

SÉMINAIRE SCHWARTZ

MARTIN ZERNER

Principes de Phragmén-Lindelöf

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 17, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A17_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PRINCIPES DE PHRAGMÈN-LINDELÖF

par Martin ZERNER

(d'après LANDIS [3])

Cet exposé concerne encore un opérateur à n variables. Les conventions et notations de l'exposé précédent restent en vigueur. Si A est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , $\mu_n A$ désigne sa mesure de Lebesgue. S'il est porté par une sphère, $\mu_{n-1} A$ désigne sa mesure superficielle. On appelle S_a la sphère $|x| = a$ et B_a la boule ouverte qu'elle limite. La lettre G éventuellement munie de divers indices désigne toujours un ouvert connexe.

LEMME. - Soit h un nombre compris entre 0 et 1. Il existe une constante C_0 telle que, pour tout $a \leq 1$ et pour tout domaine G vérifiant :

- a. $G \subset B_a$
- b. $0 \in G$
- c. $\bar{G} \cap S_a \neq \emptyset$

et

$$(1) \quad C_0 \mu_n G < a^n$$

pour toute fonction positive u vérifiant :

- A. u est continue sur \bar{G} .
- B. u s'annule sur la partie de la frontière de G qui est contenue dans B_a .
- C. u est deux fois continûment différentiable sur G et y vérifie :

$$Lu = 0$$

où L est défini sur \bar{B}_a (et bien entendu y satisfait aux hypothèses énoncées dans l'exposé précédent). u vérifie aussi :

$$u(0) \leq h \sup_{x \in \bar{G}} u(x) .$$

DÉMONSTRATION. - D'après (1), il existe un nombre b compris entre 0 et a tel que :

$$\mu_{n-1} G \cap S_b < \frac{nb^{n-1}}{C_0} .$$

Appelons ψ la fonction (continue) définie sur S_b comme égale à u sur $S_b \cap \bar{G}$ et nulle ailleurs. K_- étant le noyau relatif à S_b dont l'existence est affirmée

par le théorème de l'exposé précédent, posons :

$$v(x) = \int_{S_b} K_-(x, y) \psi(y) d\sigma$$

K_- étant positif, on a : $u \leq v$ sur la frontière de $G \cap B_b$ (puisque $u = v$ aux points de cette frontière qui appartiennent à S_b d'après la propriété (ii) de K_- (théorème cité) et $u = 0$ en les autres points de la frontière).

Enfin, sur $G \cap B_b$, vu la propriété (i) dans le théorème invoqué :

$$L(v - u) \leq 0$$

donc, (principe du maximum) :

$$u \leq v \quad \text{sur } G \cap B_b \quad ,$$

mais alors, d'après (2) et la propriété (iii) de K_- :

$$u(0) \leq \frac{n!}{C_0} \sup_{x \in \overline{G} \cap S_b} u(x) \quad ,$$

d'où le lemme en prenant :

$$C_0 = \frac{n!}{h} \quad .$$

REMARQUE. - Comme on l'a fait observer à l'exposé précédent, on est obligé de limiter le rayon a de la boule. Voici un exemple montrant que cette restriction ne tient pas à la méthode employée :

$$n = 2 \quad L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}$$

$$G_a = \left\{ (x, y) ; x^2 + y^2 < a^2, x^2 - 2(y + a^{3/2}) < 0 \right\}$$

$$u_a = -x^2 + 2(y + a^{3/2})$$

quand $a \rightarrow \infty$:

$$\frac{\mu_2 G_a}{a^2} \rightarrow 0$$

$$\frac{u_a(0)}{\sup_{G_a} u_a(x)} \rightarrow 1 \quad .$$

Par contre, cette restriction peut être levée si on ajoute l'hypothèse :

Les fonctions $|x| b^i$, $|x|^2 c$ sont bornées .

(On se rappelle qu'on passe de la construction des noyaux K_{\pm} pour $a = 1$

à celle des autres par une homothétie. Sous la nouvelle hypothèse, les opérateurs L transformés par les homothéties correspondant à tous les a satisfont à la même condition d'ellipticité uniforme et ont des coefficients bornés par un même nombre).

THÉOREME. - Il existe deux constantes positives C , C_1 telles que, pour tout $a \leq 1$ (resp. tout a), tout domaine G vérifiant les conditions (a), (b), (c) du lemme, toute fonction u , (positive ou non), vérifiant les conditions (A), (B), (C), du lemme (resp. si de plus $|x| \leq b^i$ et $|x|^2 \leq c$ sont des fonctions bornées), en posant :

$$s = a^{-n} \int_n u \quad ,$$

$$s < C_1$$

entraîne :

$$u(0) \leq \exp(-Cs^{-1/(n-1)}) \sup_{x \in G} u(x) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Si $u(0) \leq 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, d'après le principe du maximum, le plus grand ouvert connexe contenant 0 où l'on ait $u > 0$ a des points adhérents sur S_a . En remplaçant au besoin G par cet ouvert, on peut supposer $u > 0$ sur G .

Dans ces conditions, on va partager B_a en N couronnes, et appliquer le lemme à un sous-ensemble judicieusement choisi de chacune de ces couronnes ou faire se pourra. Il restera à voir que cela se pourra dans un nombre assez grand de ces couronnes, ce qui résultera du choix de N .

