Bernard Malgrange

Division des distributions. III : le théorème principal

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 23-24, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A23_0>

17 et 24 mai 1960

DIVISION DES DISTRIBUTIONS
III : LE THÉORÈME PRINCIPAL

par Bernard MALGRANGE

Introduction.

Soit Ω un ouvert contenu dans $\underset{\sim}{R}^n$; désignons par $\mathfrak{a}_\Omega$ l'anneau des fonctions analytiques réelles dans Ω, et par $\mathfrak{a}_a$ l'anneau des germes de fonctions analytiques réelles en $a \in \Omega$; pour $f \in \mathfrak{a}_\Omega$, nous noterons f_a $(\in \mathfrak{a}_a)$ le germe de f au point a (quelquefois, nous omettrons l'indice a si aucune confusion n'est possible).

Soient $f_{ij} \in \mathfrak{a}_\Omega$ $(1 \leq i \leq p\ ,\ 1 \leq j \leq q)$; posons $F_i = (f_{i1}, \ldots, f_{iq})$. Rappelons qu'une "relation (analytique) entre les F_i au point a" est un système $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ de germes appartenant à $\mathfrak{a}_a$ tels qu'on ait : $\sum_i \gamma_i F_{ia} = 0$ [1].

Puisque $\mathfrak{a}_a$ est noethérien, le $\mathfrak{a}_a$-module $\mathfrak{M}_a$ des relations entre les F_i en a possède un système fini de générateurs $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^m$; soient $G^1, \ldots, G^m$ $[G^\ell = (g_1^\ell, \ldots, g_p^\ell)\ ,\ 1 \leq \ell \leq m]$ un système de fonctions analytiques au voisinage de a, tels qu'on ait : $G_a^\ell = \Gamma^\ell$. Rappelons le résultat suivant, que nous utiliserons (proposition 2) :

THÉORÈME d'Oka (voir [1] ou [4]). - Pour tout $b \in \Omega$ assez voisin de a, les G_b^ℓ $\mathfrak{a}_b$-engendrent $\mathfrak{M}_b$.

Cela rappelé, voici le théorème que nous allons démontrer :

THÉORÈME 1 ("Division des distributions"). - Soient $T_1, \ldots, T_p$ des distributions appartenant à $\mathcal{D}'_\Omega$ (resp. $\mathcal{E}'_\Omega$) ; pour qu'il existe $S_1, \ldots, S_q \in \mathcal{D}'_\Omega$ (resp. $\mathcal{E}'_\Omega$) vérifiant, $\forall\ i : \sum_j f_{ij} S_j = T_i$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

$(C\ ;\ f_{ij})$ $\forall\ a \in \Omega$, pour toute relation $(g_1, \ldots, g_p)$ entre les F_i au voisinage de a, on a $\sum g_i T_i = 0$ au voisinage de a.

---

[1] Si les γ_i sont des fonctions analytiques dans un voisinage de a (resp. dans Ω), on parlera de même de "relations au voisinage de a" (resp. "relations dans Ω").

REMARQUES.

1° Les énoncés relatifs à $\mathcal{E}'_\Omega$ et $\mathcal{D}'_\Omega$ se ramènent immédiatement l'un à l'autre (partition de l'unité).

2° Les "théorèmes A et B " de la théorie des faisceaux analytiques cohérents montrent qu'il suffirait, à la place de (C) , de la condition suivante, en apparence plus faible :

"Si $(g_1, \ldots, g_p)$ est une relation entre $F_1, \ldots, F_p$ dans Ω , on a $\sum g_i T_i = 0$ " .

Nous n'aurons pas à nous servir de ce fait.

1. Remarques sur la condition (C) .

A. Munissons $\mathcal{A}_\Omega$ de la topologie de limite inductive des espaces de fonctions holomorphes dans les voisinages ouverts complexes de Ω (ces derniers espaces étant, comme d'habitude, munis de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact), et désignons par $\mathcal{A}'_\Omega$ le dual faible de $\mathcal{A}_\Omega$. Evidemment, on a $\mathcal{E}'_\Omega \subset \mathcal{A}'_\Omega$, et le théorème de Hahn-Banach entraîne immédiatement le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - *Les systèmes* $(\sum_j f_{ij} S_j)$, $S_j \in \mathcal{E}'_\Omega$ *sont* $[\mathcal{A}'_\Omega]^p$*-denses dans les* $(T_1, \ldots, T_p) \in [\mathcal{E}'_\Omega]^p$ *qui vérifient* $(C ; f_{ij})$.

