SÉMINAIRE SCHWARTZ

MARTIN ZERNER

Diverses conséquences d'une formule de Green

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 18, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A18_0>

DIVERSES CONSÉQUENCES D'UNE FORMULE DE GREEN

par Martin ZERNER

(d'après LANDIS [2] et [3])

Introduction.

Les résultats que nous avons obtenus jusqu'ici reposaient sur l'emploi des noyaux construits par SERRIN (voir l'exposé 16). Pour aller plus loin, il faut employer une autre méthode, utilisant une formule de Green. Les démonstrations sont beaucoup plus compliquées que les précédentes, et dans cet unique exposé nous devrons nous contenter d'énoncer les résultats et de donner des indications très générales sur le chemin suivi, sauf en ce qui concerne la première étape qui est l'introduction de la formule de Green. Les démonstrations ne sont publiées que pour la dimension 2.

HYPOTHÈSES. - L'opérateur :

$$L = a^{ij}\, \partial_{ij} + b^i\, \partial_i + c$$

est supposé vérifier, partout où il est défini, les trois conditions suivantes :

a. Les a^{ij}, les b^i et c sont respectivement dans les espaces de Sobolev $H^{\infty,2}$, $H^{\infty,1}$, $H^{\infty,0} = L$ (voir l'exposé n° 5, cela signifie que les a^{ij} possèdent des dérivées bornées jusqu'à l'ordre 2, etc.).

b. L est uniformément elliptique (condition (b) de l'exposé 16).

c. $c \leqslant 0$.

L'expression "suffisamment régulière" sera précisée en cours de démonstration.

NOTATIONS. - d désigne la différentielle extérieure,

$$dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$dx_{\hat{i}} = (-1)^i\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

σ est la forme "tordue" élément d'hypersurface dans la métrique euclidienne et ω la même dans la métrique riemannienne définie par les a^{ij}.

$$u_1 = \sqrt{\sum_i (\partial_i u)^2} \quad .$$

Lorsque nous nous intéresserons à un morceau d'hypersurface régulière limitant un domaine, $\vec{n}$ et $\vec{\nu}$ seront respectivement les vecteurs unitaires de la normale sortante pour la métrique euclidienne et la métrique riemannienne et ∂_n , ∂_ν les dérivations correspondantes,

$$P_h = \{x \; ; x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant h^2\} \quad .$$

Enoncés des résultats.

Unicité. - Soit

$$T_h = S_1 \cap P_h \cap (x_1 > 0) \quad .$$

Il existe trois constantes positives C_1 , ε_0 , h_0 telles que pour tous les $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $h < h_0$, et toute u suffisamment régulière vérifiant :

$$\begin{aligned} |u| &\leqslant 1 && \text{sur } B_1 \\ |u| &\leqslant \varepsilon && \text{sur } T_h \\ |u_1| &\leqslant \varepsilon && \text{sur } T_h \\ Lu &= 0 && \text{sur } B_1 \end{aligned}$$

on ait :

$$|u(0)| \leqslant \varepsilon^{h^{C_1}}$$

REMARQUE. - On voit que ce résultat, éventuellement modifié par une transformation biunivoque deux fois continûment différentiable des x donne une très bonne unicité du problème de Cauchy, mais une unicité forte médiocre : une solution s'annule sur un voisinage de 0 si elle $\to 0$ plus vite que $\exp(-1/|x|^{C_1})$ ainsi que ses dérivées premières.

Décroissance à l'infini. - Soit u suffisamment régulière et vérifiant $Lu = 0$ dans P_h . Si :

$$\operatorname{Log} \operatorname{Log} (1/u) \underset{x_1 \to \infty}{\to} \infty$$

alors $u = 0$ sur P_h .

REMARQUE. - L'exemple de la fonction harmonique :

$$\Re e^{-e^z}$$

dans la bande $|\Re z| < h$ montre qu'on ne peut pas espérer de meilleur résultat.

Rapport entre croissance et changements de signe. - Soit L défini dans tout l'espace. Appelons $N(r)$ le nombre des composantes connexes de l'un ou l'autre des deux ouverts :

$$\{ x \,;\, u(x) > 0 \} \qquad \{ x \,;\, u(x) < 0 \}$$

qui coupent B_r ; appelons $M(r)$ la borne supérieure de $|u|$ dans B_r.

Si L satisfait aux hypothèses du principe de Phragmen-Lindelöff (exposé 17) et si $Lu = 0$,

$$\frac{[N(r)]^{1/(n-1)}}{\operatorname{Log} M(er)}$$

est borné.

Marche des démonstrations.

