$$\left\| \mathcal{F}\left[\frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}} * \varphi\right] \right\|_{q'} \leqslant C_1 \|\varphi\|_p \qquad ;$$

ou encore, q' étant égal à p , que $\left\| \frac{1}{|\xi|^{\gamma n}} \mathcal{F}\varphi \right\|_{\frac{2}{1+\gamma}} \leqslant C_2 \|\varphi\|_{\frac{2}{1+\gamma}}$,

inégalité qui est conséquence immédiate du lemme 1, puisque $1 < p = \frac{2}{1+\gamma} \leqslant 2$.

d. Résumons :

$$\frac{1}{|x|^{(1-\gamma)n}} * \quad \text{est de type } \left(1 , \frac{1}{1-\gamma}\right) \text{ faible}$$

$$\text{est de type } \left(\frac{2}{1+\gamma} , \frac{2}{1-\gamma}\right) .$$

Par le théorème de Marcinkiewicz, cet opérateur est donc de type (p , q) pour $1 < p < \frac{2}{1+\gamma}$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. - La démonstration qui précède est due à ZYGMUND [3].

2. Opérateurs intégraux singuliers.

Dans tout ce paragraphe, on désignera par Ω la sphère unité de R^n , et par $\mathcal{K}$ une fonction définie dans $R^n - \{0\}$, à valeurs complexes, satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $\mathcal{K}$ est positivement homogène de degré $-n$ dans $R^n - \{0\}$.
2. $\mathcal{K}(\omega)$ est intégrable sur la sphère Ω .
3. $\int_\Omega \mathcal{K}(\omega)\, d\omega = 0$.

1° On se propose de définir la distribution "valeur principale de $\mathcal{K}$" (v. p. de $\mathcal{K}$). Donnons-nous d'abord $\varepsilon > 0$, la boule fermée B_ε de centre 0 et de rayon ε et choisissons $\alpha \in \mathcal{D}(R^n)$, $\alpha = 1$ dans B_ε .

a. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ quelconque : $\varphi - \varphi(0)\alpha \in \mathcal{D}$ et, de plus, $\varphi - \varphi(0)\alpha = O(|x|)$ lorsque $x \to 0$. On en déduit que

$$\int_{R^n} \mathcal{K}(x)\, [\varphi(x) - \varphi(0)\, \alpha(x)]\, dx$$

a un sens.

b. L'intégrale $\int_{|x| \geqslant \varepsilon'} \mathcal{K}(x)\,\alpha(x)\,dx$ ne dépend pas de ε' , lorsque $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$: cela résulte de l'hypothèse $\int_{\Omega} \mathcal{K}(\omega)\,d\omega = 0$, et de l'homogénéité de $\mathcal{K}$. On posera :

$$\text{v. p.} \int_{\underset{\sim}{R}^n} \mathcal{K}(x)\,\alpha(x)\,dx = \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \mathcal{K}(x)\,\alpha(x)\,dx \quad .$$

c. Considérons enfin l'application

$$\varphi \to \int_{\underset{\sim}{R}^n} \mathcal{K}(x)\,[\varphi(x) - \varphi(0)\,\alpha(x)]\,dx + \varphi(0)\ \text{v. p.} \int_{\underset{\sim}{R}^n} \mathcal{K}(x)\,\alpha(x)\,dx$$

on démontre alors immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION.

1. α étant fixée, on définit ainsi une distribution k ;
2. Considérons, pour $\varepsilon > 0$, la distribution k_ε définie par

$$\langle k_\varepsilon , \varphi \rangle = \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \mathcal{K}(x)\,\varphi(x)\,dx$$

on a $k = \lim_{\varepsilon \to 0} k_\varepsilon$ dans $\mathcal{D}'$.

3. k ne dépend donc pas du choix de α .

DÉFINITION. - k s'appelle la distribution valeur principale associée à $\mathcal{K}$; l'opérateur de convolution $\varphi \to k * \varphi$ s'appelle opérateur intégral singulier associé à $\mathcal{K}$.

Dans la suite, pour $\varepsilon = 0$, on posera $k_0 = k$.