Nous aurons besoin d'une forme renforcée de cette proposition : donnons-nous, outre les F_i , des fonctions $h_\ell \in \mathcal{A}_\Omega$ $(1 \leq \ell \leq m)$, et envisageons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sum_j f_{ij} S_j = T_i , & \forall\ i \\ h_\ell S_j = 0 , & \forall\ (j , \ell) \end{cases} .$$

Nous dirons que $(T_1, \ldots, T_p)$ vérifie la condition $(C' ; f_{ij} ; h_\ell)$ si le système formé de $T_1, \ldots, T_p$ et qm fois 0 vérifie (C ; nouveau système). Nous avons alors :

PROPOSITION 1 bis. - *Les systèmes* $(\sum_j f_{ij} S_j)$ *avec* $S_j \in \mathcal{E}'_\Omega$ *et* $h_\ell S_j = 0$ $(1 \leq j \leq q , 1 \leq \ell \leq m)$ *sont* $[\mathcal{A}'_\Omega]^p$*-denses dans les systèmes* $(T_1, \ldots, T_p) \in [\mathcal{E}'_\Omega]^p$ *qui vérifient* $(C' ; f_{ij} ; h_\ell)$.

Pour ne pas alourdir les notations, nous supposerons $m = 1$, et écrirons h pour h_1. Raisonnons par dualité : Soit $(g_1, \dots, g_p)$ un système de fonctions $\in \mathfrak{a}_\Omega$ telles que, $\forall (S_1, \dots, S_q) \in [\mathcal{E}'_\Omega]^q$ vérifiant, $\forall (j, \ell)$, $h_\ell S_j = 0$, on ait : $\sum_{i,j} f_{ij} g_i S_j = 0$; tout revient à démontrer que l'on a $\sum g_i T_i = 0$ lorsque $(T_1, \dots, T_p)$ vérifie $(C' ; f_{ij} ; h_\ell)$. Il suffit d'établir ce résultat au voisinage de tout point $a \in \Omega$; et, pour cela, d'établir qu'il existe $(\varphi_1, \dots, \varphi_q) \in \mathfrak{a}_a$ tels que $(g_1, \dots, g_p, \varphi_1, \dots, \varphi_q)$ soit une relation en a entre $F_1, \dots, F_p$, $(h, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, h)$; autrement dit que $\sum g_i F_i$ est dans le sous-$\mathfrak{a}_a$-module de $[\mathfrak{a}_a]^q$ engendré par $(h, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, h)$.

D'après un théorème classique de KRULL (voir par exemple [6]), il suffit, $\forall r \in \underset{\sim}{N}$, d'établir la propriété précédente modulo les fonctions nulles ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq r$ en a, autrement dit dans l'espace des développements limités à l'ordre r en a. Or ce dernier espace est de dimension finie, et son dual est l'espace des distributions d'ordre $\leq r$ de support a : notre assertion résulte donc immédiatement, par dualité, de l'hypothèse (appliquée à des S_j, distributions d'ordre $\leq r$ de support a).

B. Reprenons les hypothèses du théorème 1 ; soit W un fermé $\subset \Omega$ et supposons que $(T_1, \dots, T_p)$ vérifie la condition $(C ; f_{ij})$ dans $\Omega - W$; supposons en outre qu'il existe $h_1, \dots, h_m \in \mathfrak{a}_\Omega$ tels que, $\forall (i, \ell)$, on ait $h_\ell T_i = 0$.

PROPOSITION 2. - Ω_1 <u>étant un ouvert relativement compact dans</u> Ω, <u>il existe</u> $r \in \underset{\sim}{N}$ <u>tel que, dans</u> $\Omega_1 - W$, $(T_1, \dots, T_p)$ <u>vérifie</u> $(C' ; f_{ij} ; h_\ell^r)$. (Notons qu'en général, on ne peut pas prendre $r = 1$).

