

SÉMINAIRE SCHWARTZ

HENRI MOREL

Unicité de la solution du problème de Cauchy pour certains opérateurs elliptiques à coefficients variables (fin)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 15, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A15_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

23 février 1960

UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY
POUR CERTAINS OPÉRATEURS ELLIPTIQUES À COEFFICIENTS VARIABLES (fin)

par Henri MOREL

d'après Lars HÖRMANDER [1]

Introduction.

On démontre une inégalité de Carleman à coefficients variables (théorème 2) en utilisant le théorème 1 de l'exposé précédent ; puis un théorème 2' pour des opérateurs satisfaisant à des conditions un peu moins restrictives. On obtient enfin des théorèmes 3 et 3' de prolongement unique à travers des hypersurfaces, avec une restriction portant sur la courbure de ces hypersurfaces, dans le théorème 3' ; enfin des théorèmes sur les produits de deux opérateurs satisfaisant aux hypothèses de 3.

THÉORÈME 2. - Soit $P(x, D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$ un opérateur homogène d'ordre m , où les $a_\alpha(x)$ satisfont à une condition de Lipchitz uniforme dans un ouvert Ω contenant l'origine. Supposons $P(x, D)$ elliptique à l'origine :

$$(H_0) \quad (P(0, \xi) = 0, \xi \in \mathbb{R}^n) \implies \xi = 0$$

et une condition de simplicité des caractéristiques remplie :

$$(H_1) \quad (P(0, \zeta, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$$

$$(\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}) \implies P^1(0, \zeta, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$$

alors on a une inégalité de Carleman :

$$\exists (C > 0, \delta_0 > 0, M > 0) \forall (\tau, \delta, \delta < \delta_0, \tau\delta > M) \exists \mathcal{U}_\delta \subset \Omega,$$

\mathcal{U}_δ ouvert contenant 0, tel que, $\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_\delta)$

$$(I_0) \quad (1 + \tau\delta^2)^{m-|\alpha|-1} \tau^{m-|\alpha|} \int \exp(2\tau\varphi_\delta) |D^\alpha u|^2 dx < C \int \exp(2\tau\varphi_\delta) |P(x, D) u|^2 dx$$

$$\text{où } \varphi_\delta = (x_1 - \delta)^2 + \delta(x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

DÉMONSTRATION.

Première partie. - On va déduire de (H_0) et (H_1) deux inégalités, (I_1) et (I_2) .

LEMME 1. - Les conditions (H_1) et (H_2) impliquent qu'il existe deux constantes C_1 et D_1 , un voisinage ouvert \mathcal{U} de l'origine, un voisinage \mathcal{V} du covecteur $(1, 0, \dots, 0)$ tels que $\forall x \in \mathcal{U}$, $\forall N \in \lambda \mathcal{V}$, $\lambda > 0$, on ait $\forall \tau > 0$, ξ réels :

$$(I_1) \quad |\xi + i\tau N|^{2m} < C_1 (|P(x, \xi + i\tau N)|^2 + \tau^2 |N|^2 |P^1(x, \xi + i\tau N)|^2)$$

$$(I_2) \quad |\xi + i\tau N|^{2(m-1)} < C_1' \left(\sum_{j=1}^m |P^j(x, \xi + i\tau N)|^2 \right)$$

DÉMONSTRATION. - Démontrons (I_1) : supposons $|\xi + i\tau N|^2 = 1$, et montrons que pour $x = 0$, $N = (1, 0, \dots, 0)$, le deuxième membre ne s'annule pas.

Premier cas : $\tau = 0$, on aurait $P(0, \xi) = 0$ donc $\xi = 0$: contradiction.

Deuxième cas : $\tau \neq 0$, si $(\xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$ (H_1) implique le deuxième membre de (I_1) ne peut s'annuler ; si $(\xi_2, \dots, \xi_n) = 0$ le premier membre est $|\xi_1 + i\tau|^{2m}$, le deuxième membre contient un terme proportionnel (H_0) . On démontre (I_2) sans peine ; on trouve \mathcal{U} et \mathcal{V} par continuité.