LANDIS déduit ces théorèmes de celui qui a été démontré dans l'exposé précédent, et d'un lemme dont les hypothèses changent légèrement selon celui des trois résultats que l'on vise mais qui est de la forme suivante (c'est celle qui aboutit à l'unicité).

LEMME 1. - Soient h un nombre positif et G un ouvert connexe borné contenu dans P_h et satisfaisant à l'hypothèse :

(H). La partie contenue dans P_h de la frontière de G possède une composante connexe Γ_1 qui a au moins un point commun avec toute parallèle à l'axe des x_1 contenue dans P_h, à savoir celui qui réalise l'inf de x_1 sur l'intersection de cette parallèle avec G. Chaque composante connexe de l'intersection de la frontière de G avec P_h est une hypersurface régulière.

Γ_2 sera la partie de la frontière de G contenue dans P_h, mais non pas dans Γ_1.

Alors, il existe une constante C telle que, pour tout $h < 1$, tout $a > 0$, tout G vérifiant (H) et toute fonction u suffisamment régulière vérifiant $Lu = 0$ sur G et de plus :

i. $u \geqslant a$ sur Γ_2

ii. $u \leqslant a/2$ sur Γ_1 et $\int_{\Gamma_1} |u| \sigma \leqslant ah^{n-1}$

iii. $\int_{\Gamma_1} u_1 \leqslant ah^{n-1}$

iv. $u \geqslant -a$ sur G ;

si l'on pose :

$$D = \{x \,;\, x \in G \quad \text{et} \quad a/2 < u(x) < a\}$$

alors :

$$\mu_n D \geqslant C h^n$$

Il est clair que le passage de ce type de lemme aux résultats énoncés n'est pas immédiat. En fait, on passe par un deuxième lemme, que LANDIS n'a donné que pour deux dimensions et qui est du type suivant :

LEMME 2. - Les hypothèses sont celles du lemme 1, modifiées de la façon suivante : l'angle de Γ_1 avec la parallèle à l'axe des x_1 est minoré ; $a < 1$; dans (ii) et (iii) on remplace a par a^{2^k} et (iv) devient $|u| \leqslant 1$ sur G.
On pose :

$$D_k = \{x \,;\, x \subset G \,,\, a^{2^k} < u(x) < a\} \quad .$$

La conclusion est qu'il existe une constante C_2 telle que, pour tout k assez grand :

$$\mu_n D_k \geqslant k C_2 h^2$$

(pour $n = 2$).

En particulier, G étant donné, k ne peut pas dépasser $\mu_n G / C_2 h^2$, avec une légère variante dans les hypothèses, on a l'énoncé sur la décroissance de u. La démonstration d'unicité est un peu moins facile, elle se fait en prenant un u_0 entre ε et $u(0)$, de sorte que la courbe $u = u_0$ soit sans point singulier (c'est possible, vide infra) et un domaine G limité par cette courbe, T_h et deux autres courbes qu'une transformation appropriée transforme en droites parallèles (je suis obligé de passer sur les détails). Enfin, pour obtenir le théorème sur le nombre de changements de signes, il faut appliquer encore le théorème établi dans l'énoncé précédent.

Lorsque $n > 2$, il semble qu'on puisse encore démontrer le lemme 2, et qu'il faille ensuite le généraliser aux cylindres dont la base n'est plus une boule de R^{n-1}, mais un autre domaine, et faire intervenir la mesure de ce domaine dans les inégalités. Mais cela suppose qu'on ait d'abord mis les lemmes sous une forme dimensionnellement homogène, ce qui pour le moment n'est pas le cas.

La démonstration du lemme 2 consiste à faire une partition de G en sous-domaines et à montrer que si le lemme 1, appliqué à ces sous-domaines ne donne pas l'inégalité annoncée, alors on peut faire une autre partition en sous-domaines pour lesquels le théorème de l'exposé précédent donne la dite inégalité. La construction utilise le fait que $n = 2$ et est fort compliquée.

Esquisse de la démonstration du lemme 1.

On utilise la formule de Green :

$$\int_H u(\partial_{ij} a^{ij} - \partial_i b^i + c)\, dx = \int_{\partial H}[u(\partial_j a^{ij} + b^i) - a^{ij} \partial_j u]\, dx_{\hat{i}}$$

obtenue en faisant $v = 1$ dans l'expression classique de

$$\int_H (u L^* v - v Lu)\, dx \quad .$$

Nous exploiterons le fait que dans cette formule les dérivées de u n'interviennent que par l'intermédiaire du flux du gradient riemannien.