En raisonnant par récurrence sur m, on se ramène immédiatement à $m = 1$, et on écrit encore h pour h_1. Par Borel-Lebesgue, il suffit, $\forall a \in \overline{\Omega}_1$, de démontrer le résultat dans un voisinage ouvert de a ; pour cela, établissons le lemme suivant :

LEMME 1. - <u>Il existe</u> $r \in \underset{\sim}{N}$ <u>tel que les relations en</u> a <u>entre</u> $F_1, \dots, F_p$, $(h^r, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, h^r)$ <u>soient engendrées par</u>

1° <u>Les relations où les</u> q <u>derniers coefficients sont nuls</u> (i. e. les relations entre $F_1, \dots, F_p$).

2° Les relations où les p premiers coefficients sont divisibles par h .

Le lemme 1 entraîne bien la proposition 2 puisque, d'après le théorème d'Oka il sera encore vrai avec le même r en tout point b d'un voisinage ouvert Ω_a de a ; et, pour un tel r , la proposition 2 est alors évidemment vraie dans $\Omega_a - W$.

Pour démontrer le lemme, introduisons, $\forall\ s \in \underset{\sim}{N}$ le sous $\mathfrak{A}_a$-module $\mathfrak{M}_s$ de $[\mathfrak{A}_a]^q$ formé des $(\varphi_1 , \dots , \varphi_q)$ tels que $(\varphi_1\, h_a^s , \dots , \varphi_q\, h_a^s)$ soit dans le $\mathfrak{A}_a$-module engendré par $F_1 , \dots , F_p$; on a évidemment $\mathfrak{M}_s \subset \mathfrak{M}_{s+1}$; comme $\mathfrak{A}_a$ est noethérien, la suite des $\mathfrak{M}_s$ est stationnaire, d'où l'existence d'un entier r tel qu'on ait $\mathfrak{M}_{r-1} = \mathfrak{M}_r$: et r répond à la question, comme on le vérifie aussitôt.

2. Distributions portées par une sous-variété.

Soit $\mathfrak{U}$ un ouvert borné de $\underset{\sim}{R}^k$ $(0 \leq k \leq n)$, et $X_{k+\ell}$ des fonctions continues dans $\mathfrak{U}$ $(1 \leq \ell \leq n - k)$; considérons la sous-variété localement fermée V de $\underset{\sim}{R}^n$ définie par les équations :

$$x_{k+\ell} = X_{k+\ell}(x_1 , \dots , x_k) \quad .$$

Nous utiliserons les notations suivantes $x = (x_1 , \dots , x_n)$, $\operatorname{pr} x = x' = (x_1 , \dots , x_k)$, $x'' = (x_{k+1} , \dots , x_n)$, $X = (X_{k+1} , \dots , X_n)$, $\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U} \times \underset{\sim}{R}^{n-k}$.

Supposons les $X_{k+\ell}$ bornées et appartenant $\mathcal{E}_{\mathfrak{U}}$ (cf. exposé 21), et soit T une distribution d'ordre fini dans $\tilde{\mathfrak{U}}$, de support contenu dans V ; on sait que T se décompose en une somme finie de dérivées par rapport à x'' d'extensions à $\tilde{\mathfrak{U}}$ de distributions appartenant à $\mathcal{D}'_V$ [5] ; plus précisément (en prenant $x_1 , \dots , x_k$ comme coordonnées sur V) : il existe des distributions $\Theta_s \in \mathcal{D}'_{\mathfrak{U}}$ $(s \in \underset{\sim}{N}^{n-k})$, nulles sauf un nombre fini, telles que, si l'on définit $\tilde{\Theta}_s \in \mathcal{D}'_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ par la formule

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathfrak{U}}} , \qquad \langle \tilde{\Theta}_s , \varphi \rangle = \langle \Theta_s , \varphi(x' , X(x')) \rangle$$

on ait

$$T = \sum_s D_{x''}^s\, \tilde{\Theta}_s \quad . \tag{1}$$

On vérifie facilement que les Θ_s sont uniques, et sont donnés par

$$(2) \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}_{\mathcal{U}} , \qquad \langle \Theta_s , \varphi \rangle = \langle T , \frac{1}{s!}[X(x') - x'']^s \varphi(x') \rangle$$