Deuxième partie. - (I_1) et (I_2) , où on laisse x fixe, ($x = x_g$) vont donner à l'aide de la transformation de Fourier une première ébauche de (I_0) où figurera $P(x_g, D)$. On passera à une inégalité avec $P(x, D)$ en utilisant la condition de Lipchitz à laquelle sont soumis les coefficients de $P(x, D)$. Pour cela, on va décomposer u à l'aide de la partition de l'unité déjà utilisée (cf. les exposés 12 et 13)

$$\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \Theta(x - g) = 1$$

soit $u_g = \Theta(x_1 \sqrt{\tau} - g_1, x_2 \sqrt{\tau} \delta - g_2, \dots, x_n \sqrt{\tau} \delta - g_n) u(x)$ la partition de l'unité est localement finie : au plus 2^n de ses termes sont différents de 0 en un point. On a

$$u = \sum_g u_g$$

Prenons $x_g = (g_1/\sqrt{\tau}, \dots, g_1/\sqrt{\tau}\delta, \dots)$; soit $N_g = \text{grad } \varphi_g(x_g)$. Les composantes de $\frac{1}{2} N_g$ sont :

$$\frac{1}{2} N_g(x_{g_1} - \delta, \delta x_{g_2}, \dots, \delta x_{g_n}) \quad ;$$

on aura $N_g \in \lambda \mathcal{P}$, pour tout x_g sur le support de u si les rapports

$$r_i = \frac{\delta x_{g_i}}{x_{g_1} - \delta}$$

sont assez petits : $r_i < \delta_0$; faisons l'hypothèse :

$$(H_2) \quad u \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_g) \quad ,$$

les diamètres apparents de \mathcal{U}_g étant $< \frac{\delta}{2}$ alors $r_i < \delta$ supposons $\delta < \delta_0$. Multiplions chaque membre de (I_i) ($i = 1, 2$), écrite pour $x = x_g \in \mathcal{U}_g$, $N = N_g = \text{grad } \varphi_g(x_g)$, par $|\mathcal{F}u_g(\xi + i\tau N_g)|^2$ et intégrons. En appliquant la formule de Parseval et le théorème de translation, il vient :

$$(I_3) \quad \int \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} |D^\alpha u_g|^2 \exp(2\tau \langle x, N_g \rangle) dx \\ < C_1 \int (P(x_g, D) u_g|^2 + \tau^2 |N|^2 |P^1(x_g, D) u_g|^2 \times \exp(2\tau \langle x, N_g \rangle) dx$$

$$(I_4) \quad \int \sum_{|\alpha|=m-1} \binom{m-1}{\alpha} |D^\alpha u_g| \exp(2\tau \langle x, N_g \rangle) dx \\ < C'_1 \int (\sum_j |P^j(x_g, D) u_g|^2) \exp(2\tau \langle x, N_g \rangle) dx$$

où les $\binom{m}{\alpha}$ sont les coefficients du binôme de d^0 à n variables. (En effet, transformons par exemple le premier membre, \mathcal{E}_a désignant l'opérateur de translation par a :

$$\int |\xi + i\tau N_g|^{2m} |u_g(\xi + i\tau N_g)|^2 d\xi = \int \mathcal{E}_{-i\tau N_g} |\xi|^{2m} |u_g(\xi)|^2 d\xi \quad .$$

Or $|\xi|^{2m} = \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \xi^{2\alpha}$; il vient :

$$\int \mathcal{E}_{-i\tau N_g} \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \xi^\alpha u_g(\xi) \overline{\xi^\alpha u_g(\xi)} d\xi = \int \mathcal{E}_{-i\tau N_g} \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \mathcal{F}D^\alpha u_g \overline{\mathcal{F}D^\alpha u_g} d\xi \quad .$$