L'image par u de G contient l'intervalle

$$I =]a/2 , a[\quad .$$

Supposons u n fois continûment différentiable et appelons Γ_t l'ensemble des points de G où u prend la valeur $t \in I$. Alors un théorème d'Anthony MORSE ([4]) (connu comme cas particulier du théorème de Sard et retrouvé par KRONROD et LANDIS [1]) nous assure que l'ensemble T des t tels que Γ_t soit sans point singulier a pour mesure $a/2$. L'expression :

$$J(t) = \int_{\Gamma_t} \frac{\sigma}{u_1}$$

est donc définie sur presque tout I et nous avons :

$$\int_T J(t)\, dt \leqslant \mu_n D \quad .$$

Posons :

$$\mu_n D = sh^n \quad .$$

D'après l'inégalité précédente, il existe $t_0 \in T$ tel que :

$$J(t_0) \leqslant \frac{2sh^n}{a} \quad .$$

Posons :

$$E = \{ x \ ; \ x \in \Gamma_{t_0} \ , \ u_1(x) > \frac{a}{2sh} \} \quad .$$

La surface (sens euclidien) de Γ_{t_0} est au moins égale à $c_{n-1} h^{n-1}$ (c_{n-1} : volume de la boule unité dans R^{n-1}). Celle du complémentaire de E dans Γ_{t_0}

est au plus égale à h^{n-1} . Donc :

$$\int_E \sigma \geqslant h^{n-1}$$

d'où :

$$\int_E u_1 \sigma > \frac{ah^{n-2}}{2s} \quad .$$

Mais sur Γ_{t_0} :

$$u_1 = \pm \partial_n u$$

le signe restant le même puisque u_1 ne s'annule pas sur Γ_{t_0} . $\int u_1 \sigma$ est donc, au signe près, le flux du gradient euclidien. Comme les deux métriques sont équivalentes d'après l'ellipticité uniforme (hypothèse (b) sur L) :

$$\int_E u_1 \sigma \leqslant C_0 \left|\int_E a^{ij} \partial_j u \, d\hat{x}_i\right| \quad .$$

On aura donc majoré $1/s$ quand on aura majoré les intégrales autres que $\int_E a^{ij} \partial_j u \, d\hat{x}_i$ qui figurent dans la formule de Green appliquée à un domaine H limité en partie par E . Nous ne donnerons pas ici cette majoration, qui n'est pas facile. Elle change d'ailleurs avec les hypothèses quu figurent dans le lemme du type 1 tandis que la partie de la démonstration que nous venons de donner reste la même.

REMARQUE. - Nous avons supposé u n fois continûment différentiable, ce qui ne présente pas d'inconvénient lorsque $n = 2$, puisqu'il s'agit alors de toutes les solutions usuelles. On sait ([6]) que l'hypothèse " u n fois continûment différentiable" ne peut guère être affaiblie dans l'énoncé du théorème d'Anthony MORSE. Cependant LANDIS annonce que les résultats restent vrais pour les solutions usuelles avec n quelconques et paraît utiliser la généralisation suivante :

Soit u une application deux fois continûment différentiable d'un domaine G de R^n dans R . Pour tout $t \in R$ posons

$$A_t = \{x \ ; \ x \in G \ , \ u(x) = t \ , \ du(x) = 0\}$$

μ_{n-1} désignant la mesure $n - 1$ dimensionnelle dans R^n ([5], page 53), posons encore :

$$B = \{t \ ; \ t \in R \ , \ \mu_{n-1} A_t \neq 0\} \quad .$$

Alors B est un ensemble de mesure nulle.

Malheureusement, je n'ai pu trouver nulle part de démonstration de cet énoncé. D'ailleurs, il n'est pas évident qu'il permette d'appliquer la formule de Green.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRONROD (A. S.) et LANDIS (E. M.). - O gladkosti množestv urovnia funktsij mnogikh peremennikh, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 58, 1947, p. 1269-1272.

[2] LANDIS (E. M.). - O nekotorykh svojstvakh reščenij elliptičeskikh uravnenij, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 107, 1956, p. 640-643.

[3] LANDIS (E. M.). - Nekotorye voprosy kačestvennoj teorii elliptičeskikh i paraboličeskikh uravnenij, Uspekhi Mat. Nauk, N. S., t. 14, 1959, p. 21-85.

[4] MORSE (Anthony). - The behavior of a function on its critical set, Annals of Math., Series 2, t. 40, 1939, p. 62-70.

[5] SAKS (Stanislas). - Theory of the integral. - Warszawa, Lwow, Seminar Matem. Univ. Warz. ; New York, G. E. Stechert, 1937 (Monografie matematyczne, 7).

[6] SARD (Arthur). - The measure of the critical values of differentiable maps, Bull. of Amer. math. Soc., t. 48, 1942, p. 883-890.