Si maintenant f est une fonction appartenant à $\mathcal{E}_{\tilde{\mathcal{U}}}$, la décomposition de fT résulte immédiatement des formules suivantes :

$$(3) \qquad f\, \tilde{\Theta}_s = \widetilde{f(x' , X(x'))}\ \Theta_s \qquad \text{(évident)}$$

$$(4) \qquad f(D^r_{x''} \tilde{\Theta}_s) = \sum_{\ell} (-1)^{|\ell|} \binom{r}{\ell} D^{r-\ell}_{x''}[(D^{\ell}_{x''} f).\tilde{\Theta}_s] \qquad (r , \ell \in \underset{\sim}{N}^{n-k}) \quad .$$

(Conséquence facile de la formule de Leibniz, voir dans [3] le détail des calculs).

Supposons en outre $T \in \mathcal{P}'_{\tilde{\mathcal{U}}}$ (cf. exposé 21) ; comme V est borné, T est nécessairement d'ordre fini, et le résultat précédent s'applique. De plus, des formules (1) et (2), on déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 3. - "$T \in \mathcal{P}'_{\tilde{\mathcal{U}}}$" $\Longleftrightarrow$ "$\forall\ s$, $\Theta_s \in \mathcal{P}'_{\mathcal{U}}$" .

(Pour démontrer cette propostion, on utilise le critère d'appartenance à $\mathcal{P}'_{\mathcal{U}}$, exposé 21, page 4. Nous laissons les détails au lecteur).

REMARQUE importante. - Si l'on suppose en outre les $X_{k+\ell}$ quasi-höldériennes, tout $T \in \mathcal{P}'_{\mathcal{U}}$, à support dans V , admet un prolongement $\bar{T} \in \mathcal{D}'_{\underset{\approx}{R}^n}$ à support dans $\bar{V}$. En effet, on sait que T admet un prolongement à support dans $\bar{V} \cup b\tilde{\mathcal{U}}$; la dernière hypothèse impliquant que $\bar{V}$ est régulièrement séparé de $b\tilde{\mathcal{U}}$, il suffit d'appliquer le théorème 2, exposé 21.

3. Démonstration du théorème 1.

Nous allons établir un résultat un peu plus fort (en apparence ; il résulterait facilement du théorème 1 et de la proposition 2) :

THÉORÈME 1 bis. - Conservons les notations du théorème 1 ; soient V et W deux sous-ensembles analytiques de Ω , et supposons ceci :

1° $(T_1 , \dots , T_p) \in [\mathcal{D}'_{\Omega}]^p$ a son support dans V .

2° $(T_1 , \dots , T_p)$ vérifie $(C ; f_{ij})$ dans $\Omega - W$.

Alors, il existe $(S_1 , \dots , S_q) \in [\mathcal{D}'_{\Omega}]^q$, à support dans V , tel que, dans $\Omega - W$, on ait $\sum_j f_{ij} S_j = T_i$.

Il suffit de démontrer ce théorème au voisinage de tout point de Ω ; nous nous placerons donc dans la suite dans un voisinage ouvert de 0, que nous noterons encore Ω et que nous restreindrons (explicitement ou non) chaque fois que cela sera nécessaire.

Soit V_0 le germe de V en 0, et posons $\dim V_0 = k$. Si $k = -1$, i. e. si $V_0 = \emptyset$, le théorème est trivial ; nous allons donc le démontrer par récurrence, en le supposant acquis pour $0, \dots, k-1$.

On peut évidemment, en remplaçant au besoin W par $V \cap W$, supposer qu'on a $W \subset V$; montrons qu'on peut aussi supposer $\dim W_0 < k$: soit en effet V_0' la réunion des composantes irréductibles de V_0 qui sont contenues dans W_0, et V_0'' la réunion des autres composantes irréductibles de V_0 ; et soit V' (resp. V'') un représentant de V_0' (resp. V_0'') dans Ω ; on peut écrire :

$$(T_1, \dots, T_p) = (T_1', \dots, T_p') + (T_1'', \dots, T_p''),$$

les T' (resp. les T'') ayant leur support dans V' (resp. V'') [exposé 21, théorème 2, et exposé 22, corollaire 2]. Il suffit de remplacer V par V'', W par $W \cap V''$, et les T par les T'' pour se ramener à la situation cherchée.