Il vient enfin :

$$\int \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \mathcal{F}(D^\alpha u_g \cdot \exp(\tau \langle x, N_g \rangle)) \overline{\mathcal{F}(u_g \exp(\tau \langle x, N_g \rangle))} d\xi \quad ,$$

soit : $\int \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} |D^\alpha u_g|^2 \exp(2\tau \langle x, N_g \rangle) dx \quad .$

Troisième partie. - On fait apparaître le poids $\exp(2\tau\varphi_\delta)$. On a, sur le support de u_g : $|x_1 - x_{g_1}|^2 < \tau^{-1}$, $|x_i - x_{g_i}| < \tau^{-1} \delta^{-1}$ $i = 2, 3, \dots, n$

$$|\varphi_\delta(x) - \varphi_\delta(0) - \langle x, N_g \rangle| = |(x_1 - x_{g_1})^2 + \delta((x_2 - x_{g_2})^2 + \dots)| < n\tau^{-1}$$

donc en posant $C_2 = C_1 \exp(2n)$, $C'_2 = C'_1 \exp(2n)$, il vient :

$$(I_5) \quad A_{m,g} = \int \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_g|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta) dx \\ < C_2 \int (|P(x_g, D) u_g|^2 + \tau^2 |N_g|^2 |P^1(x_g, D) u_g|^2) \exp(2\tau\varphi_\delta) dx$$

$$(I_6) \quad A_{m-1,g} = \int \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_g| \exp(2\tau\varphi_\delta) dx \\ < C'_2 \int \left(\sum_j |P^j(x_g, D) u_g|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta) \right) dx \quad .$$

Quatrième partie. - On fait apparaître aux seconds membres de (I_5) et (I_6) $P(x, D)$, avec x variable : sur le support de u_g , on a

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_g)| < C\tau^{-1/2} \delta^{-1/2} \quad ,$$

si on suppose :

$$(H_2) \quad \delta < 1 \quad ,$$

donc (Cauchy-Schwarz) :

$$|P(x, D) u - P(x_g, D) u|^2 < C' \tau^{-1} \delta^{-1} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \quad ; \quad C' > 0 \quad .$$

D'autre part, prenons $\mathcal{U}_\delta \subset \Omega$, ouvert contenant l'origine tel que

$$(H_4) \quad x \in \mathcal{U}_\delta \Rightarrow |\text{grad } \varphi_\delta(x) - \text{grad } \varphi_\delta(0)| < \delta \quad ;$$

il suffit pour cela de restreindre un peu plus \mathcal{U}_δ que ne le fait (H_2) . Si $u \in \mathcal{D}\mathcal{U}_\delta$, $u_g \in \mathcal{D}\mathcal{U}_\delta$ et sur le support de u_g on a :

$$|N_g| < 3\delta$$

car $|\text{grad } \varphi_\delta(0)| = 2\delta$; on obtient donc avec de nouvelles constantes :

$$(I_7) \quad A_{m,g}^2 < C_3 \left\{ |P(x, D) u_g|^2 + \tau^{-1} \delta^{-1} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_g|^2 + \tau^2 \delta^2 |P^1(x, D) u_g|^2 \right. \\ \left. + \tau \delta \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha u_g|^2 \right\} \exp(2\tau\varphi_\delta) dx$$

si on suppose :

$$(H_5) \quad \tau \delta > 2C_3 \quad \text{et} \quad C_4 = 2C_3$$

et

$$(H_6) \quad \tau \delta > 2D_3 \quad \text{et} \quad D_4 = 2D_3 \quad :$$

$$(I_8) \quad A_{m,g}^2 < C_4 \int \left\{ |P(x, D) u_g|^2 + \tau^2 \delta^2 |P^1(x, D) u_g|^2 + \tau \delta \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha u_g|^2 \right\} \exp(2\tau \varphi_\delta) dx$$

de même :

$$(I_9) \quad A_{m-1,g}^2 < C_4' \int \left(\sum_j |P^j(x, D) u_g|^2 \exp(2\tau \varphi_\delta) \right) dx \quad .$$

