

SÉMINAIRE SCHWARTZ

BERNARD MALGRANGE

**Première partie : opérateurs intégraux singuliers, théorèmes
d'interpolation dans les espaces L^p**

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 1, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A1_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

3 novembre 1959

Première partie : OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS

THÉORÈMES D'INTERPOLATION DANS LES ESPACES L^p

par Bernard MALGRANGE

Les résultats d'unicité du problème de Cauchy que nous allons exposer reposent sur des propriétés d'opérateurs intégraux singuliers à noyaux de la forme valeur principale (v. p.) en y de $A(x, x - y)$ où A est homogène par rapport à la deuxième variable. À strictement parler, nous n'aurons besoin de ces opérateurs que dans L^2 , mais, pour être complet, nous donnerons leurs propriétés dans les L^p . Ce premier exposé sera consacré aux théorèmes qui permettent cette généralisation.

1. Le théorème de Marcel Riesz et Thorin.

E et F seront des espaces localement compacts sur lesquels seront données des mesures positives μ et ν respectivement. Nous montrerons que si T est une application linéaire de $L^p(\mu)$ dans $L^{p_1}(\nu)$ et de $L^q(\mu)$ dans $L^{q_1}(\nu)$, elle applique aussi $L^r(\mu)$ dans un $L^{r_1}(\nu)$ approprié pourvu que $p \leq r \leq q$ (il s'agit des L^p à valeurs complexes).

$\|f\|_p$ désignera la norme de f dans L^p , le contexte montrera toujours clairement s'il s'agit de $L^p(\mu)$ ou de $L^p(\nu)$.

DÉFINITION 1. - Une application linéaire de $\mathcal{O}^0(E)$ dans $L^1_{loc}(\nu)$ sera dite de type (p, q) s'il existe une constante $C_{p,q}$ telle que :

$$\|Tf\|_q \leq C_{p,q} \|f\|_p .$$

On prendra toujours $C_{p,q} = \sup(\|Tf\|_q / \|f\|_p)$. Si $p \leq \infty$, T se prolonge (d'une seule manière) en une application linéaire continue de L^p dans L^q .

THÉORÈME 1. (théorème de Marcel Riesz et Thorin). - La fonction

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \log C_{1/\alpha, 1/\beta}$$

est convexe dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

DÉMONSTRATION. (THORIN [4]). - Nous allons traiter le cas où les α_i et β_i ne sont pas nuls, les autres s'obtiennent par passage à la limite. f et g étant

des fonctions continues et à support compact dans E et F respectivement, nous poserons :

$$\langle Tf, g \rangle = \int Tf \cdot g \, d\nu$$

$$f = F^\alpha \varphi \quad \text{avec } F \geq 0, \quad \int F \, d\mu = 1, \quad |\varphi| = 1$$

et φ est continue partout où $F \neq 0$.

$$g = G^{\beta'} \psi \quad \text{avec } G \geq 0, \quad \int G \, d\nu = 1, \quad |\psi| = 1 \quad \text{et } \beta' = (1 - \beta).$$

Nous allons étudier la fonction de la variable complexe z :

$$u(z) = \left\langle T(F^{z\alpha_1 + (1-z)\alpha_2} \varphi), G^{z\beta'_1 + (1-z)\beta'_2} \psi \right\rangle$$

(ici encore $\beta'_i = 1 - \beta_i$). Remarquons que les parties imaginaires des exposants peuvent être considérées comme modifiant φ et ψ mais non pas F et G .

Si alors T est de type $(1/\alpha_1, 1/\beta_1)$ et $(1/\alpha_2, 1/\beta_2)$, $u(z)$ vérifie les conditions suivantes :

- Elle est continue pour $0 \leq \Re z \leq 1$.
- Elle est bornée pour $\Re z = 0$ et $\Re z = 1$, respectivement par $C_{1/\alpha_1, 1/\beta_1}$ et $C_{1/\alpha_2, 1/\beta_2}$ (d'après l'inégalité de Hölder).
- Elle est holomorphe et bornée pour $0 < \Re z < 1$ (vérification facile).

Le "théorème des trois droites" affirme précisément que, sous ces conditions, la fonction :

$$M(x) = \sup_{\Re z = x} |u(z)|$$

est convexe dans l'intervalle $[0, 1]$.

Enfin la fonction $C_{1/\alpha, 1/\beta}$ est convexe à son tour comme borne supérieure d'une famille de fonctions convexes (sur chaque segment $[(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)]$ donc aussi dans le carré).