Ceci posé, nous allons établir le résultat suivant :

(R) <u>Il existe un ensemble analytique</u> $U \subset V$, <u>avec</u> $W \subset U$, $\dim U_0 < k$ <u>et</u> $(S_1, \dots, S_q) \in [\mathcal{D}_\Omega']^q$ <u>tel que, dans</u> $\Omega - U$, <u>on ait</u> : $\sum_j f_{ij} S_j = T_i$. Alors, nous serons ramenés au théorème 1 bis pour U, lequel est vrai par hypothèse de récurrence, et le théorème sera démontré.

Pour établir (R), nous pouvons supposer V_0 <u>irréductible</u>, par un raisonnement de décomposition des T analogue à celui qui vient d'être fait ; reprenons alors, après avoir fait éventuellement un changement linéaire de coordonnées, les notations de l'exposé 22, paragraphe 2 (sauf que E est noté ici V_0 et $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_0$). Soit Ω' un voisinage ouvert de 0 dans $\underset{\sim}{R}^k$; si Ω' est assez petit, il existe un voisinage ouvert de 0 dans $\underset{\sim}{R}^{n-k}$, soit Ω'' tel qu'on ait $\Omega' \times \Omega'' \subset \Omega$ et que l'ensemble des $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in \underset{\sim}{R}^{n-k}$, solution de

$$P(x_{k+1}\,;\, x_1, \dots, x_k) = 0\,,$$

$$R_{k+\ell}(x_{k+\ell}\,;\, x_1, \dots, x_k) = 0 \qquad \text{avec } (x_1, \dots, x_k) \in \Omega'$$

soit contenu dans Ω'' et y soit relativement compact ; dans la suite, nous restreindrons Ω en le prenant égal à $\Omega' \times \Omega''$.

Soit D' l'ensemble des zéros de Δ (= discriminant de P) dans Ω', et soit Ω'_α ($1 \leq \alpha \leq \deg P$) l'ensemble (ouvert et fermé dans $\Omega' - D'$) des $x' = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega' - D'$ tels que l'équation

$$P(z \,;\, x_1, \dots, x_k) = 0$$

ait $\geq \alpha$ racines réelles (qui seront nécessairement distinctes) ; posons, comme au paragraphe 2, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$:

$$x' = \operatorname{pr} x = (x_1, \dots, x_k), \qquad x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n) \;;$$

posons encore

$$D = \operatorname{pr}^{-1}(D') \cap V, \qquad \Omega_\alpha = \Omega'_\alpha \times \Omega'' \quad .$$

Soit X^α_{k+1} la fonction qui, à $x' \in \Omega'_\alpha$, fait correspondre la α-ième racine de $P(z \,;\, x')$ (on les range, par exemple, par ordre croissant), et posons

$$X^\alpha_{k+\ell}(x') = \frac{Q_{k+\ell}(X^\ell_{k+1}(x') \,;\, x')}{P'(X^\alpha_{k+1}(x') \,;\, x')} \qquad (2 \leq \ell \leq n-k) \quad .$$

Soit V_α l'ensemble des $x \in \Omega$ vérifiant $x' \in \Omega'_\alpha$ et $x_{k+\ell} = X^\alpha_{k+\ell}(x')$ pour $1 \leq \ell \leq n-k$ [en abrégé : $x'' = X^\alpha(x')$].

LEMME 2. - <u>Les</u> V_α <u>sont régulièrement séparés les uns des autres par</u> D <u>au voisinage de</u> 0 (2).