Compte tenu de (I₉) , (I₈) devient :

$$(I_{10}) \quad A_{m,g}^2 < C_5 \int \left\{ |P(x, D) u_g|^2 + \tau^2 \delta^2 |P^1(x, D) u_g|^2 + \tau \delta \sum_j |P^j(x, D) u_g|^2 \right\} \exp(2\tau \varphi_\delta) dx \quad .$$

Cinquième partie. - On va faire apparaître u au lieu de u_g .

a. De ce qu'en un point au plus 2^v fonctions u_g ne s'annulent pas, il vient par Cauchy-Schwarz :

$$(1) \quad |D^\alpha u|^2 < 2^v \sum_g |D^\alpha u_g|^2$$

ce qui donne, en posant $A_m^2 = \int \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_g|^2 \exp(2\tau \varphi_\delta) dx$,

$$A_m^2 \leq 2^v \sum_g A_{m,g}^2 \quad .$$

b. Application du théorème 1 (exposé précédent) : pour majorer, à l'aide d'expressions correspondantes en u , les sommes des termes en u_g apparaissant en sommant $\forall g$ les deuxièmes membres de (I₁₀) et (I₁₁) , on a, (Leibniz), en écrivant β^* pour le multientier dont on enlève la première composante et en écrivant P pour $P(x, D)$:

$$P^\alpha u_g = \sum_{P^{\alpha'+j}} u \tau^{|\beta|/2} \delta^{|\beta^*|/2} \frac{D^\beta \Theta}{\beta!} \quad ,$$

les $\frac{D^\beta \Theta}{\beta!}$ ayant une borne supérieure, il vient par Cauchy-Schwarz, et (1) :

$$\tau^{|\alpha|} \delta^{|\alpha^*|} \sum_g |P^\alpha u_g|^2 \leq C'' \sum_g \tau^{|\alpha|+|\beta|} \delta^{|\alpha^*|} |P^{\alpha+\beta} u|^2 .$$

Or, on peut appliquer le théorème 1 : ici, le poids $\exp(2\tau\varphi_\delta)$ est différent de celui de l'énoncé du théorème 1 ; on s'y ramène par une translation ; (la constante du théorème 1 ne dépend pas de l'ouvert) ; si on pose $t_1^2 = 2$, $t_2^2 = \dots = t_n^2 = 2\tau\delta$, il vient :

$$(2) \quad \tau^{|\alpha|} \delta^{|\alpha^*|} \sum_g \int |P^\alpha u_g|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta) dx < C''' (B^2 + A_m A_{m-1})$$

où

$$B^2 = \int |Pu|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta) dx .$$

c. On écrit pour tout g les inégalités (I_i) ($i = 9, 10$) et on somme $\forall g$; les inégalités (I_9) donnent, compte tenu de (1) et (2) :

$$(I_{11}) \quad A_{m-1}^2 < C'_5 \tau^{-1} \delta^{-1} (B^2 + A_m A_{m-1}) ,$$

les inégalités (I_{10}) donnent :

$$(I_{12}) \quad A_m^2 < C_6 (1 + \tau\delta^2) (B^2 + A_m A_{m-1}) .$$

Il reste à faire une transformation élémentaire sur (I_{11}) et (I_{12}) ; (I_{12}) devient (I_{14}) tenant compte de

$$A_m \lambda A_{m-1} < \frac{A_m^2}{2} + \frac{\lambda^2 A_{m-1}^2}{2}$$

$$(I_{14}) \quad A_m^2 < 2C_6 (1 + \delta^2 \tau) B^2 + C_6^2 (1 + \delta^2 \tau)^2 A_{m-1}^2$$

de même (I_{11}) devient :

$$A_{m-1}^2 < C'_5 \tau^{-1} \delta^{-1} (B^2 + A_m^2/2(1 + \delta^2 \tau) + (1 + \delta^2 \tau) A_{m-1}^2/2)$$