2° Le premier résultat concernant le type des opérateurs intégraux singuliers est donné par le théorème suivant:

THÉORÈME 1.(cf. [1]). - Soit p tel que $1 < p < +\infty$, et supposons $\mathcal{K}$ une fois continuement différentiable.

1. L'opérateur intégral singulier associé est de type (p , p) .
2. Les opérateurs $k_\varepsilon *$ sont de type (p , p) .
3. Les opérateurs $k_\varepsilon *$ forment, pour $\varepsilon > 0$ variable, un ensemble borné dans $\mathcal{L}(L^p , L^p)$ (muni de sa norme) ; ils convergent, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $k *$ dans l'espace $\mathcal{L}_c(L^p , L^p)$. (Les applications linéaires continues de L^p dans L^p , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts).

Grâce aux résultats de l'exposé numéro 2, il suffit de vérifier les propriétés suivantes :

1. Pour $\varepsilon \geqslant 0$, k_ε est une fonction localement intégrable dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

2. Les distributions $K_\varepsilon = \mathcal{F} k_\varepsilon$ forment, pour $\varepsilon \geqslant 0$, une partie bornée de L^∞_ξ .

3. Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, et tout $t > 0$, la relation $|y| \leqslant \frac{t}{2}$ entraîne

$$\int_{|x| \geqslant t} |k_\varepsilon(x - y) - k_\varepsilon(x)| \, dx \leqslant C$$

la condition 1 est trivialement vérifiée.

Vérification de la condition 2. - Choisissons $\beta \in \mathcal{D}$, $\beta = 1$ pour $|x| \leqslant 2$, $\beta = 0$ pour $|x| \geqslant 3$.

a. Cas où $\varepsilon = 0$. - k est un courant de degré 0 , homogène de degré $-n$; donc $\mathcal{F} k = K$ est homogène de degré 0 . Pour montrer que $K \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^n)$, il suffit donc de prouver que la restriction K' de K à $1 < |\xi| < 2$ est dans $L^\infty(1 < |\xi| < 2)$. Pour ce faire, écrivons $k = \beta k + (1 - \beta) k$.

1. βk est à support compact, donc $\mathcal{F}(\beta k)$ est analytique entière : sa restriction à $1 < |\xi| < 2$ est bien dans $L^\infty(1 < |\xi| < 2)$.

2. $(1 - \beta) k$ est une fois continuement différentiable dans $\mathbb{R}^n$; $\frac{\partial}{\partial x_i}[(1 - \beta) k]$ est continue, égale à $\frac{\partial k}{\partial x_i}$ si $|x| > 3$, donc est $O(\frac{1}{|x|^{n+1}})$ lorsque $|x| \to +\infty$: on en déduit $\frac{\partial}{\partial x_i}[(1 - \beta) k] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et finalement

$$\xi_i \, \mathcal{F}[(1 - \beta) k] \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^n) \quad \text{, d'où le résultat.}$$

b. Cas où $\varepsilon > 0$. - Les divers $\mathcal{F} k_\varepsilon$ étant déduits les uns des autres par homothétie, on peut supposer $\varepsilon = 1$. Soit donc k_1 , une fois continuement différentiable pour $|x| > 1$. Pour prouver que $\mathcal{F} k_1 \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^n)$, on écrit encore $k_1 = \beta k_1 + (1 - \beta) k_1$.

1. βk_1 est à support compact et bornée, donc $\beta k_1 \in L^1_x(\mathbb{R}^n)$ et par suite $\mathcal{F} \beta k_1 \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^n)$.

2. $(1 - \beta) k_1 = (1 - \beta) k$ car $1 - \beta = 0$ si $|x| < 2$, donc $(1 - \beta) k_1 = k - \beta k$.

On sait que $\mathcal{F} k \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^n)$ donc $\mathcal{F}(\beta k) = \mathcal{F}\beta * \mathcal{F} k \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^n)$.

Finalement $\mathcal{F}[(1 - \beta) k_1] = \mathcal{F} k - \mathcal{F}(\beta k) \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^n)$.