Prenons en effet $x \in V_\alpha$, $y \in V_\beta$, avec $\beta < \alpha$; supposons que le segment $[x', y']$ est contenu dans Ω_β (on se ramène facilement à ce cas) ; il existe alors $C > 0$, $0 < \rho < 1$, tels qu'on ait :

$$|X^\beta_{k+1}(x') - X^\beta_{k+1}(y')| \leq C\, d(x', y')^\rho \qquad \text{(exposé 22, paragraphe 1)}$$

De là, et de

$$2\, d(x, y) \geq d(x', y') + |X^\alpha_{k+1}(x') - X^\beta_{k+1}(y')| \,,$$

on déduit

(2) En un sens évident, qu'on laisse au lecteur le soin de préciser.

$$d(x\ ,\ y)^{\rho} \geqslant C' \left|X^{\alpha}_{k+1}(x') - X^{\beta}_{k+1}(x')\right| \qquad (C' > 0)$$

En appliquant l'inégalité de Łojasiewicz à Δ , on trouve que le second membre de notre inégalité est $\geqslant C'' \, d(x'\ ,\ D')^{\rho'}$ $(C'' > 0\ ,\ \rho'' > 0)$; comme les $X^{\alpha}_{k+\ell}$ sont quasi-höldériens, le lemme s'ensuit.

On peut supposer que, dans $\Omega - D$, on a $V = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$; en décomposant les T en une somme de distributions à support dans les divers $V_{\alpha} \cup D$ (ce qui est possible d'après le lemme précédent, en restreignant au besoin Ω) , on voit qu'on peut les supposer tous à support dans $V_{\alpha} \cup D$, pour un α fixé, à condition de remplacer W par $W_1 = W \cup D$, ce qui est permis puisque $\dim D_0 < k$. En outre, on peut supposer les T d'ordre fini, et même appartenant à $\mathcal{P}'_{\Omega}$; si, pour simplifier, nous posons $P = R_{k+1}$, il existe alors un entier $\rho \in \underset{\sim}{N}$ tel qu'on ait, pour $1 \leqslant \ell \leqslant n - k$, et $1 \leqslant i \leqslant p$: $R^{\rho}_{k+\ell}\, T_i = 0$ (3) ; d'après la proposition 2, il existe $r \in \underset{\sim}{N}$ tel que (en restreignant au besoin Ω) , $(T_1\ ,\ \ldots\ ,\ T_p)$ vérifie $(C'\ ;\ f_{ij}\ ;\ R^{r}_{k+\ell})$ dans $\Omega - W_1$.

Pour démontrer (R), il nous suffira d'établir le résultat suivant :

(R') <u>Il existe un sous-ensemble analytique</u> U <u>de</u> Ω , <u>avec</u> $W_1 \subset U \subset V$, $\dim U_0 < k$, <u>et</u> $S_1\ ,\ \ldots\ ,\ S_q \in \mathcal{P}'_{\Omega - U}$ <u>tels qu'on ait, dans</u> $\Omega - U$

$$\begin{cases} \sum f_{ij}\, S_j = T_i & (1 \leqslant i \leqslant p) \\ R^{r}_{k+\ell}\, S_j = 0 & (1 \leqslant j \leqslant q\ ;\ 1 \leqslant \ell \leqslant n - k) \end{cases} .$$

En raisonnant comme dans l'exposé 22, on peut supposer (en l'agrandissant au besoin) que W_1 (resp. U) est l'intersection de V avec l'ensemble des zéros d'une fonction φ (resp. ψ) $\in \mathfrak{a}_{\Omega'}$, non identiquement nulle ; soit alors $Y' \subset \Omega'$ (resp. $U' \subset \Omega'$) la réunion de $\mathrm{pr}(W_1)$ et des zéros des discriminants des $R_{k+\ell}$ (resp. $U' = \mathrm{pr}\, U = \{x'\ ;\ \psi(x') = 0\}$) et soit $Y = V \cap \mathrm{pr}^{-1}(Y')$. Puisque Ω'_{α} est ouvert et fermé dans $\Omega' - D'$, (et d'après la remarque du paragraphe 2) il revient au même de travailler dans $\Omega - Y$ ou dans $\Omega_{\alpha} - Y$ ou même dans $\Omega_{\alpha} - \mathrm{pr}^{-1}(Y')$; dans ce dernier ensemble, on a, d'une manière unique, (avec les notations du paragraphe 2)

$$T_i = \sum D^{s}_{x''}\, \tilde{\Theta}_{s,i}\ , \qquad \text{avec } \Theta_{s,i} \in \mathcal{P}'_{\Omega'_{\alpha} - Y'} \qquad .$$

---

(3) En effet, il existe $\rho_1 \in \underset{\sim}{N}$ tel que $R^{\rho_1}_{k+\ell}\, T_i = 0$ en dehors de D , puisque $V - D$ est une variété [6] ; on recommence alors sur la "partie régulière" de D et ainsi de suite.