d'où :

$$(I_{15}) \quad A_{m-1}^2 < C'_5 (1 + C_6^2) (1/\tau\delta + \delta) \leq C'_5 (1 + C_6) (\tau\delta)^{-1} B^2$$

on choisit alors δ_0 et M tels que :

$$\tau\delta > M, \delta < \delta_0 \Rightarrow H_i \quad (i > 2)$$

et

$$C'_5 (1 + C_6^2) (M^{-1} + \delta_0) < 1 ;$$

on a alors : $A_{m-1}^2 \leq C'_6 B^2 \tau^{-1} \delta^{-1}$ donc, d'après (I_{14}) :

$$(I_{16}) \quad A_m^2 \leq C_7 (1 + \delta^2 \tau) B^2 .$$

Sixième partie. - L'inégalité (I₁₆) est celle du théorème 2 pour $|\alpha| = m$.
On démontre par un calcul presque identique à celui de l'exposé 8, paragraphe 1, que :

$$(3) \quad \tau(1 + \delta^2 \tau) \int |x|^2 \exp(2\tau\psi_\delta) dx \leq \int |D^1 v|^2 \exp(2\tau\psi_\delta) dx \quad \forall v \in \mathcal{O}\mathcal{U}_\delta$$

en supposant $x \in \mathcal{U}_\delta \Rightarrow |x_i| < \frac{\delta}{2}$. De (3) on déduit, si $|\alpha| < m$:

$$\tau^{k-l} (1 + \delta^2 \tau)^{k-l} A_l^2 < C(k) A_k^2 \quad l < k$$

donc :

$$\tau^{m-|\alpha|} (1 + \delta^2 \tau)^{m-|\alpha|} \int \exp(2\tau\psi_\delta) |D^\alpha u|^2 dx < A_m^2$$

ce qui, avec (I₁₆), établit définitivement le théorème 2.

De la même façon, on obtient :

THÉORÈME 2'. - Soit $\psi_\delta = (x_1 - \delta)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Supposons les mêmes conditions vérifiées par les coefficients de $P = \sum a_\alpha D^\alpha$; supposons (H₀) et (H₁') :

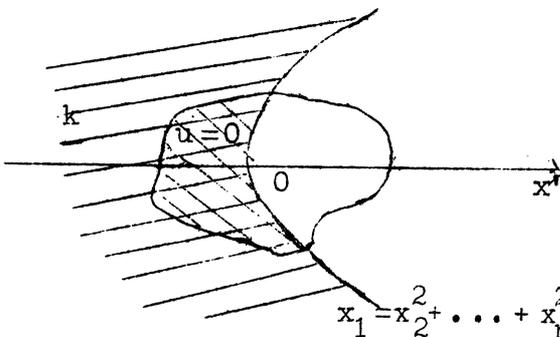
$$\sum_{j=1}^n |P^j(0, \xi + i\tau N_0)|^2 \neq 0$$

pour ξ, τ réels $\neq (0, 0)$. Alors $\exists C > 0, \delta_0 > 0, M > 0,$
 $\forall (\tau, \delta, \delta < \delta_0, \tau\delta > M), \exists \mathcal{U}_\delta \subset \Omega$, tel que $\forall u \in \mathcal{O}\mathcal{U}_\delta$ on a :

$$(I_0') \quad (1 + \delta^2 \tau)^{m-|\alpha|-1} \tau^{m-|\alpha|} \int |D^\alpha u|^2 \exp(2\tau\psi_\delta) dx \leq C \int |P(x, D) u|^2 \exp(2\tau\psi_\delta) dx$$

On remplace (I) par (I₁'), où $\sum_I |P^j(x, \xi + i\tau N)|^2$ remplace $|P^1(x, \xi + i\tau N)|^2$; des théorèmes 2 et 2' on déduit :