Vérification de la condition 3. -

a. Cas où $\varepsilon = 0$. - Par raison d'homogénéité de k on peut supposer $t = 1$. Soit donc $|x| \geqslant 1$ et $|y| \leqslant \frac{1}{2}$, et I le segment $[x , x - y]$. K est une fois continuement différentiable sur I , et donc

$$|\mathcal{K}(x - y) - \mathcal{K}(x)| \leqslant |y| \sup_{\substack{z \in I \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \left|\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_i}(z)\right| \leqslant \frac{C_2}{|x|^{n+1}}$$

puisque K est homogène de degré $-n$. (C_2 indépendant de x et y) D'où

$$\int_{|x| \geqslant 1} |\mathcal{K}(x - y) - \mathcal{K}(x)| \, dx \leqslant C_2 \int_{|x| \geqslant 1} \frac{dx}{|x|^{n+1}} \leqslant C \quad .$$

b. Cas où $\varepsilon > 0$. - On peut, par homothétie, supposer $\varepsilon = 1$ (mais t quelconque !) Fixons t et y et faisons une partition de l'ensemble des x tels que $|x| \geqslant t$:

Soit

$$O_1 = \{x \,;\, |x| \geqslant t \,,\, |x| > 1 \,,\, |x - y| > 1\}$$
$$O_2 = \{x \,;\, |x| \geqslant t \,,\, |x| > 1 \,,\, |x - y| \leqslant 1\}$$
$$O_3 = \{x \,;\, |x| \geqslant t \,,\, |x| \leqslant 1 \,,\, |x - y| > 1\}$$
$$O_4 = \{x \,;\, |x| \geqslant t \,,\, |x| \leqslant 1 \,,\, |x - y| \leqslant 1\}$$

- Sur O_1 : $k_1 = \mathcal{K}$ donc (cf. le cas $\varepsilon = 0$) $\int_{O_1} |k_1(x - y) - k_1(x)| \, dx \leqslant C_1$

-Sur O_2 : on a $|x| > 1$, $|x - y| \leqslant 1$, $|y| \leqslant \frac{t}{2}$ donc $1 < |x| \leqslant 1 + \frac{t}{2}$; et $|x| \geqslant t$; donc O_2 est vide si $t > 2$. Si $t \leqslant 2$, O_2 est contenu dans $1 \leqslant |x| \leqslant 2$; dans tous les cas

$$\int_{O_2} |k_1(x - y) - k_1(x)| \, dx \leqslant \int_{1 \leqslant x \leqslant 2} |\mathcal{K}(x)| \, dx \leqslant C_2 \quad .$$

-Sur O_3 : par un calcul analogue à celui fait pour O_2 , on trouve :

$$\int_{O_3} |k_1(x - y) - k_1(x)| \, dx \leqslant \int_{1/2 \leqslant |x| \leqslant 1} |\mathcal{K}(x)| \, dx \leqslant C_3$$

-Sur O_4 : $k_1(x) = 0$ et $k_1(x - y)$ aussi.

Donc

$$\int_{O_4} |k_1(x - y) - k_1(x)| \, dx = 0$$

on a donc

$$\int_{|x| \geqslant t} |k_1(x - y) - k_1(x)| \, dx \leqslant C = C_1 + C_2 + C_3 \quad \text{dès que} \quad |y| \leqslant \frac{t}{2} :$$

la condition 3 est satisfaite.

REMARQUE. - Les raisonnements précédents pourraient s'appliquer (avec des modifications de détail) si l'on supposait seulement que $\mathcal{K}(\omega)$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 0$. Nous ne nous y attarderons pas, car nous obtiendrons ultérieurement (cf. exposé numéro 4) des résultats plus précis par une autre méthode.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (Antoni). - On the existence of certain singular integrals, Acta Math., t. 88, 1952, p. 85-139.

[2] SOBOLEV (S.). - Ob odnog teoreme funkcionad'nogo anadiza, Mat. Sbornik (Recueil mathématique), N. S., t. 4 (46), 1938, p. 471-497.

[3] ZYGMUND (Antoni). - On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 35, 1956, p. 223-248.