On cherche de même les S_j (qu'on peut supposer à support dans V_α) sous la forme :

$$\sum D^s_{x''} \tilde{\Sigma}_{s,j} , \qquad \text{avec } \Sigma_{s,j} \in \mathcal{P}'_{\Omega'_\alpha - U} \quad .$$

Comme les T (resp. les S) sont annulés par les $R^r_{k+\ell}$, on voit facilement que les $\Theta_{s,i}$ sont nuls (resp. que les $\Sigma_{s,j}$ doivent être nuls) dès que $s = (s_{k+1} , \dots , s_n)$ vérifie $\|s\| = \max|s_i| \geq r$.

En utilisant les formules (3) et (4), on ramène alors (R') au problème suivant :

(P) <u>Trouver</u> U' , <u>ensemble analytique dans</u> Ω' , <u>avec</u> $Y' \subset U'$, $\dim U'_0 \subset k$ <u>et des</u> $\Sigma_\mu \in \mathcal{P}'_{\Omega'_\alpha - U}$ <u>tels qu'on ait, dans</u> $\Omega'_\alpha - U'$

$$\sum \varphi_{\lambda\mu} \Sigma_\mu = \Theta_\lambda$$

où $\varphi_{\lambda\mu}(x') = \Phi_{\lambda\mu}(x' , X^\alpha(x'))$, les $\Phi_{\lambda\mu}(x)$ étant les f_{ij} , les $R^r_{k+\ell}$ et un nombre fini de leurs dérivées en x'' (convenablement réindéxés), les Θ_λ (resp. Σ_μ) étant les $\Theta_{s,i}$ (resp. $\Sigma_{s,j}$) avec $\|s\| \leq r$, également réindexés.

Les $\Phi_{\lambda\mu}$ ne sont pas toutes identiquement nulles sur V (donc les $\varphi_{\lambda\mu}$ sur Ω_α) : sinon, la proposition 1 bis montrerait que tous les $(T_1 , \dots , T_p) \in \mathcal{P}'_{\Omega - Y}$ vérifiant $(C^r ; f_{ij} ; R^r_{k+\ell})$ dans $\Omega - Y$ sont nuls, cas trivial que nous excluons (4).

Soit alors $\delta(x)$ un déterminant d'ordre le plus grand possible non $\equiv 0$ sur V extrait de la matrice $(\Phi_{\lambda\mu})$, et soit $\delta'(x') \in \mathcal{O}_{\Omega'}$ tel qu'on ait

$$V \cap \{x ; \delta(x) = 0\} \subset V \cap \{x ; \delta'(x') = 0\}$$ (cf. exposé 22, paragraphe 2, 5°) ;

prenons $U' = \{x' ; \delta'(x') = 0\} \cup Y'$ [et, évidemment, $U = V \cap pr^{-1}(U')$] ; montrons que U' répond à la question.

En restreignant au besoin Ω , on a : $\forall \ \lambda , \mu$: $\Phi_{\lambda\mu} \in \mathcal{O}_\Omega$, d'où résulte facilement qu'on a : $\varphi_{\lambda\mu} \in \mathcal{O}_{\Omega'_\alpha - Y'}$, et, a fortiori $\in \mathcal{O}_{\Omega'_\alpha - U'}$ de là, et de l'inégalité de Łojasiewicz, on déduit facilement :

$$\frac{1}{\delta(x', X^\alpha(x'))} \in \mathcal{O}_{\Omega'_\alpha - U'} \ ;$$

---

(4) Si nous avions opéré directement avec les T , sans les décomposer, l'assertion analogue relative aux f_{ij} aurait pu être fausse (tout le problème de la division est là!) ; d'autre part, si nous n'avions pas rajouté les conditions $R^r_{k+\ell} S_j = 0$, nous aurions eu un système d'une infinité d'équations et d'inconnues, beaucoup moins maniable.