THÉORÈME 3. - Soit $k = \{x, x_1 < x_2^2 + \dots + x_n^2\}$; soit $P(x, D)$ vérifiant les conditions du théorème 2; soit u , vérifiant dans un ouvert \mathcal{U} , contenant l'origine



$$|P(x, D) u| < C \sum_{|\alpha| < m} |D^\alpha u|$$

et $u(x) = 0$ pour $x \in k \cap \mathcal{U}_1$ alors, $\exists \mathcal{U}$, ouvert contenant 0 tel que :

$$x \in \mathcal{U} \Rightarrow u(x) = 0$$

DÉMONSTRATION du théorème 3. - Soit $\mathcal{U}_\delta \subset \mathcal{U}_1$ et tel que $x \in \mathcal{U}_\delta \Rightarrow |x| < \delta$.
Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_\delta)$ $\chi(x) = 1$ sur $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ (\mathcal{U}_2 ouvert, $0 \in \mathcal{U}_2$) ; on a
 $v = \chi u \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_\delta)$. D'après le théorème 1, on a donc :

$$(1 + \tau \delta^2)^{m-|\alpha|-1} \tau^{m-|\alpha|} \int \exp(2\tau \varphi_\delta(x)) |D^\alpha v|^2 dx \\ \leq C \int \exp(2\tau \varphi_\delta(x)) |P(x, D) v|^2 dx .$$

Or, sur \mathcal{U}_2 , $v = u$ donc $|P(x, D) v| \leq C$, $\sum |D^\alpha u|$ en se restreignant au premier membre :

$$(1 - CC_1 \tau^{-1}) \int_{\mathcal{U}_2} \exp(2\tau \varphi_\delta(x)) \sum |D^\alpha v|^2 dx \\ \leq C \int_{\mathcal{U}_2} \exp(2\tau \varphi_\delta(x)) |P(x, D) v|^2 dx$$

or $v(x) \neq 0 \Rightarrow x_1 > x_2^2 + \dots + x_n^2 \Rightarrow (\varphi_\delta(x) < (x_1 - \delta)^2 + \delta x_1 < \delta^2)$ $x \neq 0$,
donc $(x \in \mathcal{U}_2) \Rightarrow (\varphi_\delta(x) < \delta^2 - \alpha)$ où α fixe > 0 ; or $\varphi_\delta(0) = \delta^2$; il
existe $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_2$, \mathcal{U} voisinage ouvert de l'origine, tel que

$$x \in \mathcal{U} \Rightarrow \varphi_\delta(x) > \delta^2 - \frac{\alpha}{2} .$$

On obtient alors :

$$(1 - CC_1 \tau^{-1}) \exp(\tau \alpha) \int_{\mathcal{U}} \sum |D^\alpha u|^2 dx < C \int_{\mathcal{U}_2} |P(x, D) u|^2 dx$$

si $\tau \rightarrow \infty$ on voit que $u(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{U}$.

THÉORÈME 3' . - Même énoncé que le théorème 3, $P(x, D)$ vérifiant lrs hypothèses
du théorème 2' , et k étant remplacé par l'extérieur de $\varphi_\delta(x) \leq \delta^2$.

REMARQUE. - $\varphi_\delta(x) = \varphi_\delta(0)$ avait un contact du second ordre avec le paraboloïde : $x_1 = \frac{1}{2}(x_2^2 + \dots + x_n^2)$. Il n'en est pas de même pour φ_δ qui a dû être introduit pour obtenir une inégalité de Carleman dans les conditions du théorème 2' ; si bien que le théorème 3' ne donne l'unicité du prolongement qu'à travers des surfaces assez convexes.

THÉORÈME 4. - Le produit de deux opérateurs satisfaisant aux conditions du théorème 2 donne lieu à une inégalité de Carleman et un théorème de prolongement unique.

Démonstration analogue à celle de l'exposé 8.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HÖRMANDER (Lars). - On the uniqueness of the Cauchy problem II, Math. Scand., t. 7, 1959, p. 177-190.