COROLLAIRE. - Si T est de type (p_1, q_1) et (p_2, q_2) , alors, pour tout t compris entre 0 et 1, T est de type (p, q) avec :

$$1/p = t/p_1 + (1-t)/p_2, \quad 1/q = t/q_1 + (1-t)/q_2$$

REMARQUE 1. - La démonstration du théorème de Marcel Riesz et Thorin suppose les espaces L^p complexes. Dans le cas réel, il faut ajouter $\beta_i \leq \alpha_i$ aux hypothèses. Mais le corollaire subsiste comme conséquence du cas complexe.

REMARQUE 2. - On trouvera une extension du résultat (et de la méthode) précédents, pour certaines applications non linéaires, dans [1].

2. Le théorème de Marcinkiewicz.

Le théorème de Marcel Riesz et Thorin ne suffit pas à toutes les applications. Par exemple, il est connu que l'application : $\varphi \rightarrow (v. p. 1/x) * \varphi$ est de type $(2, 2)$ et n'est pas de type $(1, 1)$; mais nous montrerons dans un exposé ultérieur qu'elle est "de type faible $(1, 1)$ " au sens de la définition suivante :

DÉFINITION 2. - Une application linéaire T de $L_c^\infty(\mu)$ (espace des fonctions bornées en dehors d'un ensemble de mesure nulle et équivalentes à zéro en dehors d'un compact) dans $L_{loc}^1(\nu)$ est dite de type faible (p, q) .

a. si $q = \infty$ et elle est de type (ordinaire) (p, q) ,

b. si $q \neq \infty$ et il existe une constante C telle que :

$$(1) \quad \text{mes} \left\{ y ; |Tf(y)| > z \right\} \leq C \left(\frac{\|f\|_p}{z} \right)^q .$$

On vérifie immédiatement que toute application de type (p, q) ordinaire est aussi de type faible (p, q) . La réciproque est fautive puisque $(v. p. 1/x) *$ n'est pas de type $(1, 1)$.

Le théorème de Marcinkiewicz, que nous allons maintenant énoncer, nous assurera que $(v. p. 1/x) *$ est de type (p, p) pour $1 < p < 2$ et, par transposition, pour $2 < p < \infty$.

THÉORÈME 2 (MARCINKIEWICZ [2]). - Soient (α_1, β_1) , (α_2, β_2) deux points différents de R^2 vérifiant chacun $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \leq 1$. Posons :

$$\begin{cases} \alpha = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2 \\ \beta = t\beta_1 + (1-t)\beta_2 \end{cases} \quad \text{où } 0 < t < 1 .$$

Alors toute application linéaire T de types faibles $(1/\alpha_1, 1/\beta_1)$ et $(1/\alpha_2, 1/\beta_2)$ est de type (ordinaire) $(1/\alpha, 1/\beta)$.

EXEMPLE d'application. - Quel que soit p , si $1 < p < \infty$ il existe une constante C_p telle que pour toute fonction $f \in L^p(R^n)$ de transformée de Fourier \hat{f} :

$$\int |\hat{f}(\xi)| \xi^{n/p} \frac{d\xi}{\xi^{2n}} \leq C_p \int |f(x)|^p dx$$

(HARDY, LITTLEWOOD, PALEY). Pour $p = 2$, c'est le théorème de Plancherel et pour

$p = 1$ on vérifie (1), dx jouant le rôle de $d\mu$, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ celui de F ,

$\frac{d\xi}{2n}$ celui de $d\nu$, et enfin $f \rightarrow \hat{f} \xi^n$ celui de T .

DÉMONSTRATION dans le cas diagonal. - $\alpha_i = \beta_i$ ($i = 1, 2$). C'est d'ailleurs le seul que nous aurons à utiliser. L'idée qui guide le raisonnement est la suivante : soit $f \in L^p$ avec $p_1 < p < p_2$, alors on peut écrire $f = g + h$, où $g \in L^{p_1}$ et $h \in L^{p_2}$, en posant par exemple : $g(x) = f(x)$ si $|f(x)| > 1$ et $g(x) = 0$ si $|f(x)| \leq 1$.