en appliquant alors les résultats de l'appendice (avec $A = \Theta_{\Omega'_\alpha - U'}$, $M = \mathcal{P}'_{\Omega'_\alpha - U'}$) , et en remarquant que tout ce qui précède ne dépend pas du système (T_i) choisi [pourvu que les T_i soient dans $\mathcal{P}'_\Omega$, à support dans V_α , et vérifiant $(C' ; f_{ij} ; R^r_{k+\ell})$ dans $\Omega - U$, conditions que nous noterons (C'')] :

<u>Il existe des $\psi_{\lambda\nu}(x')$, polynômes par rapport aux $\varphi_{\lambda\mu}$ tels que $(\mathcal{P})$ ait une solution si et seulement si, dans $\Omega' - U'$, on a,</u> $\forall\ \nu$

$$(\Gamma) \qquad \sum \psi_{\lambda\nu} \Theta_\lambda = 0 \quad .$$

Pour achever la démonstration, il suffit d'établir que (Γ) est toujours vérifié lorsque (T_i) vérifie (C'') ; par une partition de l'unité, on peut se ramener au cas où les T_i sont à support compact dans $V_\alpha - U$; en appliquant alors la proposition 1 bis à $\Omega - U$, on trouve que les $(T_i) \in [\mathcal{E}_{V_\alpha - U}]^p$ vérifiant (Γ) sont $[\mathcal{G}'_{\Omega - U}]^p$ -denses dans ceux qui vérifient (C'') ; compte tenu de la formule 2, notre assertion résulte de là par passage à la limite, et le théorème est démontré.

APPENDICE.

<u>Équations linéaires sur un anneau.</u>

Soient A un anneau commutatif avec élément unité, et M un A-module unitaire ; soit $(a_{\lambda\mu})$ $(1 \leq \lambda \leq \lambda_0$, $1 \leq \mu \leq \mu_0)$ une matrice à coefficients dans A , et r son rang, i. e. l'ordre maximum d'un déterminant non nul, extrait de $(a_{\lambda\mu})$. Soit δ un tel déterminant, que nous supposons, pour fixer les idées, égal à

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} ,$$

et posons $a_\lambda = (a_{\lambda 1} , \cdots , a_{\lambda\mu_0})$. D'après la théorie classique des équations linéaires, il existe des $b_{\lambda\mu}$, polynômes par rapport aux a $(1 \leq \lambda \leq r$, $r + 1 \leq \mu \leq \lambda_0)$ tels qu'on ait

$$\delta a_\mu = \sum_{\lambda=1}^{r} b_{\lambda\mu} a_\lambda \quad .$$

Faisons maintenant l'hypothèse suivante : δ <u>est un élément inversible</u> de A . On obtient alors facilement ceci :

<u>Étant donnés</u> $m_1 , \ldots , m_{\lambda_0} \in M$, <u>il existe</u> $n_1 , \ldots , n_{\mu_0} \in M$ <u>vérifiant</u> $\Sigma a_{\lambda\mu} n_\nu = m_\lambda$ <u>si et seulement si l'on a, pour</u> $r + 1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_0$: $\delta m_\mu = \Sigma b_{\lambda\mu} m_\lambda$.

N. B. - Dans le cas où $p = 1$, $q = 1$ (ou, ce qui revient au même, quand la condition $(C ; f_{ij})$ est vide), HÖRMANDER [2] et ŁOJASIEWICZ [3] ont montré que le théorème 1 est conséquence de l'inégalité de Łojasiewicz. La méthode suivie ici est une variante de [3] (la méthode suivie dans [2] est assez différente, puisqu'on travaille sur $\mathcal{E}$ et qu'on obtient par dualité les résultats relatifs à $\mathcal{D}'$; je ne sais pas si cette méthode peut se généraliser au cas traité ici).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 28-64.

[2] HÖRMANDER (Lars). - On the division of distributions by polynomials, Arkiv für Math., t. 3, 1958, p. 555-568.

[3] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Math., t. 18, 1959, p. 87-136.

[4] OKA (Kiyoshi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 1-27.

[5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, t. 1 et 2. - Paris, Hermann, 1950 et 1951 (Act. scient. et ind., 1091 et 1122 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).

[6] ZARISKI (Oscar) and SAMUEL (Pierre). - Commutative algebra. - Princeton, Van Nostrand, 1958 (The University Series in higher Mathematics).