Soit donc N un entier positif, pour le moment quelconque. Posons :

$$a_k = \frac{2k+1}{2N} a \quad .$$

La restriction de u à $G \cap S_{a_k}$, étant nulle à la frontière, atteint son maximum en un point x_k . Soit G_k la composante connexe de x_k dans l'ouvert :

$$\left\{ x ; x \in G \quad \text{et} \quad |x - x_k| < \frac{a}{2N} \right\} \quad .$$

Choisissons un nombre $h < 1$. Soient C_0 la constante définie par le lemme, N_1 le nombre des ensembles G_k qui vérifient :

$$C_0 \int_n G_k < a^n 2^{-n} N^{-n}$$

et N_2 le nombre des autres, soit $N - N_1$. Comme :

$$u(x_{k+1}) > \sup_{x \in G_k} u(x) > u(x_k) ,$$

il vient en appliquant le lemme :

$$u(0) < h^{N_1} \sup_{x \in G} u(x) .$$

Or, il y a N_2 ensembles G_k vérifiant :

$$\mu_n G_k \gg \frac{a^n 2^{-n} N^{-n}}{C_0} .$$

Ces ensembles sont disjoints et contenus dans G , d'où :

$$\begin{aligned} N_2 &\leq C_0 2^n N^n s \\ N_1 &\gg N - C_0 2^n N^n s . \end{aligned}$$

Pour rendre N_1 aussi grand que possible, on est conduit à poser :

$$N = \left[\left(\frac{1}{C_0 2^n ns} \right)^{1/(n-1)} \right]$$

(le crochet désignant la partie entière), d'où :

$$N_1 \gg \left[\left(\frac{1}{C_0 2^n ns} \right)^{1/(n-1)} \right] - C_0 2^n \left[\left(\frac{1}{C_0 2^n ns} \right)^{1/(n-1)} \right]^n s .$$

Pour $s \rightarrow 0$ le second membre équivaut à :

$$\left(\frac{1}{C_0 2^n n} \right)^{1/(n-1)} (1 - 1/n) s^{-1/(n-1)}$$

ce qui établit le théorème.

Principe de Phragmén-Lindelöf.

Soit L , défini dans tout l'espace, et tel que les fonctions $b^i|x|$, $c|x|^2$ soient bornées. Il existe deux constantes η_0 , A strictement positives telles que, quel que soit le domaine G non borné pour lequel existent deux nombres $\eta < \eta_0$ et a tels que, pour tout $r \gg a$:

$$\mu_n G \cap B_r < \eta r^n ,$$

toute fonction u continue sur \bar{G} , deux fois continûment différentiable sur G , négative ou nulle sur la frontière de G , vérifiant :

$$Lu = 0 \quad \text{dans } G$$

et

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} [r^{-A\gamma}]^{-1/(n-1)} \sup_{x \in G \cap S_r} u(x) \leq 0$$

est négative ou nulle dans G .

DÉMONSTRATION. - Nous allons supposer qu'il existe un point x_0 où $u(x_0) > 0$ et construire A tel que :

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} [r^{-A\gamma}]^{-1/(n-1)} \sup_{x \in G \cap S_r} u(x) > 0$$

en appliquant le théorème précédent.

Soit G_0 le plus grand ouvert connexe contenant x_0 où l'on ait $u > 0$. Le maximum $m(r)$ de $u(x)$ dans $\overline{G_0} \cap \bar{B}_r$ est atteint en un point x_r de S_r . Soient B_r^* la boule $|x - x_r| < r$ et G_r la composante connexe de x_r dans $B_r^* \cap G_0$. On a, pourvu que $r \gg a$:

$$\mu_n G_r < \eta 2^n r^n .$$

Si donc :

$$\eta_0 \leq 2^{-n} C_1$$

où C_1 est définie par le théorème précédent, d'après ce théorème :

$$m(r) \leq \exp [-C(\eta 2^n)^{1/(n-1)}] m(2r)$$

et, comme $m(r)$ est une fonction croissante :

$$m(r) \geq \exp (C_2 \eta^{-1/(n-1)} [\log_2 \frac{r}{b}]) m(|x_0|)$$

(où $b = \sup \{a, |x_0|\}$) d'où, pour r assez grand, avec une constante $A > C_2 \text{ Log } 2$:

$$m(r) \geq A' r^{A\gamma}^{-1/(n-1)} \quad (A' > 0) .$$

REMARQUE 1. - Au lieu de borner u par 0, on aurait pu le faire par une constante positive.

REMARQUE 2. - LANDIS ([2]) a démontré à l'origine ce résultat par une méthode,

semble-t-il plus compliquée, analogue à celles dont nous parlerons dans le prochain exposé. Les hypothèses étaient différentes.

REMARQUE 3. - GILBARG ([1]) et LAX ([4]) avaient obtenu de leur côté des principes de Phragmén-Lindelöf différents.

COROLLAIRE. - Si u vérifie $Lu = 0$ dans le domaine limité par deux hyperplans parallèles et est bornée sur ces hyperplans, ou bien elle est bornée, ou bien elle n'est majorée par aucun polynôme.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GILBARG (David). - The Phragmén-Lindelöf theorem for elliptic partial differential equations, J. of rational Mechanics and Analysis, t. 1, 1952, p. 411-417.
 - [2] LANDIS (E. M.). - O principe Fragmaena-Lindelöfa djla rešeny elliptičeskikh uravenij, Doklady Nauk SSSR, t. 107, 1956, p. 508-511.
 - [3] LANDIS (E. M.). - Nekotorve voprosy kačestvennoj teorii elliptičeskikh i paraboličeskikh uravenij, Uspehki Mat. Nauk, N. S., t. 14, 1959, p. 21-85.
 - [4] LAX (Peter D.). - A Phragmen-Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations, J. of Math. pure and appl., t. 10, 1957, p. 361-389.
-