On suppose $p_1 < p < p_2 < \infty$ où $p_1 = 1/\alpha_1$, $p_2 = 1/\alpha_2$, $p = 1/\alpha$ ainsi que dans toute la suite. Soit $f \in L_c^\infty(\mu)$, nous définissons g_z et h_z ($z > 0$) par :

$$f = g_z + h_z \begin{cases} g_z(x) = f(x) & \text{quand } |f(x)| > z \\ g_z(x) = 0 & \text{quand } |f(x)| \leq z \end{cases} .$$

Remarquons que $|Tf| > z$ entraîne $|Tg_z| > z/2$ ou $|Th_z| > z/2$ d'après la linéarité de T (qui n'interviendra plus, cf. la remarque 2). Il s'ensuit de là que, si on pose :

$$A(z) = \text{mes} \left\{ y ; |Tf(y)| > z \right\} ,$$

$$A(z) \leq \text{mes} \left\{ y ; |Tg_z(y)| > z/2 \right\} + \text{mes} \left\{ y ; |Th_z(y)| > z/2 \right\}$$

et en portant (1) dans cette inégalité :

$$(2) \quad A(z) \leq C_1 \left(\frac{2 \|g_z\|_{p_1}}{z} \right)^{p_1} + C_2 \left(\frac{2 \|h_z\|_{p_2}}{z} \right)^{p_2} .$$

Maintenant $\|Tf\|_p^p$ peut s'écrire sous forme d'une intégrale de Stieltjes (éventuellement infinie) :

$$\|Tf\|_p^p = - \int_0^\infty u \, dA(u^{1/p}) = - \int_0^\infty z^p \, dA(z) .$$

On peut intégrer par parties ; le terme tout intégré $z^p A(z)$ tend vers 0 quand z tend vers 0 (appliquer (1) avec p_1 en tenant compte de $p_1 < p$) et vers ∞ (appliquer (1) avec p_2 en tenant compte de $p < p_2$) .

$$\|Tf\|_p^p = p \int_0^\infty z^{p-1} A(z) \, dz .$$

En y portant (2) :

$$\|Tf\|_p^p \leq pC_1 2^{p_1} \int_0^\infty z^{p-p_1-1} dz \int_{|f|>z} |f(x)|^{p_1} d\mu \\ + pC_2 2^{p_2} \int_0^\infty z^{p-p_2-1} dz \int_{|f|\leq z} |f(x)|^{p_2} d\mu \quad .$$

Calculons par exemple la première intégrale double. Elle est finie puisque $p > p_1$ et que f est bornée. Si on intègre par parties, le terme tout intégré

$\frac{z^{p-p_1} \int_{|f|>z} |f|^{p_1} d\mu}{p-p_1}$ s'annule quand $z=0$ et ∞ , et il reste :

$$-\frac{1}{p-p_1} \int_0^\infty z^{p-p_1} d \int_{|f|>z} |f(x)|^{p_1} d\mu = \frac{1}{p-p_1} \int |f|^p d\mu$$

(La dernière égalité s'obtient en écrivant $\int_{|f|>z} |f|^{p_1} d\mu$ comme on a écrit $\|Tf\|_p^p$ plus haut).

Des transformations analogues montrent que la deuxième intégrale vaut :

$$\frac{1}{p_2-p} \int |f|^p d\mu$$

de sorte qu'au total :

$$\|Tf\|_p^p \leq p \left(\frac{C_1 2^{p_1}}{p-p_1} + \frac{C_2 2^{p_2}}{p_2-p} \right) \|f\|_p^p$$

inégalité qui équivaut précisément à la conclusion à démontrer.

Le cas $p_2 = +\infty$ se traite de manière analogue.

REMARQUE 1. - Si $\alpha_i \neq \beta_i$ le principe de la démonstration est le même, mais il survient des complications d'ordre technique. $A(z)$ est défini par une relation de la forme :

$$A(z) = \text{mes} \left\{ y ; |Tf(y)| > az^{\frac{p}{2}} \right\} \quad .$$

(voir ZYGMUND [5]).

REMARQUE 2. - La linéarité de T n'intervient que par la relation :

$$|T(g+h)| \leq k(|Tg| + |Th|)$$

laquelle caractérise (par définition) les applications quasi-linéaires. Le théorème est donc encore vrai pour ces dernières.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - A note on the interpolation of sublinear operations, Amer. J. Math., t. 78, 1956, p. 282-288.
 - [2] MARCINKIEWICZ (Joseph). - Sur l'interpolation d'opérations, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 208, 1939, p. 1272-1273.
 - [3] RIESZ (Marcel). - Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, Acta Math., t. 49, 1926, p. 465-497.
 - [4] THORIN (G. O.). - Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., t. 9, 1948, 57 p.
 - [5] ZYGMUND (A.). - On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 35, 1956, p. 223-248.
-